Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 47, No. 3, 1995.

Sur une égalité équivalente à l'hypothèse de Riemann

V. V. Volchkov

Résumé : On prouve que l'hypothèse de Riemann sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ est équivalente à l'égalité

$$\int_0^\infty \frac{1-12t^2}{(1+4t^2)^3}dt \int_{1/2}^\infty \ln|\zeta(\sigma+it)|d\sigma = \pi\frac{3-\gamma}{32},$$

où

$$\gamma = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln\ N\right)$$

est la constante d'Euler.

Actuellement, de nombreux énoncés équivalents à l'hypothèse de Riemann à propos des zéros de la fonction zeta $\zeta(s)$ sont connus (voir, par exemple, [1, p. 379]). Mais, comme une règle, tous ces énoncés sont des estimations de certaines valeurs liées à des fonctions arithmétiques. Dans cet article, nous prouvons le théorème suivant :

Théorème. *L'hypothèse de Riemann est équivalente à l'égalité*

$$\int_0^\infty \frac{1-12t^2}{(1+4t^2)^3}dt \int_{1/2}^\infty \ln|\zeta(\sigma+it)|d\sigma = \pi\frac{3-\lambda}{32},$$

où

$$\lambda = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln\ N\right)$$

est la constante d'Euler.

Preuve. Comme habituellement, $\rho = \beta + i\gamma$ dénote les zéros de $\zeta(s)$ dans la bande critique. On sait (voir, par exemple, [2, p. 92]) que

$$\sum_{\gamma>0} f_\gamma(\beta) = \frac{\lambda}{4} + \frac{1}{2} + \frac{\ln 4\pi}{4}, \qquad f_\gamma(\beta) = \frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2} \tag{1}$$

Université de Donetsk, Donetsk. Traduit en anglais de l'article du Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal, Vol. 47, n° 3, pp. 422-423, March, 1995. Article original soumis le 20 avril 1993.
Traduction en français : Denise Vella-Chemla, mars 2025.

Puisque $f_\gamma(x)$ est convexe sur $[0,1]$, on a $f_\gamma(\beta) + f_\gamma(1-\beta) \leq 2f_\gamma(1/2)$; ici, l'égalité est vérifiée seulement pour $\beta = 1/2$. Puisque les zéros de ρ sont symétriques par rapport à la droite critique, ce fait et (1) impliquent que l'hypothèse de Riemann est équivalente à l'égalité

$$\sum_{\gamma>0} f_\gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\lambda}{4} + \frac{1}{2} + \frac{\ln 4\pi}{4}.$$

Il reste à calculer la somme du côté gauche ; dénotons-la par la lettre A. On a

$$A = \int_0^\infty f_x(1/2)dN(x),$$

où $N(x)$ est le nombre de zéros de $\zeta(s)$ dans le domaine $0 \leq \sigma \leq 1,\ 0 \leq t \leq x \quad (s = \sigma + it)$. En intégrant par parties et en prenant en compte l'estimation $N(x) = \mathrm{O}(x \ln\, x)$ pour de grandes valeurs de x [1, p. 211], on obtient

$$A = \int_0^\infty N(x)g(x)dx,$$

où $g(x) = 16x/(1+4x^2)^2$. On sait (voir, par exemple, [1, p. 210]) que

$$N(x) = 1 - (x \ln\, \pi/2\pi) + \mathrm{Im}\, \ln\, \Gamma(1/4 + ix/2)/\pi + S(x),$$

où $S(x) = (\Delta_L \arg \zeta(s))/\pi$ est l'incrément de l'argument de $\zeta(s)$ le long de la ligne brisée de sommets d'affixes $s = 2, s = 2 + ix$, et $s = (1/2) + ix$. Par conséquent, $A = 2 - \ln\, \pi/4 + I_1 + \mathrm{Im}\, I_2/\pi$, où

$$I_1 = \int_0^\infty S(x)g(x)dx, \qquad I_2 = \int_0^\infty \ln\, \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{ix}{2}\right) g(x)dx.$$

En intégrant par parties et en utilisant la formule

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -\lambda - \frac{1}{s} - \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n+s} - \frac{1}{n}\right),$$

on peut facilement calculer l'intégrale I_2. On obtient

$$I_2 = -\frac{\lambda}{4} - \frac{\ln\, 2}{2}.$$

De plus, en intégrant I_1 par parties au vu de l'estimation [1, p. 220]

$$S_1(x) = \int_0^x S(t)dt = \mathrm{O}(\ln\, x)$$

on obtient

$$I_1 = -\int_0^\infty S_1(x)dg(x).$$

Finalement, au vu de l'égalité

$$S(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{1/2}^{\infty} \left(\ln|\zeta(\sigma + it)| - \ln|\zeta(\sigma)|\right) d\sigma,$$

les relations obtenues démontrent le théorème.

Références

1. E. K. Titchmarsh, *Theory of Riemann Zeta Functions* [traduit en russe], Inostrannaya Literatura, Moscou (1953).

2. G. Davenport, *Multiplicative Theory of Numbers* [traduit en russe], Nauka, Moscou (1971).