

Une méthode pour le calcul de la fonction zeta

PAR A. M. TURING.

Une série asymptotique pour la fonction zeta a été trouvée par Riemann et a été publiée par Siegel¹, et appliquée par Titchmarsh² pour calculer les positions approximatives de quelques-uns des zéros de la fonction. Il est difficile d'obtenir des estimations satisfaisantes pour les restes avec les séries asymptotiques, comme on peut le voir dans le premier de ces deux articles de Titchmarsh, à moins que t ne soit très grand. Dans le présent article, une méthode sera décrite, qui, comme la formule asymptotique, est basée sur une approximation de l'équation fonctionnelle; elle est applicable pour toutes les valeurs de s . Il est vraisemblable qu'elle soit plus intéressante pour un domaine de t dans lequel t n'est ni trop petit de telle façon que la méthode de sommation d'Euler-Maclaurin puisse être utilisée (e.g. > 30) ni trop grand pour que la formule asymptotique de Riemann-Siegel puisse l'être (e.g. $t < 1000$).

Pour le dire grossièrement, la méthode consiste à utiliser l'approximation de l'équation fonctionnelle pour la fonction zeta, avec le reste exprimé comme une intégrale, que pour le moment nous écrivons comme $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx$. Nous approximations l'intégrale par la somme triviale $\sum_{k=-K}^K \frac{1}{\kappa} h\left(\frac{k}{\kappa}\right)$ et nous trouvons que, si certaines modifications sont faites dans la "série principale", cela donne un résultat remarquablement précis; quand le nombre de termes pris est $T = 2K + 1$, l'erreur est d'un ordre de grandeur de $e^{-\frac{1}{2}\pi T}$. Les fonctions theta fournissent un autre cas de ce phénomène. Nous avons l'identité

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2/x}$$

pour tout x positif. Par conséquent,

$$\left| \frac{1}{\kappa} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2/\kappa^2} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi v^2} dv \right| = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 \kappa^2} < \frac{2}{1 - e^{-2\pi}} e^{-\pi \kappa^2} \quad (\text{si } \kappa \geq 1),$$

$$\left| \frac{1}{\kappa} \sum_{n=-K}^K e^{-\pi n^2/\kappa^2} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi v^2} dv \right| < \frac{2}{1 - e^{-2\pi}} e^{-\pi \kappa^2} + \frac{\kappa e^{-\pi K^2/\kappa^2}}{\pi K},$$
$$< e^{-\pi K} \left(\frac{2}{1 - e^{-2\pi}} + \frac{1}{\pi} \right) \quad (\text{si } K = \kappa^2).$$

Comme nous l'avons prouvé ci-dessus, cette inégalité dépend entièrement de la forme spéciale de la fonction $e^{-\pi u^2}$. Mais nous pouvons aussi le prouver de cette manière. Nous intégrons la fonction $e^{-\pi u^2}/(1 - e^{-2\pi i u \kappa})$ autour du rectangle de sommets $\pm R \pm i\kappa$. À la limite $R \rightarrow \infty$, nous obtenons,

[Reçu le 7 Mars 1939. Lu le 16 Mars 1939]

dans *Proceedings of the London Mathematical Society. Second Series*, vol. 48, p. 180-197, 1943.

Traduction de l'anglais au français : Denise Vella-Chemla, mars 2021.

1. C. L. Siegel, "Über Riemanns Nachlass zur analytischen Zahlentheorie", *Quell. Gesch. Math.*, B, 2 (1931), p. 45-80.

2. E. C. Titchmarsh, "The zeros of the Riemann zeta-function", *Proc. Royal Soc. (A)*, 151 (1935), p. 234-255; également 157 (1936), p. 261-263.

par le théorème des résidus,

$$\left(\int_{-\infty-i\kappa}^{\infty-i\kappa} + \int_{\infty+i\kappa}^{-\infty+i\kappa} \right) \frac{e^{-\pi u^2}}{1 - e^{-2\pi i u \kappa}} du = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\kappa} e^{-\pi k^2 / \kappa^2},$$

i.e.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\kappa} e^{-\pi k^2 / \kappa^2} - \int_{-\infty-i\kappa}^{\infty-i\kappa} e^{-\pi u^2} du = \int_{-\infty-i\kappa}^{\infty-i\kappa} \frac{e^{-\pi u^2} e^{-2\pi i u \kappa}}{1 - e^{-2\pi i u \kappa}} du + \int_{\infty+i\kappa}^{-\infty+i\kappa} \frac{e^{-\pi u^2} e^{-2\pi i u \kappa}}{1 - e^{2\pi i u \kappa}} du$$

Le chemin d'intégration du côté gauche de l'équation peut être remplacé par l'axe réel, alors que le côté droit est inférieur en module à

$$\begin{aligned} & \frac{2}{1 - e^{-2\pi \kappa^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \exp[-\pi(u - i\kappa)^2 - 2\pi i(u - i\kappa)\kappa] \right| du \\ & \leq \frac{2}{1 - e^{-2\pi \kappa^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\pi u^2 - \pi \kappa^2) du \leq \frac{2e^{-\pi \kappa^2}}{1 - e^{-2\pi}} \quad (\text{si } \kappa \geq 1). \end{aligned}$$

Cet argument peut être utilisé dans des cas plus généraux, mais en bougeant le chemin d'intégration, nous pouvons rencontrer des singularités de l'intégrande, ce qui modifiera le résultat.

Nous basons notre calcul sur la représentation intégrale de la fonction zeta due à Riemann³.

1. Évaluation d'une intégrale définie.

Posons

$$G(u) = \int_{0 \nearrow 1} \frac{\exp(i\pi z^2 + 2\pi i u z) dz}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}},$$

où $0 \nearrow 1$ signifie que l'intégration s'effectue selon une droite de $-\epsilon\infty$ à $\epsilon\infty$ en coupant l'axe réel entre 0 et 1, et $\epsilon = e^{\frac{1}{2}\pi i}$. Nous dénotons une intégrale similaire sur $-1 \nearrow 0$ par $G_1(u)$. Alors, par un changement de variables, nous obtenons

$$G_1(u) = G(u - 1)e^{-2\pi i u},$$

et, par le théorème des résidus,

$$G(u) = G_1(u) + 1.$$

En multipliant l'identité

$$\frac{1}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} = e^{-i\pi z} + \frac{e^{-2\pi i z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}$$

par $\exp(i\pi z^2 + 2\pi i u z)$, et en intégrant sur $0 \nearrow 1$, on obtient

$$G(u) = \epsilon e^{-i\pi(u-\frac{1}{2})^2} + G(u - 1).$$

En combinant ces résultats, on a

$$G(u) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi i u}} - \frac{e^{-i\pi u^2}}{e^{i\pi u} - e^{-i\pi u}} \quad (1.1)$$

3. Siegel, *loc. cit.* 24.

2. Une représentation intégrale de la fonction zeta.

On intègre $z^{-s}/(1 - e^{-2\pi iz})$ autour d'une courbe L qui peut être prise comme étant constituée d'une ligne droite de $i\infty$ à $\frac{1}{2}$, d'un semi-cercle de $\frac{1}{2}$ à $-\frac{1}{2}$ qui se trouve dans le demi-plan inférieur et d'une ligne droite de $-\frac{1}{2}$ à $i\infty$. Nous définissons z^{-s} de telle façon qu'il ait sa valeur habituelle sur l'axe réel positif, et soit continu excepté sur l'axe imaginaire positif. L'intégrale autour d'une quelconque partie d'un cercle centré sur 0 tend vers 0 lorsque le rayon tend vers l'infini avec des valeurs appropriées, sous la condition que $\Re s > 1$, et ainsi dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} \int_L \frac{z^{-s} dz}{1 - e^{-2\pi iz}} &= 2\pi i \text{ (somme des résidus de } \frac{z^{-s}}{1 - e^{-2\pi iz}} \text{ aux entiers autres que 0)} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (m^{-s} + e^{i\pi s} m^{-s}) = \zeta(s)(1 + e^{i\pi s}). \end{aligned}$$

Cela donne le prolongement analytique de $\zeta(s)$ sur le plan entier excepté possiblement sur les entiers pairs. Maintenant, par (1.1),

$$\begin{aligned} \int_L u^{-s} \left(\frac{1}{1 - e^{-2\pi iu}} - \frac{e^{-i\pi u^2}}{e^{i\pi u} - e^{-i\pi u}} \right) du &= \int_L u^{-s} \left[\int_{0 \nearrow 1} \frac{\exp(i\pi z^2 + 2\pi iuz) dz}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \right] du \\ &= \int_{0 \nearrow 1} \frac{e^{i\pi z^2}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \left(\int_L u^{-s} e^{2\pi iuz} du \right) dz \\ &= -2(2\pi)^{s-1} \sin s\pi \Gamma(1-s) e^{\frac{1}{2}is\pi} \int_{0 \nearrow 1} \frac{e^{i\pi z^2} z^{s-1}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} dz, \end{aligned}$$

i.e.

$$\zeta(s)(1 + e^{i\pi s}) = \int_L \frac{e^{-i\pi u^2} u^{-s} du}{e^{i\pi u} - e^{-i\pi u}} - 2(2\pi)^{s-1} \sin s\pi \Gamma(1-s) e^{\frac{1}{2}is\pi} \int_{0 \nearrow 1} \frac{e^{i\pi z^2} z^{s-1} dz}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}.$$

Dans la première intégrale, on peut remplacer L par les deux lignes $0 \downarrow 1$ et $-1 \uparrow 0$, et on obtient

$$\begin{aligned} \int_L \frac{e^{-i\pi u^2} u^{-s} du}{e^{i\pi u} - e^{-i\pi u}} &= \int_{0 \downarrow 1} \frac{e^{-i\pi u^2} u^{-s} du}{e^{i\pi u} - e^{-i\pi u}} + \int_{-1 \uparrow 0} \frac{e^{-i\pi u^2} u^{-s} du}{e^{i\pi u} - e^{-i\pi u}} \\ &= \int_{0 \downarrow 1} \left(\frac{e^{-i\pi u^2} u^{-s}}{e^{i\pi u} - e^{-i\pi u}} - \frac{e^{i\pi u^2} u^{-s} e^{i\pi s}}{e^{-i\pi u} - e^{i\pi u}} \right) du. \end{aligned}$$

La courbe peut maintenant être remplacée par $0 \curvearrowright 1$ si on change le signe, et ainsi on obtient

$$- \int_{0 \curvearrowright 1} (1 + e^{i\pi s}) \frac{e^{-i\pi u^2} u^{-s} du}{e^{i\pi u} - e^{-i\pi u}}.$$

La fonction zeta s'exprime alors sous la forme

$$\zeta(s) = - \int_{0 \curvearrowright 1} \frac{e^{-i\pi u^2} u^{-s} du}{e^{i\pi u} - e^{-i\pi u}} - 2(2\pi)^{s-1} \sin \frac{1}{2}s\pi \Gamma(1-s) \int_{0 \nearrow 1} \frac{e^{i\pi z^2} z^{s-1} dz}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \quad (2.1)$$

et le calcul de $\zeta(s)$ se réduit à celui de l'intégrale

$$I(s) = \int_{0 \nearrow 1} \frac{e^{i\pi z^2} z^{-s} dz}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} = \int_{0 \nearrow 1} h(z) dz ; \quad (2.2)$$

pour

$$\overline{I(s)} = - \int_{0 \searrow 1} \frac{e^{-i\pi z^2} z^{-\bar{s}} dz}{e^{-i\pi z} - e^{i\pi z}}$$

Si on multiplie les deux côtés de (2.1) par $\Gamma(\frac{1}{2}s)\pi^{-\frac{1}{2}s}$, et si on utilise la relation

$$\Gamma(1-s) = \frac{2^{-s}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}s)}{\sin \frac{1}{2}s\pi\Gamma(\frac{1}{2}s)},$$

on obtient

$$\zeta(s)\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\pi^{-\frac{1}{2}s} = \Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\pi^{-\frac{1}{2}s}\overline{I(\bar{s})} - \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}s\right)\pi^{is-\frac{1}{2}}I(1-s), \quad (2.3)$$

et sur la droite critique, cela est égal à

$$-2\Re\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\pi^{-\frac{1}{2}s}I(\bar{s}). \quad (2.4)$$

Pour les points sur cette droite, il y a, ainsi, seulement une intégrale réelle à calculer. Pour les points à l'extérieur de cette droite, il y a quatre intégrales réelles.

3. La méthode de calcul.

Soit μ un nombre réel positif compris entre les entiers m et $m+1$. Alors

$$I(s) = \int_{0 \nearrow 1} h(z)dz = \int_{m \nearrow m+1} h(z)dz - \sum_{r=1}^m r^{-s}.$$

Maintenant, soit κ un nombre réel positif et posons

$$g(z) = \frac{h(z)}{1 - \exp[-2\pi\kappa\epsilon(z - \mu)]}.$$

La fonction g a des pôles simples aux points entiers autres que 0, et en les points $p_k = \mu + \epsilon k/\kappa$, où k est un entier ; sinon, elle est régulière, excepté sur l'axe imaginaire positif fermé. Le résidu sur un entier non nul r est

$$\frac{r^{-s}}{2\pi i\{1 - \exp[-2\pi\kappa\epsilon(r - \mu)]\}},$$

et sur p_k , il vaut

$$\frac{h(p_k)}{2\pi\kappa\epsilon}$$

La droite sur laquelle les pôles p_k se tiennent, prise de gauche à droite, sera appelé P .

Soient J et J' deux courbes allant du troisième quadrant au premier, et du premier au troisième respectivement, J étant entièrement sur la droite de P et J' entièrement sur sa gauche et sur la droite de l'origine. Supposons également qu'il y a un nombre réel positif a tel que, à une distance suffisamment grande de l'origine, les courbes se tiennent dans la région dans laquelle soit $a < \arg z < \frac{1}{2}\pi - a$, soit $\frac{1}{2}\pi - a > \arg z > -\pi + a$, et que la longueur de la courbe avec $|z| < R$ est $O(R)$. Alors on voit aisément que

$$\int_{J+J'} g(z)dz = 2\pi i \text{ (somme des résidus de } g \text{ entre } J \text{ et } J')$$

$$= \sum \frac{r^{-s}}{1 - \exp[-2\pi\kappa\epsilon(r - \mu)]} + \sum_k \frac{\epsilon}{\kappa} h(p_k),$$

où la première somme est calculée sur les entiers r se trouvant entre J et J' . Maintenant

$$\begin{aligned} \int_J g(z) dz &= \int_J (g(z) - h(z)) dz + \int_J h(z) dz \\ &= \int_J h(z) \frac{\exp[-2\pi\kappa\epsilon(z - \mu)]}{1 - \exp[-2\pi\kappa\epsilon(z - \mu)]} dz + \int_P h(z) dz, \end{aligned}$$

et

$$\int_{J'} g(z) dz = - \int_{J'} h(z) \frac{\exp[2\pi\kappa\epsilon(z - \mu)]}{1 - \exp[2\pi\kappa\epsilon(z - \mu)]} dz$$

Si les courbes J et J' sont toujours distantes de plus de $\frac{1}{4}\kappa^{-1}$ de la ligne P , alors on a pour eux

$$\left| \frac{1}{1 - \exp[2\pi\kappa\epsilon \operatorname{sg}(z)(z - \mu)]} \right| < 1.27,$$

où $\operatorname{sg}(z)$ prend la valeur 1 ou -1 selon que z est à gauche ou à droite de P . Nous pouvons maintenant rassembler nos résultats sous la forme

$$I(s) = \sum_k \frac{\epsilon}{\kappa} h(p_k) - \sum_{r=1}^{\infty} r^{-s} \theta_r + R_0,$$

où θ_r prend la valeur 1 si r est sur la gauche de J' , la valeur

$$\{1 - \exp[2\pi\kappa\epsilon(r - \mu)]\}^{-1}$$

si r est entre J et J' , et la valeur 0 sinon. Le résidu R_0 satisfait

$$|R_0| < \int_{J+J'} 1.27 \exp[-\sqrt{2\pi\kappa\mu} \operatorname{sg}(z)] \frac{|z|^{-\sigma}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} e^{\Re\phi(z)} |dz|, \quad (3.2)$$

où

$$\phi(z) = i\pi z^2 + 2\pi\kappa\epsilon z \operatorname{sg}(z) - it \log z. \quad (3.3)$$

Nous pouvons aussi écrire la formule pour $I(s)$ sous la forme

$$I(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon}{\kappa} \frac{e^{i\pi p_k^2} p_k^{-s}}{e^{i\pi p_k} - e^{-i\pi p_k}} - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r^{-s}}{1 - \exp[2\pi\kappa\epsilon(r - \mu)]} + R, \quad (3.4)$$

où $R = R_0 + R_1$, $p_k = \mu + \epsilon k/\kappa$ et

$$|R_1| < 1.27 \sum r^{-s} \exp[-\sqrt{2\pi\kappa}|r - \mu|],$$

la sommation s'effectuant sur les entiers positifs non entre J et J' . En exprimant $I(s)$ sous cette forme, nous pouvons éliminer des calculs numériques toute référence à la position des courbes J , J' , et le résidu n'est pas augmenté de façon appréciable. Dans le § 5, nous choisissons les courbes de telle façon que $R_1 = 0$. Bien sûr, dans le calcul, le facteur $\{1 - \exp[2\pi\kappa\epsilon(r - \mu)]\}^{-1}$ sera rendu égal à 1 ou à 0 excepté pour un nombre relativement petit de termes.

En estimant le reste, on suppose que $\sigma \geq 0$, mais cela n'est pas nécessaire.

4. Remarques générales sur l'estimation du reste.

Supposons que

$$U = \int_{C_0} e^{w(z)} k(z) dz.$$

Alors, pour toute courbe C déformable en C_0 dans le domaine de régularité de $e^{w(z)} k(z)$,

$$|U| \leq \int_C e^{\Re w(z)} |k(z)| dz. \quad (4.1)$$

Maintenant supposons que $\Re w(z)$ a de grandes et rapides variations, alors que $|k(z)|$ est comparativement stable. Alors la valeur de l'intégrale (4.1) est principalement affectée par la valeur maximum de $\Re w(z)$ sur C , et une bonne inégalité pour $|U|$ est obtenue en minimisant ce maximum. On voit aisément que s'il y a une courbe pour laquelle le maximum est minimisé, et si z_0 est le point auquel le maximum de la courbe est atteint, alors $w'(z_0) = 0$, i.e. z_0 est un "point de selle" de w . Supposons que dans le voisinage de ce point de selle la courbe est $z = z_0 + le^{ia}$, l étant un paramètre de longueur d'arc. Alors la contribution à l'intégrale du voisinage du point de selle est approximativement

$$e^{\Re w(z_0)} |k(z_0)| \int_{-\infty}^{\infty} \left| \exp \left[\frac{1}{2} w''(z_0) e^{2ia} l^2 \right] \right| dl = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}} |k(z_0)| e^{\Re w(z_0)}}{\sqrt{\{-\Re[w''(z_0) e^{2ia}]\}}}$$

Nous choisissons naturellement a comme valant $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2} \arg w''(z_0)$, et alors l'expression devient

$$\sqrt{\left\{ \frac{2\pi}{w''(z_0)} \right\}} |k(z_0) e^{w(z_0)}|.$$

Dans l'estimation de R_0 , nous pourrions prendre $w(z)$ comme étant soit égal à $\phi(z)$ soit à $\phi(z) \pm i\pi z$, dans ce dernier cas des signes différents étant pris sur les deux courbes J, J' . Avec la première de ces formes, l'analyse est plus simple, mais la seconde fournit un meilleur résultat ; nous ne traitons que la forme la plus simple.

Nous utilisons l'idée de l'intégration par point de selle dans la forme suivante. Supposons que nous ayons une courbe C avec un paramètre d'arc de longueur l commençant en $l = 0$. Alors

(a) si $\Re \psi'(z) \frac{dz}{dl} \leq -al$ sur la courbe, où $a > 0$, alors

$$e^{\Re \psi[z(l)]} \leq e^{-\frac{1}{2}al^2} e^{\Re \psi[z(0)]}$$

sur la courbe, et par conséquent

$$\int_C e^{\Re \psi[z(l)]} |dz| \leq \sqrt{\left(\frac{\pi}{2a} \right)} e^{\Re \psi[z(0)]}.$$

Ceci nous permet d'estimer la contribution à l'intégrale du voisinage du point de selle ; nous pouvons estimer la contribution du reste de la courbe par une ou plusieurs applications de

(b) si $\Re \psi'(z) \frac{dz}{dl} \leq -a < 0$ sur la courbe, alors $e^{\Re \psi[z(l)]} \leq e^{-al} e^{\Re \psi[z(0)]}$ et

$$\int_C e^{\Re \psi[z(l)]} |dz| \leq \frac{1}{a} e^{\Re \psi[z(0)]}.$$

5. Estimation détaillée du reste.

Pour les deux courbes J, J' , nous avons deux points de selle différents z_0, z'_0 , ceux-ci étant des zéros de $\phi'(z)$ des deux côtés de la ligne P . Nous pouvons poser

$$\phi'(z) = 2\pi iz + 2\pi\kappa\epsilon - it/z = \frac{2\pi i}{z}(z - z_0)(z - z_1)$$

sur la gauche de P , et

$$\phi'(z) = 2\pi iz + 2\pi\kappa\epsilon - it/z = \frac{2\pi i}{z}(z - z'_0)(z - z'_1)$$

sur la droite de P ; les points z_0, z'_0 sont dans le demi-plan droit et z_1, z'_1 dans le gauche. Si l'on pose de plus $\tau = t/2\pi$, $\rho = \kappa\tau^{-\frac{1}{2}}$, $\zeta = z\tau^{-\frac{1}{2}}$, on peut écrire ces équations ainsi

$$(\zeta - \zeta_0)(\zeta - \zeta_1) = \zeta^2 + \bar{\epsilon}\rho\zeta - 1, \quad (\zeta - \zeta'_0)(\zeta - \zeta'_1) = \zeta^2 - \bar{\epsilon}\rho\zeta - 1.$$

Les racines satisfont

$$\zeta_0 + \zeta'_1 = 0, \quad \zeta_1 + \zeta'_0 = 0, \quad \arg \zeta_0 + \arg \zeta'_0 = 0, \quad \frac{1}{4}\pi > \arg \zeta'_0 > 0.$$

Il y a une courbe cubique indépendante de ρ sur laquelle se trouvent quatre racines. Nous aurons besoin d'un certain nombre d'autres propriétés des racines, et nous les mentionnerons lorsque nous le nécessiterons; ce sont principalement des inégalités qui peuvent être prouvées par des méthodes évidentes mais fastidieuses.

Le comportement d'un certain nombre de fonctions de ρ est montré dans la Fig. 1.

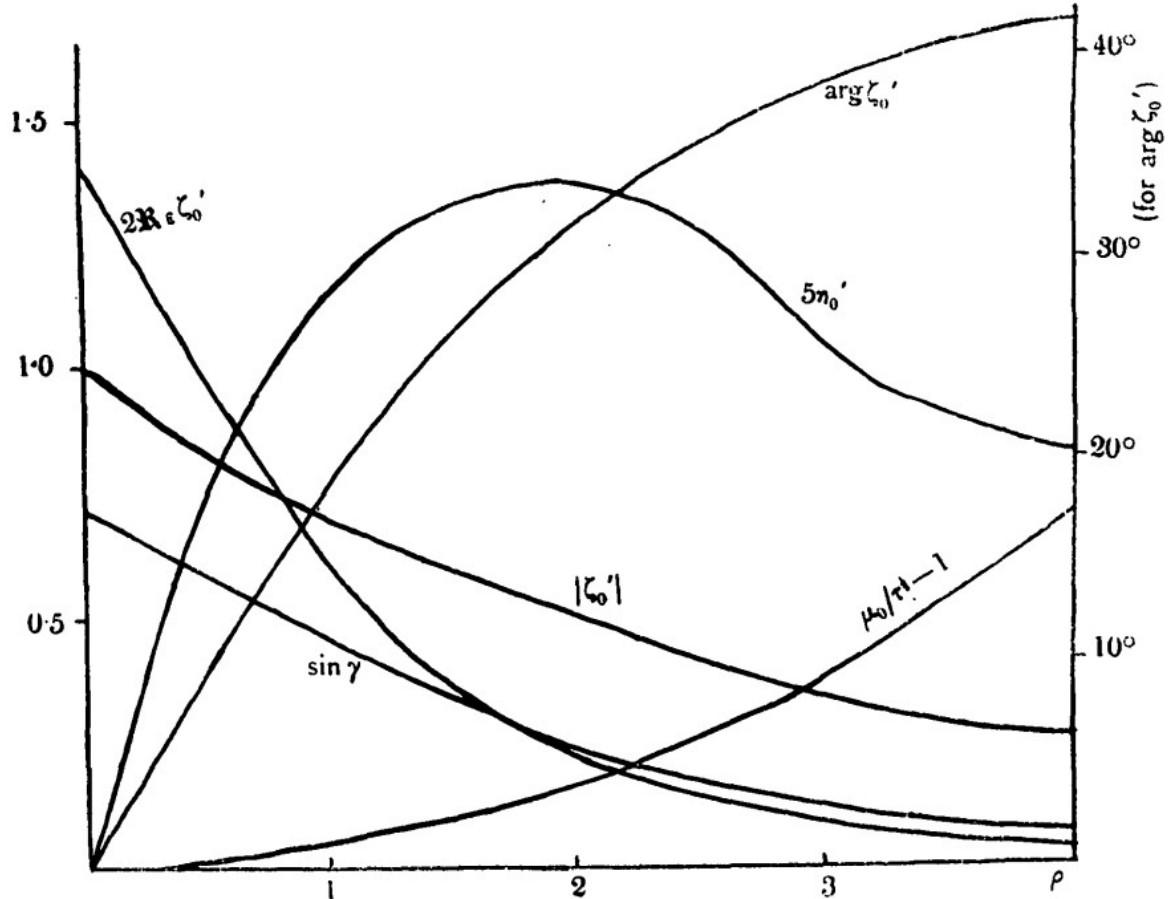


FIG. 1

Nous choisissons les courbes d'intégration J, J' comme suit. J est constitué de trois parties droites J_1, J_2, J_3 , avec J_1 une ligne droite de $-\epsilon\infty$ via z_0 vers b , où $b = z_0 - \frac{1}{2}y_0(1+i)$; J_2 relie b et $b + \beta$, où β est réel et positif; et J_3 relie $b + \beta$ et $\epsilon\infty$, en passant à travers un nombre moitié d'un entier impair. Lorsque β tend vers l'infini, la contribution au reste de J_3 tend vers 0 et la contribution de J_2 tend vers une limite. Nous pouvons de ce fait omettre J_3 et supposer que J est constitué seulement de J_1 et J_2 , pris comme se prolongeant à l'infini; il n'y a alors aucun pôle sur la droite de J qui puisse contribuer à R_1 .

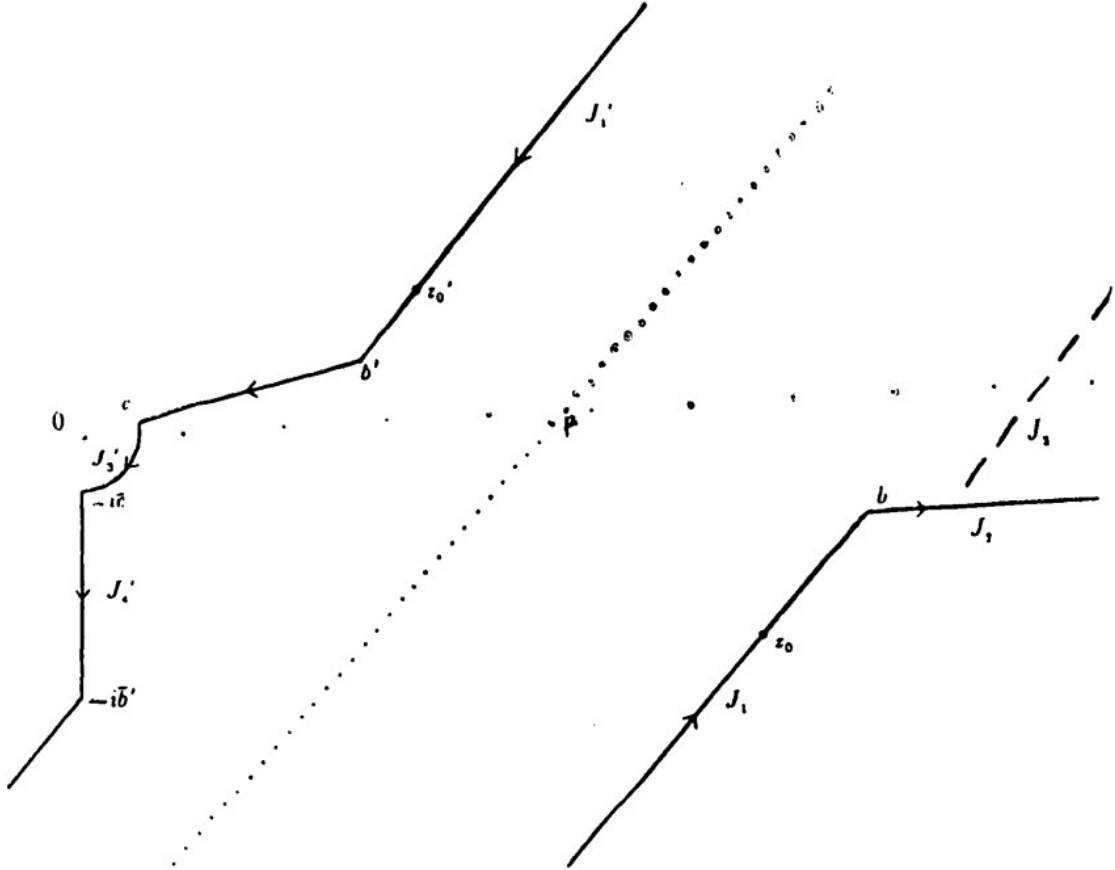


FIG. 2

La courbe J' est constituée des quatre parties J'_1, J'_2, J'_3, J'_4 , et on divise à nouveau J'_2 en J'_5 et J'_6 . Posons $b' = z'_0 - \frac{1}{2}y'_0(1+i)$. Alors J'_1 est une ligne droite de $\epsilon\infty$ à b' via z'_0 ; J'_2 est une ligne droite de b' à c , où c/b' est réel, $0 < c/b' < 1$, et $|c| = \min(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}|z'_0|)$. La courbe J'_3 est une portion de cercle se trouvant dans le demi-plan $\Re\epsilon z > 0$ et reliant c à $-i\bar{c}$. Nous obtenons J'_4 comme symétrique de J'_1 et J'_2 selon la droite $\Im\epsilon z = 0$ et en inversant la direction. Nous divisons J'_2 en J'_5 et J'_6 , avec J'_5 qui est une partie sur laquelle $y > \frac{1}{3}y'_0$. Ces deux parties sont de longueur positive, J'_5 étant au moins de longueur $\frac{1}{6}|z'_0|$.

Sur J_1 et J_2 , nous avons $|z| > \tau^{\frac{1}{2}}\Re\epsilon\zeta$ et

$$\left| \frac{1}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \right| \leq \frac{1}{2} \operatorname{cosech} \left| \frac{1}{2}\pi y_0 \right|.$$

La contribution à R_0 provenant de J est ainsi au plus

$$\frac{1}{2}(1.27)\tau^{-\frac{1}{2}\sigma}(\Re\epsilon\zeta_0)^{-\sigma} \exp[\sqrt{2\pi\kappa\mu}] \operatorname{cosech} \left| \frac{1}{2}\pi y_0 \right| \int_J e^{\Re\phi(z)} |dz|. \quad (5.1)$$

Sur J_1 , on a $0 > \arg(z - z_1)/z > -\cos^{-1} \frac{1}{3}$, une simple conséquence du fait que la distance à J_1 à partir de 0 est plus grande que $2^{-\frac{1}{2}}|z_1|$ et que $\arg z_1 < -\frac{3}{4}\pi$. Aussi

$$|2\pi(z - z_1)(z - z_0)/z| > \pi|z - z_0|,$$

de telle façon que

$$\Re \frac{2\pi i(z - z_1)(z - z_0)}{z} \frac{dz}{dl} < -\frac{1}{3}\pi l = -\frac{1}{3}\pi|z - z_0|,$$

si l décroît toujours lorsqu'on approche de z_0 . Alors, en appliquant (a) du § 4, on a

$$\int_{J_1} e^{\Re\phi(z)} |dz| < \sqrt{6}e^{\Re\phi(z_0)}. \quad (5.2)$$

Également

$$\Re\phi(b) < \Re\phi(z_0) - \frac{1}{6}\pi y_0^2. \quad (5.3)$$

Sur J_2 , $dz/dl = 1$ et

$$\Re\phi'(z) = \Re \left(2\pi iz - 2\pi\kappa\epsilon - \frac{2\pi i\tau}{z} \right) = -\pi y_0 - \sqrt{2\pi\kappa} - \frac{\pi\tau y_0}{x^2 + \frac{1}{4}y_0^2}.$$

Mais $\tau < x_0^2$, puisque $\xi_0 > 1$ pour tout ρ , et par conséquent

$$\Re\phi'(z) \frac{dz}{dl} < \pi(-\sqrt{2\kappa} - 2y_0) = -2\pi y_0'. \quad (5.4)$$

Il s'ensuit que, par (b) du § 4, (5.3) et (5.4),

$$\int_{J_2} e^{\Re\phi(z)} |dz| < \frac{e^{\Re\phi(z)}}{2\pi y_0'} < \frac{\exp[\Re\phi(z_0) - \frac{1}{6}\pi y_0^2]}{2\pi y_0'}. \quad (5.5)$$

Maintenant étudions J' . Si z est un point de $J'_1 + J'_2$, alors $-i\bar{z}$ est le point correspondant de J'_4 , et

$$\begin{aligned} \Re\phi(-i\bar{z}) &= \Re[i\pi(-i\bar{z})^2 + 2\kappa\epsilon(-i\bar{z}) - it \log z - it \log(-i\bar{z}/z)] \\ &\leq \Re[-i\pi(iz)^2 + 2\kappa\bar{\epsilon}iz - it \log z - \frac{1}{2}t\pi], \end{aligned}$$

i.e.

$$\Re\phi(-i\bar{z}) \leq \Re\phi(z) - \frac{1}{2}t\pi.$$

Aussi $|-i\bar{z}| = |z|$ et

$$|\operatorname{cosec}(-i\pi z)| < |\operatorname{cosec} \pi z|,$$

comme cela peut être démontré en utilisant la représentation par produit de la fonction sinus, en se rappelant que $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$. Par conséquent,

$$\int_{J'} \frac{|z|^{-\sigma}}{|e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}|} e^{\Re\phi(z)} |dz| < (1 + e^{\frac{1}{2}i\pi}) \int_{J'_1+J'_2+J'_3} \frac{|z|^{-\sigma}}{|e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}|} e^{\Re\phi(z)} |dz|. \quad (5.6)$$

Sur J'_1 , on a $0 > \arg(z - z'_1)/z > \gamma - \frac{1}{2}\pi$, où $\gamma = \frac{1}{4}\pi - \arg \zeta'_0$, et

$$|2\pi(z - z'_1)(z - z'_0)/z| > 2\pi|z - z'_0|.$$

Par conséquent

$$\Re\phi'(z)\frac{dz}{dl} < -2\pi \sin \gamma$$

sur J'_1 , si l décroît lorsqu'on approche de z'_0 de n'importe quel côté. En appliquant (a) du § 4, on a

$$\int_{J'_1} e^{\Re\phi(z)} |dz| < \frac{e^{\Re\phi(z'_0)}}{(\sin \gamma)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.7)$$

et

$$\Re\phi(b) < \Re\phi(z'_0) - \frac{1}{2}\pi y_0'^2 \sin \gamma. \quad (5.8)$$

Sur J'_2

$$\begin{aligned} \Re\phi'(z)\frac{dz}{dl} &= \Re \frac{-2\pi iz}{|z|} \left(z + \bar{\epsilon}\kappa - \frac{\tau}{z} \right) \\ &\leq \Re \frac{-2\pi ib'}{|b'|} \left(b' + \bar{\epsilon}\kappa - \frac{\tau}{b'} \right) \\ &= \Re \frac{-2\pi i}{|b'|} (b' - z'_0)(b' - z'_1). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Mais $\arg(z'_0 - b') = \frac{1}{4}\pi$ et

$$0 > \arg(b' - z'_1) > \arg(-z'_1) = \gamma - \frac{1}{4}\pi,$$

de telle façon que

$$\frac{1}{2}\pi + \gamma < \arg \frac{-2\pi i}{|b'|} (b' - z'_0)(b' - z'_1) < \frac{3}{4}\pi.$$

Également

$$\left| -2\pi i (b' - z'_0)(b' - z'_1) / |b'| \right| > \sqrt{2\pi y'_0},$$

de telle façon que

$$\Re \frac{-2\pi i}{|b'|} (b' - z'_0)(b' - z'_1) < -\sqrt{2\pi y'_0} \sin \gamma, \quad (5.10)$$

et en appliquant (b) du § 4, et en utilisant (5.9), (5.10) et (5.8), on obtient

$$\int_{J'_3} e^{\Re\phi(z)} |dz| < (\sqrt{2\pi y'_0} \sin \gamma)^{-1} \exp \left[\Re\phi(z'_0) - \frac{1}{2}\pi y_0'^2 \sin \gamma \right]. \quad (5.11)$$

Aussi

$$\Re\phi\left(\frac{2}{3}b'\right) < \Re\phi(z'_0) - \frac{1}{2}\pi y_0'^2 \sin \gamma - \frac{1}{6}\sqrt{2\pi y'_0} |z'_0| \sin \gamma. \quad (5.12)$$

Sur J'_3

$$\left| \arg \left\{ \frac{-2\pi i}{z} (z - z'_0)(z - z'_1) \frac{dz}{dl} \right\} \right| < 2 \sin^{-1} \frac{1}{3} < \frac{1}{4}\pi < \frac{1}{2}\pi - \gamma;$$

de telle façon qu'à la fois sur J'_6 et J'_3

$$\Re \frac{2\pi i}{z} (z - z'_0)(z - z'_1) \frac{dz}{dl} < -\sqrt{2\pi y'_0} \sin \gamma.$$

Cela donne, en utilisant également (5.12),

$$\int_{J'_2+J'_3} e^{\Re \phi(z)} |dz| < (\sqrt{2\pi y'_0} \sin \gamma)^{-1} \exp [\Re \phi(z'_0) - \frac{1}{2} \pi y'_0{}^2 \sin \gamma - \frac{1}{6} \sqrt{2\pi y'_0} |z'_0| \sin \gamma]. \quad (5.13)$$

Sur J'_1 , on a

$$\left| \frac{z^{-\sigma}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \right| < \frac{1}{2} \tau^{-\frac{1}{2}\sigma} \left| \frac{1}{2} \zeta'_0 \right|^{-\sigma} \operatorname{cosech} \left| \frac{1}{2} \pi y'_0 \right|; \quad (5.15)$$

sur J'_5

$$\left| \frac{z^{-\sigma}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \right| < \frac{1}{3} \tau^{-\frac{1}{2}\sigma} \left| \frac{1}{3} \zeta'_0 \right|^{-\sigma} \operatorname{cosech} \left| \frac{1}{2} \pi y'_0 \right|; \quad (5.16)$$

et sur J'_6, J'_3

$$\left| \frac{z^{-\sigma}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \right| < \frac{1}{2\pi} \left[\min \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \tau^{\frac{1}{2}} |\zeta'_0| \right) \right]^{-\sigma-1} \operatorname{cosech} \arg \zeta'_0; \quad (5.17)$$

Nous pouvons maintenant rassembler nos résultats pour donner une inégalité pour $|R|$. On utilise (5.1), (5.2), (6.6), (5.6), (5.7), (6.11), (5.18), (5.15), (5.16) et (5.17), et nous rendons les exposants $\Re \phi(z_0) + \sqrt{2\pi \kappa \mu}$ et $\Re \phi(z'_0) - \sqrt{2\pi \kappa \mu}$ plus explicites en utilisant la relation $z_0^2 = \bar{\epsilon} \kappa z_0 + \tau$:

$$\begin{aligned} |R| = |R_0| &< 0.635 (\Re \epsilon \zeta_0)^{-\sigma} \tau^{-\frac{1}{2}\sigma} \operatorname{cosech} \left| \frac{1}{2} \pi y_0 \right| \left\{ 2.45 + \frac{0.160}{y'_0} e^{-\frac{1}{2} \pi y_0^2} \right\} \\ &\times \exp [-\pi \kappa \Re \epsilon (z_0 - 2\mu) + 2\pi \tau \arg \zeta_0] + 0.635 (1 + e^{-\frac{1}{2} \pi i}) \tau^{-\frac{1}{2}\sigma} |\zeta'_0|^{-\sigma} \\ &\times \left\{ (\sin \gamma)^{-\frac{1}{2}} 2^\sigma \operatorname{cosech} \left| \frac{1}{2} \pi y'_0 \right| + (\sqrt{2\pi y'_0} \sin \gamma)^{-1} \exp \left[-\frac{1}{2} \pi y_0^2 \sin \gamma \right] \right. \\ &\times \left[3^\sigma \operatorname{cosech} \left| \frac{1}{3} \pi y'_0 \right| + \frac{1}{\pi} |\zeta'_0|^\sigma \tau^{\frac{1}{2}\sigma} \left[\min \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \tau^{\frac{1}{2}} |\zeta'_0| \right) \right]^{-\sigma-1} \operatorname{cosec} \arg \zeta'_0 \right. \\ &\left. \left. \times \exp \left[-\frac{1}{6} \sqrt{2\pi y'_0} |z'_0| \sin \gamma \right] \right\} \exp [-\pi \kappa \Re \epsilon (2\mu - z'_0) + 2\pi \tau \arg \zeta'_0]. \quad (5.18) \end{aligned}$$

À ce point, il peut être aussi bien de répéter les définitions des quantités variables apparaissant sur le côté droit de cette inégalité, en fonction de s, κ :

$$\sigma = \Re s, \quad t = \Im s, \quad \tau = t/2\pi, \quad \rho = \kappa \tau^{-\frac{1}{2}}, \quad \epsilon = e^{\frac{1}{2} i\pi}.$$

Les nombres complexes $\zeta'_0, \zeta'_1, \zeta_1, \zeta_0$ sont les racines de l'équation

$$(\zeta^2 - 1)^2 = -i\rho^2 \zeta^2$$

se trouvant respectivement dans les premier, second, troisième et quatrième quadrants, et

$$\zeta = \xi + i\eta, \quad z = x + iy = \tau^{\frac{1}{2}}\zeta, \quad \gamma = \frac{1}{4}\pi - \arg \zeta',$$

où ξ, η, x, y sont réels.

L'estimation (5.18) pour R est assez compliquée. Elle peut être considérablement simplifiée quand d n'est pas trop grand. Je fournis une estimation dans le cas $\rho \leq \frac{1}{2}$; on a alors

$$\begin{cases} \sqrt{2}\Re \epsilon \zeta'_0 > 1, & \Re \epsilon(1 - \zeta'_0) > 0.45\rho, \\ -\eta_0 > \rho/2\sqrt{2}, & \sin \gamma > 0.55, \\ \eta'_0 > 0.29\rho, & |\zeta'_0| > 0.81. \end{cases} \quad (5.19)$$

Le résultat est que, pour $\rho \leq \frac{1}{2}, t \geq 25$,

$$\begin{aligned} |R| = |R_0| &< r^{-\frac{1}{2}\sigma} \left[0.76 \cdot 2^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sigma} \operatorname{cosech} 0.78(\kappa/\sqrt{2}) \right. \\ &\times \{2.45 + 0.40(\kappa/\sqrt{2})^{-1} \exp(-0.13(\kappa/\sqrt{2})^2)\} e^{-A} + 0.71(0.81)^{\frac{1}{2} - \sigma} \\ &\times \left[1.91 \cdot 2^{\sigma - \frac{1}{2}} \operatorname{cosech} 0.64(\kappa/\sqrt{2}) + 1.00(\kappa/\sqrt{2})^{-1} \exp(-0.14(\kappa/\sqrt{2})^2) \right. \\ &\times \left. \left. \left\{ 1.74 \cdot 3^{\sigma - \frac{1}{2}} \operatorname{cosech} 0.42(\kappa/\sqrt{2}) + 1.7(1.62)^{\sigma - \frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}} \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. \times (\kappa/\sqrt{2}) \exp\left(-0.13\tau^{\frac{1}{2}}(\kappa/\sqrt{2})\right) \right\} \right] e^{-B} \right], \end{aligned} \quad (5.20)$$

où

$$A = \pi\kappa\Re \epsilon(z_0 - 2\mu) + 2\pi\tau \arg \zeta'_0, \quad B = \pi\kappa\Re \epsilon(2\mu - z'_0) - 2\pi\tau \arg \zeta'_0.$$

Dans le cas $\rho \geq \frac{1}{2}$, l'estimation du reste à partir de (5.18) peut être rendue plus facile en utilisant les inégalités suivantes, qui sont valides pour tout ρ positif :

$$\Re \epsilon \zeta'_0 > \frac{1}{\rho^3 + \rho^2 + \rho + \sqrt{2}}, \quad \eta'_0 > \frac{0.65\rho}{\rho^2 + 2}, \quad \sin \gamma > \frac{1}{\rho^2 + \frac{1}{2}\rho + \sqrt{2}}. \quad (5.21)$$

6. Choix des paramètres. Le reste avec une série finie.

Le reste R comme donné par (5.18) est la somme de deux termes dans lesquels les principaux facteurs sont e^{-A} et e^{-B} . Le choix le plus favorable du paramètre μ est probablement approximativement ce qui rendra ces deux facteurs égaux. En appelant cette valeur μ_0 , nous avons

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\Re \epsilon(z'_0 + z_0) + \frac{4\tau^{\frac{1}{2}}}{\rho} \arg \zeta'_0 \right] \\ &= \frac{\tau^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \left[\Re \sqrt{\left(i + \frac{1}{4}\rho^2\right)} + \frac{2}{\rho} \arg \zeta'_0 \right] \end{aligned}$$

Lorsque ρ tend vers l'infini, $\mu_0 \sim \kappa/2\sqrt{2}$; et, lorsque ρ tend vers 0, $\mu_0 \sim \tau^{\frac{1}{2}}$. Aussi

$$\begin{aligned}\Re \epsilon(\mu_0 - z'_0) &= \frac{1}{4} \left[\Re \epsilon(z_0 - 3z'_0) + \frac{4\tau^{\frac{1}{2}}}{\rho} \arg \zeta'_0 \right] \\ &= \frac{1}{2} \kappa \left[1 - \Re \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{i}{\rho^2}\right)} + \frac{2}{\rho^2} \arg \zeta'_0 \right].\end{aligned}$$

Lorsque ρ tend vers 0, le facteur

$$1 - \Re \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{i}{\rho^2}\right)} + \frac{2}{\rho^2} \arg \zeta'_0$$

tend vers 1; et lorsque ρ tend vers l'infini, ce facteur tend vers $\frac{1}{2}$. Pour toutes les valeurs positives de ρ , il est plus grand que $\frac{1}{2}$, et par conséquent

$$\Re \epsilon(\mu_0 - z'_0) > \frac{1}{4} \kappa.$$

Aussi

$$\begin{aligned}\Re \epsilon(z_0 - \mu_0) &= \frac{1}{4} \left[\Re \epsilon(3z_0 - z'_0) + \frac{4\tau^{\frac{1}{2}}}{\rho} \arg \zeta'_0 \right] \\ &= \frac{1}{2} \kappa \left[1 - \Re \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{i}{\rho^2}\right)} - \frac{2}{\rho^2} \arg \zeta'_0 \right].\end{aligned}$$

et on a

$$\Re \epsilon(z_0 - \mu_0) > \frac{1}{2} \kappa.$$

Si, pour μ , nous choisissons $\mu_0 \pm \delta$, où $\delta > 0$, alors le plus grand des facteurs exponentiels e^{-A} , e^{-B} est

$$\exp \left[-\frac{1}{2} \pi \kappa^2 + \sqrt{2} \pi \kappa \delta \right].$$

Les valeurs de μ que nous pouvons choisir sont restreintes seulement par la condition que les courbes J, J' doivent être distantes au moins de la quantité $1/(4\kappa)$ de P . Si $\kappa \geq \sqrt{2}$, nous pouvons alors choisir μ dans l'intervalle $(\mu_0, \mu_0 + \frac{1}{2})$; et, si $\kappa \geq 2$, nous pouvons le choisir dans l'intervalle $(\mu_0 - \frac{1}{2}, \mu_0 + \frac{1}{2})$. Pourtant, pour de si petites valeurs de κ , ce sera probablement un meilleur choix que de choisir μ plutôt proche de μ_0 . Nous n'avons pas à considérer le cas de valeurs de κ plus petites que $\sqrt{2}$, puisque, comme cela apparaîtra, ce n'est pas désavantageux de prendre de telles petites valeurs, même quand il n'y a qu'un terme pris dans la série $\sum h(p_k)$.

Quand ρ est petit, μ_0 est proche de $\tau^{\frac{1}{2}}$, et il est alors probablement plus simple de choisir une valeur de μ qui est proche de $\tau^{\frac{1}{2}}$ sans vraiment calculer μ_0 . L'inégalité

$$0 < \mu_0/\tau^{\frac{1}{2}} - 1 < \rho^2/3 \quad (0 < \rho < 1)$$

devrait alors être de qualité.

Pour des grandes valeurs de κ (e.g. $\kappa > 3$), nous ferions bien de prendre μ soit entier soit demi entier impair. Dans le cas où μ est un entier, la fonction g a un double pôle en μ ; à la place des termes

$$\frac{\epsilon}{\kappa}h(\mu) - \frac{r^{-s}}{1 - \exp [2\pi\kappa\epsilon(\mu - \mu)]}$$

nous devons alors mettre le reste en 0 de

$$\frac{2\pi i(-)^\mu(z + \mu)^{-s} \exp [i\pi(z + \mu)^2 - i\pi z]}{(1 - e^{-2\pi iz})(1 - \rho^{-2\pi\kappa\epsilon z})}$$

et cela est égal à

$$\mu^{-s} \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{\sigma}{2\pi\kappa\epsilon\mu} - \frac{\epsilon}{\kappa} \left(\mu - \frac{t}{2\pi\mu} \right) \right\}.$$

Dans les applications pratiques, bien sûr, nous ne prenons qu'un nombre fini de termes de la série $\sum(\epsilon/\kappa)h(p_k)$. Nous voulons alors une estimation de l'erreur provenant de ce choix. Si nous décidons la plus grande erreur totale η que nous puissions admettre dans notre résultat, nous pouvons procéder de cette manière. On choisit κ de telle façon que $|R| < \frac{1}{2}\eta$ et nous prenons alors suffisamment de termes de la série pour que l'erreur provenant de cette seconde source n'excède pas $\frac{1}{2}\eta$. Maintenant estimons le second reste. Dans ce but, nous prouvons le lemme suivant :

LEMME. *La fonction $|e^{i\pi z^2} z^{-it}|$ a seulement un maximum sur la ligne P .*

Posons $z = \mu(1 + \theta(1 + i)big)$, $a = t/(2\pi\mu^2)$; alors θ est réel et

$$\log |e^{i\pi z^2} z^{-it}| = \Re \left[i\pi(1 + \theta(1 + i))^2 - 2\pi ia \log \left\{ \mu(1 + \theta(1 + i)) \right\} \right] \mu^2$$

Abrégeons le côté droit par $H(\theta)$. Alors

$$H'(\theta) = 2\pi\mu^2 \left(-1 - 2\theta + \frac{a}{(1 + \theta)^2 + \theta^2} \right) = -2\pi\mu^2 \frac{((1 + \theta)^2 + \theta^2)(1 + 2\theta) - a}{(1 + \theta)^2 + \theta^2}.$$

Maintenant

$$\frac{d}{d\theta} \left[((1 + \theta)^2 + \theta^2)(1 + 2\theta) - a \right] = 3(2\theta + 1)^2 + 1 > 0,$$

et par conséquent $((1 + \theta)^2 + \theta^2)(1 + 2\theta) - a$ ne peut s'évanouir pour plus d'une valeur de θ ; cela s'évanouit clairement pour au moins une valeur. Alors $H(\theta)$ a juste une valeur stationnaire, qui est clairement vue comme étant un maximum. Cela complète la preuve du lemme. Si $a < 1$, la valeur θ fournissant le maximum satisfait $0 > \theta > a^{\frac{1}{2}} - 1$.

Posons $u_k = \kappa^{-1}|h(p_k)|$; alors, si $\sigma \geq 0$,

$$\sum_{k=K+1}^{\infty} u_{-k} < \frac{(\mu/\sqrt{2})^{-\sigma}}{1 - \exp [\sqrt{2}\pi(K + 1)/\kappa]} \sum_{k=K+1}^{\infty} \left(-\frac{\pi k}{\sqrt{2}\kappa} \right) \left| e^{i\pi p_{-k}^2} p_{-k}^{-it} \right|.$$

Si nous supposons que $\mathfrak{J}(p_{-K-1})$ est inférieur à la valeur de y pour laquelle le maximum de $|e^{i\pi z^2} z^{-it}|$ est atteint, et si $k \geq K + 1$, alors

$$|e^{i\pi p_{-k}^2} p_{-k}^{-it}| \leq |e^{i\pi p_{-K-1}^2} p_{-K-1}^{-it}|$$

et, par conséquent

$$\begin{aligned} \sum_{K+1}^{\infty} u_{-k} &< \left(\frac{\mu}{\sqrt{2}}\right)^{-\sigma} \frac{\exp[-\pi(K+1)/\kappa\sqrt{2} + \Re(i\pi p_{-K-1}^2)] |p_{-K-1}^{-it}|}{(1 - \exp[-\sqrt{2}\pi(K+1)/\kappa])(1 - \exp[-\pi/\kappa\sqrt{2}])} \\ &< \frac{2^{\frac{1}{2}\sigma} u_{-K-1}}{(1 - \exp[-\sqrt{2}\pi(K+1)/\kappa])^2 (1 - \exp[-\pi/\kappa\sqrt{2}])} \end{aligned}$$

De façon similaire, si (ce qui est toujours le cas si $K' \geq 0$ et $a \leq 1$) $\mathfrak{J}(p_{K'+1})$ est plus grand que la valeur de y pour laquelle le maximum advient,

$$\sum_{K'+1}^{\infty} u_k < \frac{u_{K'+1}}{(1 - \exp[-\sqrt{2}\pi(K'+1)/\kappa])^2 (1 - \exp[-\pi/\kappa\sqrt{2}])}$$

de telle façon que

$$\begin{aligned} |R^*| &= \left| \left(\sum_{-\infty}^{\infty} - \sum_{-K}^{K'} \right) \frac{\epsilon}{\kappa} h(p_k) \right| \\ &< \frac{2^{\frac{1}{2}\sigma} |h(p_{-K-1})| + |h(p_{K'+1})|}{\kappa (1 - \exp[-\sqrt{2}\pi(K^*+1)/\kappa])^2 (1 - \exp[-\pi/\kappa\sqrt{2}])} \end{aligned}$$

où $K^* = \min(K, K')$.

Dans le cas où κ est petit comparé à $\tau^{\frac{1}{2}}$, nous pouvons facilement obtenir une estimation grossière du nombre de termes requis pour une précision donnée. Car dans ce cas K, K' sont tels que $p_{-K}/\mu - 1$ et $p_{K'}/\mu - 1$ sont petits et u_K est approximativement égal à $\exp[-2\pi(K+1)^2/\kappa^2]$. Si les restes R et R^* sont du même ordre de grandeur, alors on a approximativement $2\pi(K+1)^2/\kappa^2 = \frac{1}{2}\pi\kappa^2$, i.e., $K+1 = \frac{1}{2}\kappa^2$. Le nombre de termes T que nous prenons est $2K+1$, i.e., approximativement κ^2 , et l'erreur totale est de l'ordre de grandeur de $e^{-\frac{1}{2}\pi T}$. Si cette assertion doit être mise sous une forme exacte, nous pouvons dire que si μ et κ sont convenablement choisis comme des fonctions de t, η , et σ et sont dans l'intervalle $0 \leq \sigma \leq 1$, et si η tend vers 0 et si t tend vers l'infini de telle façon que $\kappa^{-1}, \kappa\tau^{-\frac{1}{2}}$ tende aussi vers 0, alors l'erreur n'excèdera pas η et $T^{-1} \log \eta^{-1}$ tendra vers $\frac{1}{2}\pi$; cela n'est pas vérifié pour n'importe quel nombre supérieur à $\frac{1}{2}\pi$.

Quand $\kappa\tau^{-\frac{1}{2}}$ est de l'ordre de grandeur de 1, nous ne pouvons obtenir une estimation si simple du nombre de termes nécessité, mais nous pouvons obtenir une estimation dans le cas limite $\kappa\tau^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \infty$. Nous pouvons alors négliger tous les facteurs en u_h , excepté $|e^{i\pi p_k^2}|$. En posant $\mu + \epsilon v = p_{-K}$, nous avons approximativement

$$\left| e^{i\pi(\mu+\epsilon v)^2} \right| = e^{-\frac{1}{2}\pi\kappa^2}$$

si R et R^* sont du même ordre de grandeur; i.e.,

$$\sqrt{2\pi\mu v} + \pi v^2 = \frac{1}{2}\pi\kappa^2.$$

Mais pour de grandes valeurs de μ , nous avons approximativement $\mu = \kappa/2\sqrt{2}$, et par conséquent approximativement

$$2v^2 + \kappa v - \kappa^2 = 0.$$

Les deux racines de cette équation sont $\bar{\epsilon}(P_{-K} - \mu)$ et $\bar{\epsilon}(P_{K'} - \mu)$ (approximativement); la différence entre les racines est $\frac{3}{2}\kappa$ et par conséquent $T = \frac{3}{2}\kappa^2$ approximativement, et l'erreur est de l'ordre de grandeur de $e^{-\frac{1}{2}\pi T}$.

Il est possible que cela soit amélioré en prenant μ différent de μ_0 ; car si nous prenons μ plus proche de $\tau^{\frac{1}{2}}$ le reste R^* est rendu plus petit pour toute valeur donnée de T . Une telle amélioration serait nécessairement obtenue aux dépens du reste R ; je ne pense pas qu'une amélioration appréciable puisse réellement être obtenue dans cette direction.

Dans le cas où $T = 3$, nous pouvons poser $\kappa = 1.6\sqrt{2}$, et alors, si $\sigma = \frac{1}{2}$, $\mu = \tau^{\frac{1}{2}}$ et $t > 350$, et si le facteur $(1 - \exp [2\pi\kappa\epsilon(r - \mu)])^{-1}$ est remplacé par 0 ou 1 sauf pour deux termes de la série principale, l'erreur de toutes les sources n'excède pas $0.0044\tau^{-\frac{1}{2}}$.

7. Une méthode similaire.

Il y a une alternative, et mieux connue, une représentation intégrale de la fonction zeta sur laquelle nous pouvons baser nos calculs, viz.,

$$\zeta(s) = \sum_{r=1}^m r^{-s} + 2(2\pi)^{s-1} \sin \frac{1}{2}\pi s \Gamma(1-s) \sum_{r=1}^{m'} r^{-s} + \frac{1}{1+e^{i\pi s}} \int_{Q_m} \frac{e^{2m'i\pi z} z^{-s} dz}{1-e^{-2\pi iz}}.$$

Ici Q_m est une courbe venant de l'infini dans le premier quadrant, traversant l'axe réel entre m et $m+1$ et à nouveau entre $-m$ et $-m-1$, et repartant à l'infini dans le second quadrant; z^{-s} est définie comme dans le § 2. Si nous choisissons $m = m' = [\tau^{\frac{1}{2}}]$, et laissons la partie de Q_m au voisinage de l'axe réel positif être une ligne droite coupant l'axe réel dirigé négativement en μ et à angle de $+\frac{1}{4}\pi$, alors, pour de grandes valeurs de t , la seule contribution appréciable à l'intégrale provient du voisinage de l'axe réel positif. Nous pouvons approximer cette intégrale de la même manière que précédemment, la valeur approximée résultante pour $\zeta(s)$ étant

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^{\infty} r^{-s} \left\{ 1 - (1 + e^{i\pi s})^{-1} (1 - \exp [-2\pi\kappa\epsilon(r - \mu)])^{-1} \right\} \\ & + 2(2\pi)^{s-1} \sin \frac{1}{2}\pi s \Gamma(1-s) \sum_{r=1}^{\infty} r^{-s} \\ & - \frac{\epsilon}{\kappa(1+e^{i\pi s})} \sum_{k=-K}^K \frac{(\mu + \epsilon k/\kappa)^{-s} \exp [2\pi i m(\mu + \epsilon k/\kappa)]}{1 - \exp [-2\pi i(\mu + \epsilon k/\kappa)]}. \end{aligned}$$

L'entier K ne doit pas être choisi trop grand; $K < \frac{1}{2}\tau^{\frac{1}{2}}\kappa$ est habituellement suffisamment petit. Cette méthode a l'avantage que pour les points qui ne sont pas sur la droite critique, seuls deux intégrales réelles doivent être évaluées, et non quatre. Cela peut présenter un intérêt pour le calcul des zéros qui ne sont pas sur la droite critique. Dans ce but, cela n'importe pas que la méthode ne soit applicable que pour de grandes valeurs de t ; il est, pourtant, possible d'enlever cette restriction en intégrant le long d'une parabole, e.g., la parabole

$$x^2 = 2\mu y + \mu^2([\tau^{\frac{1}{2}}] \leq \mu \leq [\tau^{\frac{1}{2}}] + 1).$$

L'application conforme $u^2 = z$ transforme cette parabole en une ligne droite, telle que

$$\int_{Q_m} \frac{e^{2\pi i m z} z^{-s} dz}{1 - e^{-2\pi i z}} = -2 \int_{m^{\frac{1}{2}} \nearrow (m+1)^{\frac{1}{2}}} \frac{e^{2\pi i m u^2} u^{-2s+1} du}{1 - e^{-2\pi i u^2}}.$$

La ligne d'intégration coupe l'axe imaginaire entre $-im^{\frac{1}{2}}$ et $-i(m+1)^{\frac{1}{2}}$.

King's College,
Cambridge.