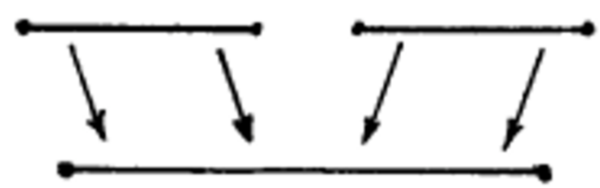
Quelle est la longueur d'une pomme de terre ?
Une introduction à la théorie de la mesure géométrique
Stephen H. Schanuel [1]

La question posée par le titre semble probablement un peu particulière ; mais j'espère vous persuader qu'elle a une interprétation unique sensée et vous montrer plusieurs façons (au moins pour une pomme de terre en forme de sphère) de calculer la réponse. Mais mon véritable objectif est plus ambitieux : j'espère réformer votre intuition sur la géométrie, vous amener à intégrer dans votre image de la géométrie euclidienne les changements radicaux dans les notions fondamentales issus des travaux d'Euler, Gauss, Riemann, Minkowski et bien d'autres. C'est pourquoi je parle très peu des preuves (sauf pour indiquer où on peut les trouver), et j'essaie de montrer les idées dans le cadre le plus simple où elles font leur apparition.

Notre sujet est le volume, la surface, la longueur et le nombre. On commence par la longueur. Imaginez un bâton de mesure idéalisé, disons d'une longueur d'un pouce, comme illustré ci-dessous. (J'en ai épaissi les extrémités pour souligner que je pense à un segment fermé.)

Or, ce bâton est vraiment un instrument plutôt médiocre pour mesurer des longueurs. Le défaut est que si l'on agrandit le segment d'un facteur deux, le segment résultant n'est pas l'union disjointe de deux copies de l'original ; les deux pièces se chevauchent en un point.

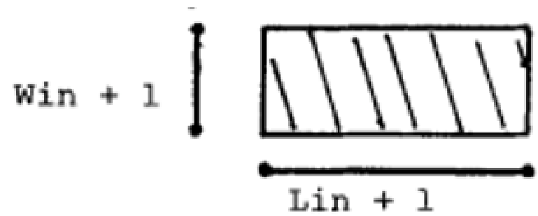


Cela suggère que notre segment original était infiniment plus grand qu'un pouce [2] ; sa vraie taille est de 1 in +1, 1 symbolisant le point supplémentaire. La leçon fondamentale à tirer des géomètres depuis Euclide est qu'il est non seulement possible, mais même souhaitable, de garder la trace de cet excès infinitésimal. Ainsi, la "taille totale" d'une figure solide dans l'espace euclidien ne devrait pas être un volume pur, mais une somme formelle de termes volume + aire + longueur + nombre (donc formellement des polynômes en la variable la quantité en pouces). Calculons quelques exemples :

1) Un segment de droite de longueur L pouces est de taille L in $+1$.

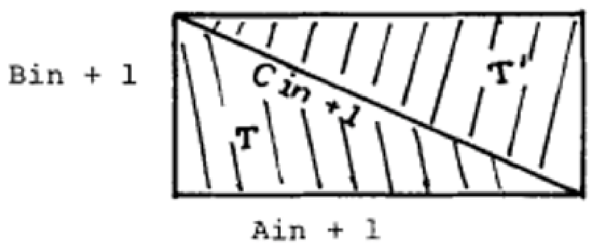
2) Un rectangle fermé est de taille

[1] Département de mathématiques de l'Université d'état de l'Etat de New York à Buffalo, New York, 14214
Transcription, traduction : Denise Vella-Chemla, novembre 2024.
[2] *Note de la traductrice* : les lettres "in" pour "inch" sont à lire "pouce", la mesure anglaise.



$$(L \text{ in } + 1)(W \text{ in } + 1) = LW \text{ in}^2 + (L + W) \text{ in } + 1$$

3) On calcule la taille d'un triangle rectangle comme l'a fait Euclide, excepté que pour prendre en compte l'excès



on doit utiliser

$$\text{taille}(T \cup T') = \text{taille } T + \text{taille } T' - \text{taille}(T \cap T')$$

$$(A \text{ in} + 1)(B \text{ in} + 1) = 2 \text{ taille } T - (C \text{ in} + 1)$$

$$\text{taille } T = \frac{AB}{2} \text{ in}^2 + \frac{A + B + C}{2} \text{ in} + 1.$$

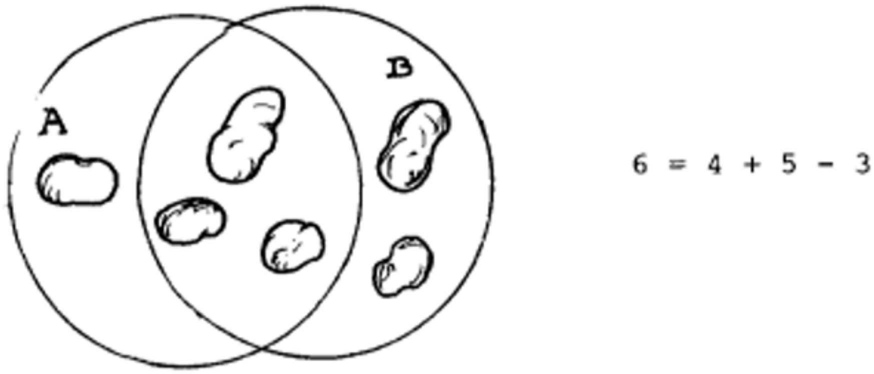
À présent, vous commencez peut-être à deviner la signification des termes relatifs à la taille. L'"aire" est simplement la superficie telle qu'Euclide l'aurait calculée. La "longueur" correspond à la moitié du périmètre. (Une explication du fait que le bord n'est qu'à moitié exposée, de sorte qu'une personne bidimensionnelle peignant la forme présentée n'a besoin que de la moitié de la quantité de peinture dont elle aurait besoin si elle devait peindre les formes unidimensionnelles qui sont les bords de notre triangle. Ces limites, en tant que formes géométriques à part entière, ont leurs longueurs habituelles.) Le "nombre" de la figure est ce qu'on a appelé la "caractéristique d'Euler" d'après les preuves d'Euler selon lesquelles le nombre d'Euler d'une sphère vaut 2, et d'après certaines recherches sur les formes unidimensionnelles.

Avant d'aller plus loin, il faut regarder d'un peu plus près le sens d'un nombre. Depuis l'époque d'Euclide, notre notion de nombre cardinal a connu deux grands progrès. De Cantor nous avons appris à compter les ensembles discrets infinis, et d'Euler nous avons appris à compter les corps étendus. De ces deux progrès, celui d'Euler a été de loin le plus important ; mais il semble que la plupart d'entre nous aient déployé plus d'efforts pour recycler nos intuitions afin d'incorporer les idées de Cantor que celles d'Euler.

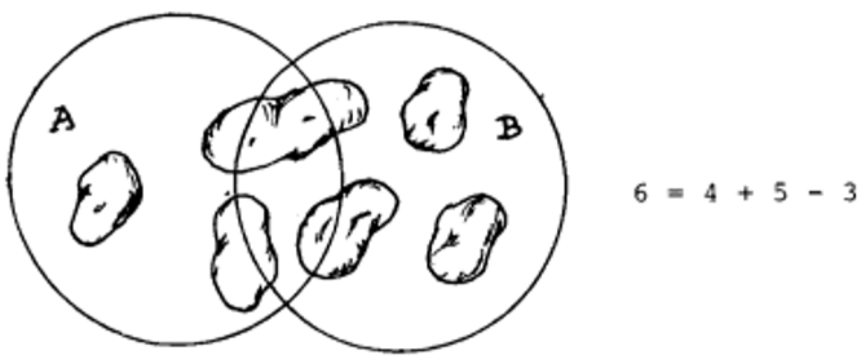
Essayons de remédier à cela, au moins un peu, maintenant. D'abord une observation élémentaire à propos du processus de comptage :

$$\text{nombre}(A \cup B) = \text{nombre}(A) + \text{nombre}(B) - \text{nombre}(A \cap B)$$

comme l'illustre ce paquet de pommes de terre

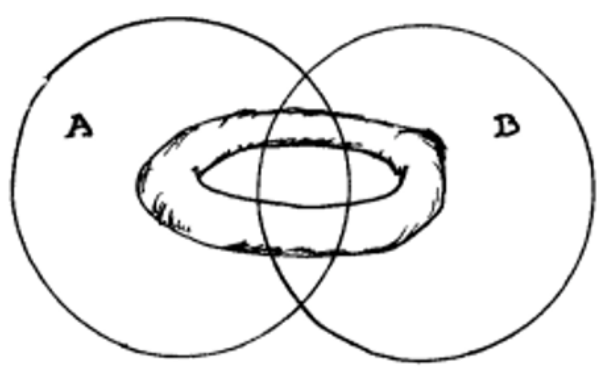


Bien sûr, n'importe quel enfant observerait cela, mais combien d'entre eux auraient observé que le prochain exemple illustre le même phénomène ?



Chaque objet, que ce soit une petite pomme de terre, ou une grande, ou même un *morceau* de pomme de terre, compte pour un.

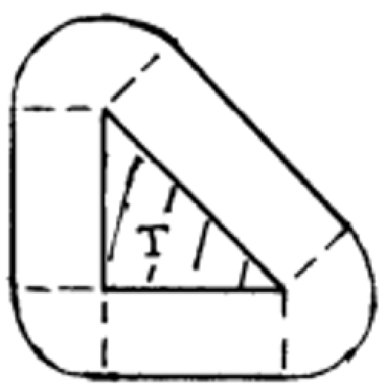
Il semblerait qu'on soit ennuyé si notre paquet de pommes de terre contient un donut :



$$\begin{aligned} \text{nombre}(A \cup B) &= \text{nombre}(A) + \text{nombre}(B) - \text{nombre}(A \cup B) \\ &= 1 + 1 - 2 = 0 \end{aligned}$$

Nous sommes donc obligés de compter un beignet comme zéro, si nous voulons que le comptage soit finement additif lorsqu'un corps étendu (ou un ensemble) est écrit comme une union de parties qui ne sont pas fermées. Bien sûr, nous négligeons, pour l'instant, la question importante de savoir quelles sortes de corps et quelles sortes de parties doivent être autorisées ; ce qui est évident, c'est qu'une sorte de "finitude combinatoire" est nécessaire. Pour éviter ces difficultés, limitons pour l'instant notre attention aux polyèdres compacts finis, pour lesquels il n'y a aucune difficulté à préciser les définitions de nombre, etc., et à prouver les propositions de base. (Mais nous nous réservons le droit de tirer des exemples de cas plus généraux qui ont été élaborés au cours du siècle dernier.)

Il faudrait illustrer au moins une utilisation de cette notion raffinée de taille, la formule de Steiner. Même en supposant que l'on s'intéresse uniquement à l'aire de figures planes, on peut demander l'aire de l'ensemble de tous les points situés à une distance d'au plus R pouces d'une région plane convexe T.



Sur le dessin, il est clair que la région complète se décompose en $T \cup$ (rectangles) $\cup$ (secteurs de disques), et que l'aire totale est

$$\text{Aire totale} = 1 \cdot \text{Aire}(T) + (2R \text{ in}) \text{ Longueur}(T) + (\pi R^2 \text{ in}^2) \text{ Nombre}(T),$$

rappelant que la longueur de T est la moitié du périmètre. Ceci est assez général, et s'applique à tout ensemble convexe compact en N dimensions, et on appelle cette formule la formule de Steiner (les coefficients sont juste la mesure n-dimensionnelle d'une sphère de rayon R dans le n-espace, ici pour $n = 0, 1, 2$). Le côté droit de la formule de Steiner fournit un résultat pair si T n'est pas convexe : il faut considérer le côté gauche comme l'intégrale de volume à N dimensions de la fonction dont la valeur en tout point p est le nombre (caractéristique d'Euler) de l'intersection de T avec la sphère fermée de rayon R et centrée en p. Bien entendu, lorsque T est convexe compact, cette intersection l'est également, donc ce nombre est soit 1, soit 0, et la fonction devient la fonction caractéristique de la grande région. Ceci illustre un phénomène général dans l'ensemble du sujet : tous les problèmes se réduisent au problème de la bonne compréhension du nombre ; la longueur, la superficie, etc. sont alors relativement faciles à comprendre.

Une autre illustration de la primauté du nombre vient de l'**interprétation géométrique intégrale** de la longueur, etc. pour, disons, une figure dans l'espace de dimension 3. Pour calculer la longueur (mesure unidimensionnelle), regardez tous les plans (espaces de dimension 2) dans l'espace de dimension 3 (car $2 = 3 - 1$). Or sur l'espace des plans il existe une mesure, unique à un facteur constant près, invariante sous des notions rigides, donnant des ensembles ouverts de plans de mesure positive et des ensembles compacts de plans de mesure finie ; normalisez-le de sorte que l'ensemble des plans rencontrant un segment de ligne de longueur 1 pouce mesure 1 pouce. (Il est préférable de considérer cette mesure comme étant évaluée en longueurs plutôt qu'en nombres purs.) Maintenant, pour calculer la longueur de notre figure, intégrez simplement, sur l'espace des plans, la fonction dont la valeur dans n'importe quel plan est le "nombre de fois où le plan touche la figure", ce qui doit bien sûr être interprété comme la caractéristique d'Euler de l'intersection du plan avec la figure. De même, pour calculer l'aire d'une figure, normalisez la mesure (la valeur de l'aire) sur l'espace des droites de sorte que l'ensemble des droites rencontrant un carré de côté 1 in ait pour mesure 1 in^2 et procédez comme précédemment.

Revenant maintenant à l'exemple qui illustrait la formule de Steiner, nous pouvons faire de plus amples remarques. L'aire, la longueur et le nombre ne sont pas simplement des quantités associées à notre triangle, mais ce sont des intégrales, ou mesures totales, des mesures supportées sur le triangle : la mesure de l'aire est la mesure habituelle ; la mesure de longueur est la moitié de la mesure de la longueur habituelle sur les bords ; et le nombre mesure associe au sommet inférieur gauche la mesure et à chacun des autres sommets la mesure 3/8, correspondant aux fractions de disque situées à chaque sommet de notre image. Federer a montré que pour une classe de sous-ensembles de l'espace euclidien appelés "ensembles de portée positive", généralisant de manière significative les ensembles convexes fermés, on peut utiliser cette idée pour définir précisément les mesures et prouver leurs propriétés pertinentes. Pour les ensembles convexes fermés, Minkowski a étudié ces quantités, qu'il a appelées "Quermassintegralen". Malheureusement, il les a normalisées et indexées de manière à obscurcir leur interprétation géométrique en longueur, aire, etc.

La formule pour la mesure de dimension zéro est appelée "formule de Gauss-Bonnet", notamment dans le cas de variétés lisses avec bord. Un exemple, plus simple que notre

$$\text{nombre(triangle rectangle isocèle)} = {}^1\!/\!_4 + {}^3\!/\!_8 + {}^3\!/\!_8 = 1$$

est familier à tous les enfants. Pour compter le nombre de morceaux de corde dans un enchevêtrement de corde, il n'est pas nécessaire de séparer les morceaux ; le nombre de morceaux est concentré aux extrémités de la corde, chaque extrémité en comptant la moitié. Il n'y a qu'un pas, conceptuellement, de là, à l'idée que le nombre d'un objet solide est aussi l'intégrale d'une certaine quantité locale ; pour une 3-variété à bord, par exemple une pomme de terre, dans l'espace euclidien de dimension 3, la caractéristique d'Euler est l'intégrale d'une mesure dm_0 concentrée à la surface du corps :

$$dm_0 = (4\pi)^{-1} R_1^{-1} R_2^{-1}\, ds,$$

où ds est l'unité habituelle de mesure de l'aire, et R_1 et R_2 sont les "rayons de courbure principaux" en un point. Notons que puisque R_1 et R_2 ont la dimension de longueurs, la mesure de l'aire a pour dimension $(\text{longueur})^{-2}$, c'est donc un nombre pur, comme cela doit l'être. Cette formule se généralise pour donner les formules des mesures dm_k en dimension k pour une n-variété M à bord lisse ∂M dans le n-espace, pour $k = 0, ..., n-1$;

$$dm_k = c_{n,k} p_{n-1-k}(R_1^{-1}, ..., R_{n-1}^{-1})\ ds$$

où p_i est la i-ième fonction élémentaire symétrique (homogène de degré i), ds est l'unité de surface habituelle en dimension $(n-1)$, et $c_{n,k}$ est une constante qu'on peut facilement calculer, par exemple, en se restreignant au cas d'une sphère, pour laquelle on connaît m_k qu'on peut calculer par la formule de Steiner. Par exemple, pour une pomme de terre, ou bien pour un solide dans l'espace de dimension 3

$$dm_2 = {}^1\!/\!_2\ ds,$$

$$dm_1 = (2\pi)^{-1} - (R_1^{-1} + R_2^{-1}) ds,$$

dm_0 a été calculé ci-dessus, et dm_3 est la mesure habituelle du volume restreint à M. (C'est une particularité des formes lisses que les mesures de basses dimensions soient réparties tout le long du bord. Pour les polyèdres, dm_k est concentré sur les k-cellules ; mais si vous imaginez approximer M par des polyèdres, vous voyez pourquoi les mesures se répartissent).

L'observation que $m_0(S^n)$, la caractéristique d'Euler de la n-sphère, est 2 si n est pair, 0 si n est impair, se généralise.

$$dm_k(\partial M) = \begin{cases} 2dm_k(M) & \text{si } n-k \text{ est impair,} \\ 0 & \text{si } n-k \text{ est pair.} \end{cases}$$

Par conséquent, si on prend n impair et $\partial M = \varnothing$, donc une variété sans bord, alors non seulement on a $\int dm_0 = m_0(M) = 0$, mais en fait, $dm_0(M)$ est *identiquement* nul, de telle façon que $\int f dm_0(M) = 0$ pour toute fonction intégrable f. Plus généralement, pour une variété M sans bord, $dm_k(M) = 0$ dans toutes les codimensions impaires, puisqu'il est égal à ${}^1\!/\!_2\ dm_k(\partial M)$. Par conséquent, par exemple pour une 2-variété avec bord (disons dans l'espace de dimension 3), la mesure de la longueur est juste la moitié de la mesure sur les courbes du bord, et n'est pas répartie sur la surface ; alors que le nombre mesure est réparti tout autour, comme la mesure d'aire.

Regardons un exemple supplémentaire, pour aider à la visualisation des mesures : un solide cylindrique M de rayon R et de hauteur H. (C'est topologiquement, bien que pas de façon lisse, une variété sans bord ; donc tout le paragraphe précédent s'applique à ce solide). $M = D \times I$, où D est un disque de rayon R, et I est un intervalle de longueur H. Donc la mesure totale est donnée par

$$\begin{aligned} m(M) &= (m_2(D) + m_1(D) + m_0(D))(m_1(I) + m_0(I)) \\ &= (\pi R^2 + \pi R + 1)(H + 1) \\ &= \pi R^2 H + (\pi R^2 + \pi R H) + (\pi R + H) + 1 \end{aligned}$$

où le terme homogène de degré k donne $m_k(M)$. Les formules pour m_3, m_2, et m_0 sont juste les mesures habituelles pour le volume, la moitié de la mesure de l'aire, et la caractéristique d'Euler, mais notons comme il est pratique de combiner ces termes en un seul “polynôme”, même pour calculer l'aire de la surface. La formule analogue pour dm est plus intéressante ; par exemple, la mesure de la longueur

$$dm_1(M) = dm_0(D) \times dm_1(I) + dm_1(D) \times dm_0(I).$$

Donc la mesure de la longueur sur un cylindre est la somme de deux mesures de produits plus simples :

$d_0(D) \times dm_1(I)$ est le produit de la mesure uniformément distribuée sur le cercle ∂D avec comme mesure totale (le nombre pur) 1, multiplié par la mesure de la longueur sur l'intervalle ; donc ce terme est uniformément distribué sur la surface latérale du cylindre, avec comme mesure totale H (une longueur).

$dm_1(D) \times dm_0(I)$, le produit de la mesure de longueur sur D est uniformément distribué sur le cercle ∂D en donnant à chaque arc une mesure de sa longueur, multipliée par le nombre pur de la mesure sur lequel se mesure chaque extrémité ; donc ce terme est concentré aux extrémités haute et basse de notre cylindre, et cela donne à chaque mesure d'arc la $1/2$ de sa longueur.

Notons que si l'on fixe H et si l'on fait tendre R vers zéro, alors notre cylindre tend vers un segment de droite de longueur H, alors les mesures $dm_k(M)$ tendent vers ceux-là pour le segment. Ceci est un exemple de la propriété de continuité générale des mesures, mais la formulation correcte de la notion appropriée de convergence des formes variables a été étudiée seulement dans des cas particuliers, par exemple pour les ensembles de limite positive par Federer. Pour les ensembles convexes compacts, les choses sont particulièrement simples, comme Minkowski le savait déjà : les ensembles sont fermés si et seulement s'ils sont proches de la distance de Hausdorff

$$d(A, B) = \sup \left(\{d(a, B), a \in A\} \cup \{d(b, A), b \in B\} \right).$$

En effet, pour des ensembles convexes (compacts) A, B, les mesures ont de nombreuses jolies propriétés, par exemple : $dm_k(A) \geq 0$; $A \subset B$ implique $m_k(A) \leq m_k(B)$.

Par conséquent, la longueur de B est plus grande que la longueur de A ; clairement cela n'a pas besoin d'être vérifié si A et B ne sont pas convexes, comme le montre un long filet [3] dans un petit cylindre ; et $dm_k(A) \geq 0$ est faux même pour $k = 0$ pour un A non convexe. Pour un A non convexe, il y a une version de la positivité : $m(A)$ n'est pas ≥ 0 par coefficient comme dans le cas où A est convexe, mais seulement dans l'ordre dans lequel le terme de plus haut degré domine. Pour A convexe, on sait beaucoup de choses sur les valeurs possibles du vecteur $(l = m_0(A), m_1(A), ..., m_n(A))$; l'inégalité isopérimétrique est l'une des contraintes, et les autres sont connues, mais je ne crois pas qu'une description complète de l'image de ce vecteur lorsque A parcourt les ensembles convexes compacts ne soit connue, même pour $n = 3$.

Pour réaliser l'utilité d'avoir des mesures dm_k, à la place du seul total $m_k = \int dm_k$, considérons les formules de Pappus pour le volume et la mesure de l'aire de la surface de révolution. Celles-ci, vous vous en rappelez, disent que si on fait tourner la figure plane K (dans le demi-plan supérieur)

[3] a long spring ?

autour de l'axe des x pour obtenir le solide $\widetilde{K}$ alors

$$m_3(\widetilde{K}) = m_2(K) \cdot 2\pi\ y_2 \quad \text{et}$$

$$m_2(\widetilde{K}) = m_1(K) \cdot 2\pi\ y_1,$$

où y_k est le résultat du fait de moyenner la distance y d'un point de l'axe des x, par rapport à la mesure $dm_k(K)$. (Bien sûr, la seconde formule est habituellement multipliée par 2 en disant que l'aire de la surface $2m_2(\widetilde{K})$ est le périmètre $2m_1(K)$ fois la moyenne sur la courbe du bord de la coordonnée en y fois 2π). Mais le fait important à noter est que y_k ne peut pas être calculé à partir de m_k ; on a besoin de connaître dm_k pour calculer la moyenne. Écrire les théorèmes de Pappus sous cette forme suggère immédiatement un autre théorème :

$$m_1(\widetilde{K}) = m_0(K) \cdot 2\pi\ y_0.$$

Ceci est aussi vrai, à moins que K ne rencontre l'axe de révolution dans un ensemble de longueur positive $L = m_1(K \cap \text{ axis})$; alors L doit être ajouté au côté droit. Une dimension au-dessous, le terme principal disparaît, mais la correction ne disparaît pas :

$$m_0(\widetilde{K}) = m_0(K \cap \text{axe}),$$

et donc la forme générale est

$$m_k(\widetilde{K}) = m_{k-1}(K) \cdot 2\pi_{k-1} + m_k(K \cap \text{ axe}).$$

Il est désormais facile d'utiliser ces formules pour obtenir des calculs alternatifs de m_k pour la sphère et le cylindre, ainsi que pour les cônes, etc.

Tout cela a été largement généralisé, mais il reste beaucoup à faire. Nous n'avons pas souligné le fait qu'une figure K possède sa propre métrique intrinsèque (géodésique) $dK(x, y)$, selon laquelle les mesures dm_k devraient avoir une description invariante, que je ne sais pas donner simplement. À cela sont étroitement liés deux autres problèmes : qu'est-ce qui caractérise les espaces métriques K qui portent ces mesures, et comment décrire la proximité entre ces K ?

J'espère que notre défilé d'objets familiers vus en termes de leurs mesures associées dm vous aura persuadé que la "longueur d'une pomme de terre" est une notion utile, et que ces termes de dimension inférieure dans la mesure d'une pomme de terre (ou des solides) sont suffisamment simples pour être enseignés en calcul élémentaire. J'en ai fait l'expérience ; certains de mes élèves ont apprécié.

J'ai laissé un mystère pour la fin : quelle est la valeur réelle de la longueur d'une sphère ? Vous pouvez la calculer en calculant le volume d'une sphère de rayon $R+S$ et en appliquant la formule de Steiner à une sphère de rayon S, ou vous pouvez utiliser nos formules pour les solides de révolution, ou bien encore, vous pouvez utiliser l'approche géométrique intégrale. C'est deux fois le diamètre.

Références

Il existe une vaste littérature sur ce sujet, sous les titres de géométrie différentielle, géométrie riemannienne, convexité, mesure géométrique, géométrie intégrale, etc. En tant qu'étranger à tout cela, j'ai trouvé trois sources très utiles. L'une est la conversation avec Bill Lawvere ; en effet, mes propres investigations ont commencé lorsque lui et moi nous sommes demandés “en quel sens le bord d'un solide en est-il la dérivée ?”. (Je dois ajouter que Lawvere ne prétend pas être un expert dans les domaines énumérés, pas plus que moi). Les deux autres sources les plus utiles sont énumérées ci-dessous : l'article de Federer donne des preuves complètes de la plupart de ce que nous avons affirmé, pour le cas plutôt général des “ensembles de portée positive dans l'espace euclidien”, tandis que le livre de Hadwiger est un exposé élémentaire et tranquille des notions de base, en particulier pour les polyèdres.

Federer, H., Curvature Measures, Trans. Amer. Math. Soc. 93 (1959) p. 418-491.

Hadwiger, H., *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche, und Isoperimetrie*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1957.