Transcription / traduction d'extraits divers, pour avoir des images mentales impressionnistes

1) Extrait du livre C^*-*algebras by example* de Kenneth R. Davidson, éds. Fields Institute monographs, American mathematical Society, Providence, 1996.

On s'intéresse à l'algèbre de Fibonacci parce qu'elle est en lien avec les pavages de Penrose, et qu'on a pu établir une bijection entre les matrices de comptage des décompositions de Goldbach et les pavages de Penrose [1] .

[p. 106]

Exemple IV.3.6. Considérons l'algèbre de Fibonacci de l'exemple III.2.6. Rappelons que $\mathfrak{A}_k = \mathcal{M}_{m_k} \oplus \mathcal{M}_{n_k}$, où m_k et n_k sont donnés récursivement par $m_1 = n_1 = 1$ et une utilisation répétée de la matrice d'intégration partielle $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ qui amène la relation récursive

$$m_{k+1} = m_k + n_k \quad \text{and} \quad n_{k+1} = m_k.$$

Il est facile de voir que

$$K_0(\mathfrak{A}_k) = \left(\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^2_+, \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_k \\ n_k \end{pmatrix} \right] \right).$$

Puisqu'une projection $P \oplus Q$ est envoyée vers $(P \oplus Q) \oplus P$, l'application de $K_0(\mathfrak{A}_k)$ dans $K_0(\mathfrak{A}_{k+1})$ est donnée par la matrice A :

$$\varphi_{k,k+1}\left(\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \right) = A \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+n \\ m \end{pmatrix}$$

IV.3. Groupes de dimension

Puisque $\varphi_{k,k+1}$ est un isomorphisme pour chaque $k \geq 1$, le groupe limite $K_0(\mathfrak{A})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$. En effet, appliquons $K_0(\mathfrak{A}_n)$ sur $K_0(\mathfrak{A})$ par l'application A^{-n}. Donc

$$\begin{tikzcd}
K_0(\mathfrak{A}_m) = \mathbb{Z}^2 \arrow[r, "A^{n-m}"] \arrow[dr, "A^{-m}"'] & K_0(\mathfrak{A}_n) = \mathbb{Z}^2 \arrow[d, "A^{-n}"] \\
 & K_0(\mathfrak{A}) = \mathbb{Z}^2
\end{tikzcd}$$

est un diagramme commutatif pour tout $m \leqslant n$.

L'unité d'ordre pour $K_0(\mathfrak{A}_k)$ est $\begin{pmatrix} m_k \\ n_k \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi l'unité d'ordre pour $K_0(\mathfrak{A})$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le cône positif est obtenu comme

$$K_0^+(\mathfrak{A}) = \bigcup_{n \geq 1} A^{-n} \mathbb{Z}^2_+.$$

[1] cf. la note Où l'on trouve un passage entre l'espace des matrices, qui comptent les décompositions de Goldbach, et l'espace des pavages de Penrose

En posant $n_0 = 0$, on obtient la suite de Fibonacci $n_k = n_{k-2} + n_{k-1}$ pour tout $k \geq 2$. Un argument d'induction facile montre que

$$A^{-k} = \begin{bmatrix} (-1)^k n_{k-1} & (-1)^{k-1} n_k \\ (-1)^{k-1} n_k & (-1)^k n_{k+1} \end{bmatrix}.$$

Ce sont des matrices unimodulaires, donc elles envoient $\mathbb{Z}^2$ sur lui-même. L'image de $\mathbb{Z}^2_+$ est le cône engendré par

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} (-1)^k n_{k-1} \\ (-1)^{k-1} n_k \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \beta_k = \begin{pmatrix} (-1)^{k-1} n_k \\ (-1)^k n_{k+1} \end{pmatrix}$$

De la formule bien connue

$$n_k = \frac{\tau^{k+1} + (-\tau)^{1-k)}}{\tau^2 + 1}$$

où $\tau := \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, on obtient

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n_{2k+1}}{n_{2k}} = \tau_+ \qquad \text{et} \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{n_{2k}}{n_{2k-1}} = \tau_-.$$

Ainsi $\alpha_{2k} = \beta_{2k-1}$ approche le segment de droite $y = \tau x, \ \ x > 0$; et, de façon similaire, $\alpha_{2k+1} = \beta_{2k}$ approche le segment de droite $y = \tau x, \ \ x < 0$; et $\tau x + y > 0$ pour tous ces vecteurs. Donc l'union de ces cônes est

$$K_0^+(\mathfrak{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \ : \ \tau m + n \geq 0 \right\}.$$

L'application de $\mathbb{Z}^2$ dans $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, 1)$ donnée par $f\left(\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}\right) = m + \tau^{-1} n$ est un homomorphisme unitaire positif. Ainsi, on voit que le $K_0(\mathfrak{A})$ est un ordre total. En effet, on obtient l'isomorphisme

$$\left(K_0(\mathfrak{A}), K_0^+(\mathfrak{A}), \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \simeq (\mathbb{Z} + \tau^{-1}\mathbb{Z}, (\mathbb{Z} + \tau^{-1}\mathbb{Z}) \cap \mathbb{R}_+, 1).$$

[p. 116]

Exemple IV.5.5. Considérons l'algèbre de Fibonacci $\mathfrak{A}$ de l'exemple IV.3.6. Rappelons que

$$K_0(\mathfrak{A}) = \left(\mathbb{Z}^2, \left\{ \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \ : \ \tau m + n \geq 0 \right\}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

qui est isomorphe à $(\mathbb{Z} + \tau^{-1}\mathbb{Z}, (\mathbb{Z} + \tau^{-1}\mathbb{Z}) \cap \mathbb{R}_+, 1)$. Puisque c'est un ordre total, il y a un unique homomorphisme unitaire de $K_0(\mathfrak{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, 1)$, notamment $\tau_*\left(\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}\right) = m + \tau^{-1} n$. Ainsi, il y a une trace unique sur cette algèbre.

---

2) Traduction d'un article de Behncke et Leptin.

Journal d'analyse fonctionnelle 10, 330-335 (1972)

C^*-Algèbres ayant un dual à deux points

Horst Behncke, Horst Leptin

On donne une caractérisation complète de toutes les C^*-algèbres séparables, qui ont, modulo une équivalence unitaire, seulement deux représentations irréductibles.

Il est bien connu qu'une C^*-algèbre séparable $\mathcal{A}$, qui a, modulo l'équivalence unitaire, seulement une représentation irréductible, est isomorphe à l'algèbre de tous les opérateurs compacts $\mathcal{K}(H)$ sur l'espace de Hilbert séparable H [3]. On ne connaît quasiment rien, cependant, à propos des C^*-algèbres séparables dont l'espace dual $\widehat{\mathcal{A}}$ est fini. Dans la présente note, on donne une caractérisation complète de toutes les C^*-algèbres $\mathcal{A}$ séparables avec un dual $\widehat{\mathcal{A}}$ à deux points. Ces résultats sont nés d'une recherche des C^*-algèbres dont le système de deux idéaux fermés des deux côtés est totalement ordonné [2].

À part $\mathcal{K}(H)$, on utilisera aussi la notation $\mathcal{K}_n, n = \infty, 1, ...,$ pour dénoter l'algèbre de tous les opérateurs compacts d'un espace de Hilbert séparable complexe n-dimensionnel C^n. Dans la suite, toutes les C^*-algèbres et tous les espaces de Hilbert seront séparables.

L'exemple le plus simple d'une C^*-algèbre $\mathcal{A}$ avec un dual à deux point $\widehat{\mathcal{A}}$ a la forme

$$\mathcal{A} = \mathcal{K}_n \oplus \mathcal{K}_m \qquad n, m = \infty, 1, ..., \quad n \leqslant m. \tag{1}$$

Dans ce cas, $\widehat{\mathcal{A}}$ a la topologie discrète. De plus, toute C^*-algèbre séparable $\mathcal{A}$ avec un dual discret à deux points $\widehat{\mathcal{A}}$ est isomorphe à l'une des C^*-algèbres données en (1). Pour construire d'autres exemples, soit H un espace de Hilbert de dimension infinie. Écrivons H comme

$$H = H_0 \oplus H_1 \otimes C^n$$

$n = 1, 2, \ldots$ avec dim $H_1 = \infty$ et $k =$ dim $H_0 = \infty, 1, ..., n-1$. Notons $\mathcal{A}_{k,n}$ la C^*-algèbre d'opérateurs sur H, qui est engendrée par $\mathcal{K}(H)$ et $1_{H_1} \otimes \mathcal{K}_n$. Il est facile de voir que $\mathcal{A}_{k,n}$ est la somme directe algébrique de ces deux sous-algèbres génératrices

$$\mathcal{A}_{k,n} = \mathcal{K}(H) \oplus 1_{H_1} \otimes \mathcal{K}_n \qquad n = 1, 2, ..., \quad k = \infty, 1, ..., \quad n-1. \tag{2}$$

Institut pour les mathématiques appliquées, Université d'Heidelberg, 69 Heidelberg, Allemagne

Communiqué par les éditeurs
Reçu le 28 mai 1971
Financé partiellement par la Subvention de la Fondation Ford à l'Université de Tulane.
Le second auteur remercie l'Université d'État de Louisiane pour son invitation et son généreux soutien de ce travail durant le trimestre de printemps de 1971.

On appelle $k = \dim H_0$ le défaut de $\mathcal{A}_{k,n}$. Si l'espace de défaut H_0 est de dimension infinie, alors $\mathcal{A}_{k,n}$ n'a pas d'unité, alors que $\mathcal{A}_{k,n}$ pour $k \leqslant n-1$ a une unité.

Pour obtenir la généralisation pour $n = \infty$, écrivons $H = H_1 \otimes H_2$, où H_1 et H_2 sont infini-dimensionnels. Soit $\mathcal{A}_2$ la C^*-algèbre d'opérateurs sur H engendrée par $\mathcal{K}(H)$ et $1_{H_1} \otimes \mathcal{K}(H_2)$. Comme ci-dessus, on montre facilement que

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{K}(H) \oplus 1_{H_1} \otimes \mathcal{K}(H_2). \tag{3}$$

Cet exemple a été étudié en [2]. On peut maintenant établir notre principal résultat.

Théorème. *Toute C^*-algèbre séparable $\mathcal{A}$ de dual à deux points $\widehat{\mathcal{A}}$ est isomorphe à l'un des exemples (1), (2) ou (3). Ces exemples sont deux à deux non isomorphes, en particulier $\mathcal{A}_{l,n} \cong \mathcal{A}_{k,n}$ si et seulement si $l = k$.*

Puisque toute C^*-algèbre séparable $\mathcal{A}$ d'espace dual dénombrable est post-liminale [3, 4.7.2], $\widehat{\mathcal{A}}$ est un T_0-espace. Par conséquent, à part le cas trivial, décrit par (1), on est immédiatement amené à une C^*-algèbre $\mathcal{A}$ d'opérateurs d'un espace de Hilbert de dimension infinie H avec

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}(H) \subset \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}/\mathcal{K} = \widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{K}_n, \quad n = \infty, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

On notera les classes d'éléments $a \in \widetilde{\mathcal{A}}$, par les symboles $\widetilde{a}$. La caractérisation des C^*-algèbres séparables $\mathcal{A}$ avec (4) dépend essentiellement de la sélection propre des représentants dans ces classes. On notera les matrices unités dans $\mathcal{K}_n$ par $\widetilde{e}_{i,j}, 1 \leqslant i, j \leqslant n$. Puisque les $\{\widetilde{e}_{i,j}\}$ sont complètement déterminés par les $\{\widetilde{e}_{i,1}\}_{i=1}^n$, il suffit de construire des représentants adéquats des $\widetilde{e}_{i,1}$ seulement, $1 \leqslant i \leqslant n$. Pour cela, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 1. *Soit $\mathcal{A}$ une C^*-algèbre séparable d'opérateurs sur H avec (4). Soit $\{e_{i,h}\}_{i,j=1}^n$ désignant un système de matrices unités dans $\mathcal{K}_n$, alors il existe une famille $\{p_{i,i}\}_{i=1}^n$ de projections orthogonales deux à deux dans $\mathcal{A}$ avec $p_{i,i} \in \widetilde{e}_{i,i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Si $n = \infty$, les $p_{i,i}$ peuvent être choisis tels que $1 - \sum_{i=1} p_{i,i}$ est une projection infinie-dimensionnelle.*

Preuve. Soit $b \in \mathcal{A}$ un opérateur hermitien avec $b \in \sum_{i=1}^n (1/i)\widetilde{e}_{i,i} = \widetilde{b}$ et soit $\mathcal{B}$ la C^*-algèbre engendrée par b. $\mathcal{B}$ a l'idéal à deux côtés $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B} \cap \mathcal{K}(H)$. Par [3, 3.2.2], on a $\widehat{B} = \widehat{B}_0 \cup \widehat{(\mathcal{B}/\mathcal{B}_0}$. Puisque $\widehat{\mathcal{B}}_0$ est dénombrable et puisque $\widehat{(\mathcal{B}/\mathcal{B}_0)} = \{1, 2, ..., n\}$ [3, 1.5.1], $\widehat{\mathcal{B}}$ est totalement déconnecté. En fait, on peut même montrer que tout $\lambda \in \operatorname{Sp} b$ avec $\lambda \notin \operatorname{Sp} \widetilde{b}$ est une valeur propre isolée de b de multiplicité finie. Puisque $\widehat{\mathcal{B}}$ est séparable et localement compact, il existe des voisinages ouverts disjoints compacts $U_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ de i dans $\widehat{\mathcal{B}}$. La fonction caractéristique de U_i correspond à une projection $p_{i,i} \in \widetilde{e}_{i,i}$, et les $p_{i,i}$ sont clairement orthogonaux. Si $n = \infty$ et $1 - \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} p_{i,i}$ est finie-dimensionnelle, remplaçons $p_{i,i}$ par $p_{i,i} - k_i$, où k_i est une projection uni-dimensionnelle avec

$k_i \leqslant p_{i,i}, i = 1, 2, \ldots$.

L'ensemble $p_{i,i}\mathcal{A}p_{1,1},\ \ 1 \leqslant i \leqslant n$, contient un élément non-compact $p_{i,1} \in \widetilde{e}_{i,1}$. Puisque $p_{i,1}^* p_{i,1} \in \widetilde{e}_{1,1}$, la décomposition spectrale de $p_{i,1}^* p_{i,1}$ par rapport à l'espace $p_{1,1}H$ est discrète, $p_{i,1}^* p_{i,1} = \sum \lambda_k e_k$. De $p_{1,1} - p_{i,1}^* p_{i,1} \in \mathcal{K}(H)$, il découle que $\lambda_k \to 1$ lorsque k tend vers l'infini. Par conséquent, on peut définir l'opérateur $c = \sum \mu_k e_k$ avec $\mu_k = \lambda_k^{-1/2}$ si $\lambda_k \neq 0$ et $\mu_k = 0$ si $\lambda_k = 0$. Alors $c \in \widetilde{e}_{1,1}$ et $p_{i,1}c$ est une isométrie partielle dans $\widetilde{e}_{i,1}$. Ainsi, on peut trouver des isométries partielles $p_{i,1} \in \widetilde{e}_{i,1}$ avec

$$p_{i,i}p_{i,1}p_{1,1} = p_{i,1} \tag{5}$$

et

$$p_{i,i} - p_{i,1}p_{i,1}^*, p_{1,1} - p_{i,1}^* p_{i,1} \in \mathcal{K}(H), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{6}$$

Maintenant soit n fini. Restreignons les $p_{i,1}$ à leur espace initial commun. À cause de (5), les relations dans (6) sont inchangées et on a de plus

$$p_{i,1}^* p_{i,1} = p_{1,1}. \tag{7}$$

Redéfinissons maintenant $p_{i,i}$ par $p_{i,i} = p_{i,1}p_{i,1}^*$ et posons $p_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} p_{i,i}$. Alors $p_{i,1}$ est une isométrie partielle de $H_1 = p_{1,1}H$ dans $p_{i,i}H = H_i$ et on peut écrire $H = H_0 \oplus (H_1 \otimes C^n)$ avec $p_0 H = H_0$ et $\mathcal{A} = \mathcal{K}(H) \oplus (1_{H_1} \otimes \mathcal{K}_n)$. Par conséquent, si dim $H_0 = \infty$, $\mathcal{A}$ est isomorphe à $\mathcal{A}_{k,n}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Sinon, soit $e_1, \ldots e_k$ une base de H_0 et soit k_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ une isométrie partielle avec $\langle e_1 \rangle$ comme espace initial et $\langle e_i \rangle$ comme espace terminal. Alors $p_{i,1} + k_i$ est une isométrie partielle dans $\widetilde{e}_{i,1}, 1 \leqslant i \leqslant n$ et le nouveau système a pour défaut $k - n$. Donc il n'y a pas de perte de généralité à supposer que $0 \leqslant k < n$.

Maintenant soit $n = \infty$ et soit $1 - \sum_{i=1}^{\infty} p_{i,i}$ une projection infinie-dimensionnelle. Comme ci-dessus, déterminons les isométries $p_{i,1} \in \widetilde{e}_{i,1}$ avec (6). Pour $i \geq 2$, redéfinissons $p_{i,i}$ par $p_{i,i} = p_{i,1}p_{i,1}^*$. Alors $p_0 = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} p_{i,i}$ est une projection infinie-dimensionnelle. Par (6), $p_{1,1} - p_{i,1}^* p_{i,1},\ \ i = 2, 3, \ldots$, est une projection finie-dimensionnelle de dimension d_i. Si $\sum_{i=2}^{\infty} d_i = \infty$, décomposons p_0 en des projections orthogonales f_i, $i = 2, 3, \ldots$ de dimension $d_i, p_0 = \sum_{i=2}^{\infty} f_i$. Alors, pour chaque $i = 2, 3, \ldots$, il existe une isométrie partielle avec $p_{1,1}$ comme espace initial et $p_{i,i} + f_i$ comme espace terminal. Ainsi, on peut supposer sans perte de généralité $p_{i,1} \in \widetilde{e}_{i,1}$ et

$$p_{i,1}^* p_{i,1} = p_{1,1}, \quad p_{i,1}p_{i,1}^* = p_{i,i} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_{i,i} = 1. \tag{8}$$

Dans ce cas, $\mathcal{A}$ est trivialement isomorphe à $\mathcal{A}_2$. Si $\sum_{i=2}^{\infty} d_i$ est fini, une redéfinition des $p_{i,1}$ comme ci-dessus amène à $d_i = 0, i = 2, 3, \ldots$. Alors décomposons p_0 en des projections orthogonales uni-dimensionnelles $e_i, i = 1, 2, ..., p_0 = \sum_{i=1}^{\infty} e_i$ et soit k_i les isométries partielles avec $k_i^* k_i = e_1$ et $k_i k_i^* = e_i$. Alors le système $p_{i,1} + k_i$ satisfait toutes les relations de (8). Ainsi, également dans ce cas, on voit que $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}_2$.

Le problème de l'isomorphisme se réduit à la question suivante : est-ce que $\mathcal{A}_{k,n} \simeq A_{l,n}, 0 \leqslant k, l < n < \infty$, implique $k = l$?

Donc soit $\mathcal{A}_{k,n} \simeq \mathcal{A}_{l,n}, k, l < n < \infty$. Après les identifications habituelles, on peut désormais supposer que $\mathcal{A}_{k,n}$ contient deux systèmes d'isométries partielles $\{p_{i,j}\}_{i,j=1}^{n}$ et $\{q_{i,j}\}_{i,j=1}^{n}$ avec pour défaut k, respectivement l. Puisque tout automorphisme de $\mathcal{K}_n, n < \infty$, est intérieur, on peut même supposer

$$p_{i,i} - q_{i,i} \in \mathcal{K}(H), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Lemme 2. *Soient p et q deux projections sur H avec $p - q \in \mathcal{K}(H)$. Alors il existe un opérateur unitaire u, avec $u \equiv 1 \bmod \mathcal{K}(H)$ tel que soit $p \geq uqu^*$ soit $p \leqslant uqu^*$. u peut être choisi de telle façon que $u \mid \{(p \vee q)H\}^{\perp} = 1$.*

Preuve. Soit $\mathcal{B}$ la C^*-algèbre d'opérateurs sur H engendrée par p et q. Alors, par [1, Lemme 4] H et $\mathcal{B}$ ont une décomposition dénombrable

$$H = H_0 \oplus \sum_{i \geq 1}^{\oplus} H_i, \qquad \mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \oplus \sum_{i \geq 1}^{\oplus} \mathcal{B}_i \quad \text{avec} \quad \mathcal{B}_i = \mathcal{B}|H_i$$

telle que les $H_i, i = 0, 1, \ldots$ sont $\mathcal{B}$-invariants. De plus

$$\mathcal{B}_0 \cap \mathcal{K}(H_0) = (0),$$

et les $\mathcal{B}_i, i \geq 1$, sont primaires de multiplicités finies n_i. Dans notre cas, cela implique $p|H_0 = q|H_0$. On peut donc supposer sans perte de généralité $H_0 = (0)$. Puisque deux projections engendrent une W^*-algèbre de type $\mathrm{I}_{\leqslant 2}$, les $\mathcal{B}_i, i \geq 1$, sont soit commutatifs, soit isomorphes à l'algèbre de toutes les matrices 2×2. Cela induit une décomposition $H = H^{(1)} \oplus H^{(2)}$, où $\mathcal{B}|H^{(1)}$ est abélien et où $\mathcal{B}|H^{(2)}$ est de type I_2. En posant de façon correspondante $u = u^{(1)} \oplus u^{(2)}$, on peut traiter les deux cas séparément. Le cas abélien est trivial, parce que la projection $p \cdot q$ est de codimension finie par rapport à p et q, et on peut toujours trouver un u avec les propriétés souhaitées, reliant $p - pq$ et $q - pq$. Par conséquent, on peut supposer que $\mathcal{B}$ est de type I_2. Alors, on peut écrire

$$H_i = C^2 \otimes C^{n_i}, \qquad p_i = p \mid H_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes 1_{n_i}$$

et

$$q_i = q|H_i = \begin{pmatrix} c_i^2 & c_i s_i \\ c_i s_i & s_i^2 \end{pmatrix} \otimes 1_{n_i}$$

où $c_i = \cos\varphi_i$ et $s_i = \sin\varphi_i$. Par conséquent, q_i peut être transformé en p_i par une rotation u_i d'angle φ_i. Puisque $p - q = \sum_{i\geq 1}^{\oplus} p_i - q_i \in \mathcal{K}(H)$, on a $\varphi_i \to 0$. Donc, $u = \sum^{\oplus} u_i$ est congru à 1 mod $\mathcal{K}(H)$.

En utilisant (9) et le lemme 2, on peut donc supposer que $p_{1,1} \leqslant q_{1,1}$, parce que les unitaires u avec $u \equiv 1 \bmod \mathcal{K}(H)$ déterminent les automorphismes de $\mathcal{A}_{k,n}$. Définissons maintenant un nouveau système d'isométries partielles $\{r_{i,j}\}_{i,j=1}^{n}$ par $r_{i,1} = q_{i,1}p_{i,1}$ et $r_{i,j} = r_{i,1}r_{j,1}^*$. Si dim $q_{1,1} - p_{1,1} = d$, alors le r-système a pour défaut $l + nd$. À cause de (9), on a $r_{i,i} - p_{i,i} \in \mathcal{K}(H), 1 \leqslant i \leqslant n$, et $r_{1,1} = p_{1,1}$. Ainsi, en utilisant le lemme 2 à nouveau, on peut supposer sans perte de généralité $r_{2,2} \geq p_{2,2}$ ou $r_{2,2} < p_{2,2}$.

Supposons $r_{2,2} > p_{2,2}$, alors $u = r_{1,2}\, p_{2,2}\, p_{1,2}^*$ est une isométrie partielle avec $u^*u = p_{1,1}$ et $uu^* < p_{1,1}$. Ainsi la C^*-algèbre $p_{1,1}\, \mathcal{A}_{k,n}\, p_{1,1}$ contient une isométrie non unitaire. Ceci, pourtant, est impossible puisque $p_{1,1}\, \mathcal{A}_{k,n}\, p_{1,1}$ est isomorphe à $\mathcal{A}_{0,1}$ et puisque tout élément dans $\mathcal{A}_{0,1}$ a la forme $\lambda l + k$ avec $k \in \mathcal{K}(H)$.

Similairement, on montre que $r_{2,2} < p_{2,2}$ est impossible. Ainsi, on a $r_{2,2} = p_{2,2}$. En répétant le même argument pour $r_{3,3}, p_{3,3}, ...,$ et $r_{n,n}, p_{n,n}$, on voit qu'on peut même supposer que $r_{i,i} = p_{i,i}, 1 \leqslant i \leqslant n$. Ainsi, en comparant les défauts, on obtient $k = l + nd$ ou $k = l$. Cela prouve le théorème.

On espère que ce résultat pourra finalement permettre de classifier toutes les C^*-algèbres séparables $\mathcal{A}$ de dual fini $\widehat{\mathcal{A}}$.

Remerciements : Cette recherche a été menée alors que H. Behncke visitait l'université de Tulane et alors que H. Leptin visitait l'université d'état de Louisiane. Les deux auteurs souhaiteraient remercier leur département de mathématiques respectif pour l'hospitalité qui leur a été prodiguée.

Références

1. H. Behncke, Structure of certain non-normal operators, *J. Math. Mech.* 18 (1968), 103-107.
2. H. Behncke, F. Krauss, H. Leptin, C^*-Algebren mit geordneten Ideal Folgen, *J. Functional Analysis* 10 (1972), 204-211.
3. J. Dixmier, “Les C^*-algèbres et leurs applications”, Gauthier-Villars, Paris, 1964.

3) Traduction du paragraphe 10 (p. 385-388) de l'article *Applications du spectre de Connes aux systèmes C^*-dynamiques, partie III*[2], de Dorte Olesen et Gert K. Pedersen, consacré aux automorphismes apériodiques.

10. Automorphismes apériodiques

Un automorphisme α, pour lequel $\Gamma(\alpha)$ est le groupe du cercle complet $\mathbb{T}$, est proprement extérieur par le théorème 6.6. Puisque la condition signifie que $\mathrm{Sp}(\alpha|B) = \mathbb{T}$ pour tout B dans $\mathcal{H}^\alpha(A)$ et $\mathrm{Sp}(\alpha^n) = (\mathrm{Sp}(\alpha))^n$, il semblerait que l'on puisse conclure que $\Gamma(\alpha^n) = \mathbb{T}$ pour tout n, de telle façon que toutes les puissances de α sont proprement extérieures (i.e., α est apériodique au sens de Connes [5, p. 393]). Le hic est que nous ne savons rien, a priori, à propos de $\mathrm{Sp}(\alpha^n|B)$ pour les C^*-sous-algèbres héréditaires B qui sont α^n-invariantes mais non α-invariantes. Néanmoins, l'assertion est vraie. Elle a été démontrée pour les C^*-algèbres de type I dans [23, 4.6], et avec la caractérisation des automorphismes proprement extérieurs du théorème 6.6, nous allons maintenant étendre le théorème aux C^*-algèbres générales (séparables).

Les auteurs expriment leur reconnaissance à E. Størmer d'avoir pointé la condition (vii) dans le théorème ci-dessous. Elle donne un analogue en termes de C^*-algèbres d'un critère bien connu pour qu'un opérateur unitaire ait un spectre complet.

LEMME 10.1. *Si α est un automorphisme d'une C^*-algèbre séparable A telle que*

$$\mathrm{dist}(\alpha^n, \mathrm{Inn}(M(A))) < \varepsilon < 2$$

pour un certain entier naturel n, alors il y a un unitaire u dans $M(A)$ et un unitaire v dans A'' avec $\|1 - v\| < n\varepsilon$ tels que

$$\alpha^{n^2} = \mathrm{Ad}(uv) \quad \text{et} \quad \alpha(uv) = uv.$$

Preuve. Par hypothèse, il y a un unitaire u_0 dans $M(A)$ avec $\|\alpha^n - \mathrm{Ad}\ u_0\| < \varepsilon$. En appliquant [27, 8.7.9], il découle que $(\mathrm{Ad}\ u_0^*) \circ \alpha^n = \mathrm{Ad}\ v_0$ pour un certain unitaire v_0 dans A'' avec spectre dans l'arc

$$\{\exp(it) \mid |t| \leqslant \mathrm{Arc\ sin}\ \varepsilon/2\}.$$

Il découle de la géométrie plane que

$$\|1 - v_0\|^2 \leqslant 2(1 - (1 - \varepsilon^2/4)^{1/2}) < \varepsilon^2.$$

Pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, chaque unitaire $\alpha^k(u_0v_0)$ induit l'automorphisme α^n sur A''. En particulier, ils commutent mutuellement. Par conséquent, avec

$$w = u_0v_0\alpha(u_0v_0)...\alpha^{n-1}(u_0v_0)$$

on a $\alpha^{n^2} = \mathrm{Ad}\, w$ et puisque $\alpha^n(u_0v_0) = u_0v_0$, on voit que $\alpha(w) = w$. Maintenant posons

$$u_k = v_0\alpha(v_0)\dots a^{k-1}(v_0)\alpha^k(u_0)\alpha^{k-1}(v_0^*)\dots\alpha(v_0^*)v_0^*$$

[2]Journal d'analyse fonctionnelle, 45, 1982, 357-390.

et notons que $u_k \in M(A)$. De plus

$$w = (u_0 u_1 \dots u_{n-1})(v_0 \alpha(v_0) \dots \alpha^{n-1}(v_0)).$$

Ainsi, on a trouvé une factorisation $w = uv$, où $u \in M(A)$ et où $\|1 - v\| \leqslant n\varepsilon$.

Lemme 10.2. *Si $\alpha^n = \mathrm{Ad}\, w$ et $\alpha(w) = w$ pour un certain unitaire w dans la fermeture faible $\pi_a(A)''$ de A dans sa représentation atomique, telle que $w = uv$ avec $u \in M(A)$ et $\|1 - v\| < \varepsilon$ alors il y a une projection ouverte non nulle p dans $\pi_a(A)''$, qui commute avec w, et telle que*

$$\|(1 - w)p\| < 9\varepsilon.$$

Preuve. Dans la suite, on regardera, comme ci-dessus, A comme une sous-algèbre de $\pi_a(A)''$, cf. [27, 4.3]. Nos hypothèses impliquent, par le théorème 6.6, que $\|\iota - \alpha^n)|C\| < 2$ pour un certain C dans $\mathcal{H}(A)$, invariant par α^n. Par le lemme 4.1, on peut maintenant supposer que $\|(\iota - \alpha^n)|C\| < \varepsilon$, en passant, si besoin, à un C plus petit. Soit p dénotant la projection ouverte dans $\pi_a(A)''$ (ou dans A'', cf. [27, 4.3.15]) correspondant à C (i.e. $C = pA''p \cap A$). Puisque C est α^n-invariant, p commute avec w.

Pour chaque représentation irréductible (π, H) de A, on a bien sûr

$$\|\pi(wx–xw)\| < \varepsilon\|\pi(x)\|$$

pour tout x dans C. Puisque $\pi(C)$ agit irréductiblement sur $\pi(p)H$ [27, 4.1.5], il en découle que

$$\|\pi(wp)y - y\pi(wp)\| \leqslant \varepsilon\|y\|$$

pour tout y dans $B(\pi(p)H)$. Par conséquent, la distance maximale entre n'importe quels deux points non nuls dans $\mathrm{Sp}(\pi(wp))$ est $\leqslant \varepsilon$.

En supposant, comme on peut le faire, que $1 \in \mathrm{Sp}(wp)$, on voit qu'il y a des représentations irréductibles (π, H) de A pour lesquelles $\|\pi((2+w+w^*)p)\|$ est arbitrairement proche de 4. Puisque $w = uv$ avec $\|1 - v\| < \varepsilon$, on a de plus

$$(*) \qquad \|(1 + u)p(1 + u^*) - (2 + w + w^*)p\| < 4\varepsilon.$$

On conclut que l'ensemble E des représentations irréductibles $(\pi,)$ pour lesquelles

$$\|\pi((1 + u)p(1 + u^*))\| > 4 - 4\varepsilon$$

est non vide. Puisque p est ouvert et $1 + u \in M(A)$, la fonction

$$\ker \pi \to \|\pi((1 + u)p(1 + u^*))\|$$

est semi-continue par le bas sur l'espace idéal primitif de A [27, 4.4.6). Ainsi E correspond à un ensemble ouvert, par conséquent à un idéal fermé I de A avec $I \cap C \neq 0$ [27, 4.1.3]. En remplaçant C par $C \cap I$, on peut donc supposer, cf. (*), que

$$\|\pi((w + w^*)p)\| > 2–8\varepsilon$$

à chaque fois que $\pi(p) \neq 0$. Ainsi, il y a un λ dans $\mathrm{Sp}(\pi(wp))$ avec $\mathrm{Re}\,\lambda > 1 - 4\varepsilon$ par conséquent $|1-\lambda| < 8\varepsilon$.

Puisqu'aucun autre point non nul dans $\mathrm{Sp}(\pi(wp))$ n'est à distance $\leq \varepsilon$ de λ, on voit que

$$\|\pi((1-w)p)\| < 9\varepsilon.$$

Ceci est vérifié pour tout (π, H) avec $\pi(p) \neq 0$, et le lemme en découle.

Lemme 10.3. *Sous les hypothèses du lemme 10.2, si* $10\varepsilon < 1$*, il y a un* B *dans* $\mathcal{H}^\alpha(A)$ *tel que*

$$\|(1-\alpha^n)|B\| < 2.$$

Preuve. Soit q dénotant la projection spectrale de w, correspondant à l'ensemble

$$\{\lambda \in \mathrm{Sp}(w) \mid \mathrm{Re}\,\lambda \leq \varepsilon\}$$

et notons que $\alpha(q) = q$. Avec p comme dans le lemme 10.2, on a $pq = qp$ et

$$2(1-9\varepsilon)pq \leqslant (w+w^*)pq \leqslant 2\varepsilon pq,$$

par conséquent $pq = 0$.

Considérons maintenant la projection

$$p_0 = p \vee \alpha(p) \vee ... \vee \alpha^{n-1}(p)$$

dans $\pi_\alpha(4)''$. Puisque $\alpha^n(p) = p$, on a $\alpha(p_0) = p_0$ et puisque $a(q) = q$, il découle de $pq = 0$ que $p_0 q = 0$. De plus, p_0 est ouvert ; car si $\{x_k\}$ est une suite dans A_+ croissante jusqu'à p alors $\{y_k(k^{-1} + y_k)^{-1}\}$ croît jusqu'à p_0, où $y_k = \sum_0^{n-1} \alpha^m(x_k)$. Soit B la C^*-sous-algèbre héréditaire de A correspondant à p_0. Puisque $\alpha(p_0) = p_0$, on voit que $B \in \mathcal{H}^\alpha(A)$. De plus, $(w+w^*)p_0 \leqslant 2\varepsilon p_0$ puisque $p_0 q = 0$ par conséquent $\|(\varepsilon - w)p_0\|^2 \leqslant 1 - \varepsilon^2$. Par conséquent, pour tout x in B

$$\|x - \alpha^n(x)\| = \|wx - xw\| \leqslant 2(1-\varepsilon^2)^{1/2}\|x\|,$$

comme souhaité.

Théorème 10.4. *Soit* α *un automorphisme d'une* C^**-algèbre séparable* A*. Avec les mêmes notations que dans 6.6, les sept conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\Gamma(\alpha)$ *est le groupe du cercle complet* $\mathbb{T}$.

(ii) *Il n'y a pas de* B *dans* $\mathcal{H}^\alpha(A)$ *tel que* $\alpha^n|B = \exp\delta$ *pour un certain* $n \neq 0$ *et une certain* **-dérivation* α*-invariante* δ *de* B.

(iii) *Il n'y a pas de* I *dans* $\mathcal{I}^\alpha(A)$ *tel que* $\alpha^n|I$ *est universellement faiblement intérieur (sur* I''*) pour un certain* $n \neq 0$.

(iv) *Pour tout $n \neq 0$, l'ensemble $\{\pi \in \widehat{A} | \alpha^n(\pi) = \pi\}$ est d'intérieur vide.*

(v) *Il y a un ensemble dense α-invariant Δ dans $\widehat{A}$ sur lequel (le transposé de) α agit librement (i.e., $\alpha^n(\pi) = \pi$ implique $n = 0$).*

(vi) *Pour tout $n \neq 0$, l'automorphisme α^n est proprement extérieur.*

(vii) *Pour tout $\varepsilon > 0$, tout n et tout B dans $\mathcal{H}(A)$, il y a un certain x dans B_+ avec $\|x\| = 1$ tel que $\|xa^k(x)\| < \varepsilon$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$, de telle façon que les éléments $x, \alpha(x), ..., \alpha^n(x)$ sont mutuellement presque orthogonaux.*

Preuve. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Cela découle de la proposition 4.2.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Si α^n est universellement faiblement intérieur sur un certain idéal I dans $\mathcal{I}^\alpha(A)$, on prend $\varepsilon < (10n)^{-1}$ et on applique le corollaire 6.7 à α^n sur I pour obtenir un idéal principal J dans I tel que

$$\mathrm{dist}(\alpha^n\ |J, \mathrm{Inn}(M(J))) \leqslant \varepsilon.$$

Alors l'idéal

$$J_0 = \bigcap_{1}^{n} a^k(J)$$

est non nul (en fait, il est principal dans I) et α-invariant, et à nouveau $\alpha^n|J_0$ est ε-fermé à $\mathrm{Inn}(M(J_0))$. Il découle des lemmes 10.1, 10.2 et 10.3 que

$$\|(\iota - \alpha^{n^2})|B\| < 2$$

pour un certain B dans $\mathcal{H}^\alpha(J_0)$, par conséquent $\alpha^{n^2}|B = \exp\delta$ pour une certaine *-derivation δ α-invariante sur B par le résultat de Kadison-Ringrose.

(iii) $\Longleftrightarrow$ (iv). Ceci est exactement [23, 4.3] et (iv) $\Longleftrightarrow$ (v) et [23, 4.4].

(iv) $\Longrightarrow$ (vi). Ceci est immédiat à partir du théorème 6.6.

(vi) $\Longrightarrow$ (vii). Ceci découle du lemme 7.1 et (vii) $\Longrightarrow$ (vi) est immédiat à partir du théorème 6.6.

(vi) $\Longrightarrow$ (i). Si $\Gamma(\alpha) \neq \mathbb{T}$ alors il existe un certain B dans $\mathcal{H}^\alpha(A)$ avec $\mathrm{Sp}(\alpha|B) \neq \mathbb{T}$, par conséquent $\Gamma_B(\alpha|B) \neq \mathbb{T}$. Il y a donc un n non nul dans $\Gamma_B(\alpha|B)^\perp$. En appliquant la proposition 4.3 à B, on trouve un certain C dans $\mathcal{H}^\alpha(A)$ tel que $\alpha^n|C = \exp\delta$ pour une certaine *-derivation δ α-invariante de C. Mais alors α^n n'est pas proprement extérieur par le théorème 6.6.

4) Traduction d'un paragraphe d'un article de George Elliott sur les groupes ordonnés "localement" de rang un.

6.2. Groupes ordonnés "localement" de rang un

Il y a de nombreux types de cônes de groupes de dimension dans un groupe dénombrable abélien sans torsion qui n'est pas de rang un. On va décrire ici une classe de cônes incluant ceux provenant des C^*-algèbres étudiées dans les références [3], [4], et [5]. La définition et la classification s'effectue de façon plus lisse dans un groupe libre, qui est assez général pour notre présent objectif.

La propriété caractéristique d'un cône de la classe que nous allons considérer semble plus simple à exprimer en fonction de l'existence d'une base (i.e., un ensemble indépendant de générateurs), bien que la base ne soit pas déterminée uniquement par le cône à moins que le cône ne soit simplicial. Il devrait exister une base, et un ordre (partiel) sur cette base, tel qu'un élément du groupe est dans le cône si ses coordonnées maximales non nulles sont positives. L'ordre des coordonnées fait référence à l'ordre des éléments de la base correspondants. Les éléments de la base, en particulier, sont dans le cône.

Comme illustration, on va complètement décrire les cônes de cette sorte, et leurs automorphismes, quand le groupe est de rang deux (et libre), découvrant ainsi les résultats de [4]. Il y a, à permutation près, seulement deux ordres sur un ensemble de deux éléments. Si les éléments ne sont pas comparables, alors le groupe ordonné est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$ et il y a seulement un automorphisme non trivial. Si les deux éléments sont comparables, le cône est le plus petit cône dans $\mathbb{Z}^2$ contenant $\mathbb{Z}^2_+$ et invariant selon l'automorphisme défini par l'inverse de la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il est facile de voir que tous les automorphismes sont des puissances de celui-là. Par conséquent, deux sous-ensembles distincts directement hérités sont isomorphes seulement s'ils sont individuellement engendrés et si leurs générateurs sont reliés par une puissance de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Un sous-ensemble héréditaire dirigé vers le haut qui n'est pas individuellement engendré est invariant selon tous les automorphismes, et est décrit par sa plus grande seconde coordonnée.

Une description similaire est possible quand le rang est non restreint. Le groupe peut être représenté comme $\oplus_{i\in I}\mathbb{Z}_i$, où chaque $\mathbb{Z}_i$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et I est la base ordonnée, de telle façon que le cône positif est le plus petit cône contenant $\oplus\mathbb{Z}_i^+$ et invariant selon certains automorphismes de groupes, ceux déterminés par les matrices $I \times I$ avec un 1 dans chaque position de la diagonale et un nombre fini d'entiers en-dessous. Tout automorphisme du groupe ordonné est le produit (d'une manière unique) de l'un de ces automorphismes et d'un automorphisme qui permute les coordonnées. Le phénomène le plus notable apparaissant quand le rang n'est pas fini est une restriction sur le nombre de sous-ensembles héréditaires générateurs. Si la base ordonnée I n'a pas d'élément maximal, alors aucun sous-ensemble héréditaire propre du cône positif ne peut engendrer le groupe. Par conséquent, deux algèbres de la classe considérée dans cet article, avec le même groupe de dimension déterminé comme ci-dessus par un ensemble ordonné I sans éléments maximaux, sont isomorphes.

Le paragraphe précédent amène une généralisation naturelle des résultats de la classification fournis dans [4] et [5]. Il faudrait remarquer que nous n'avons pas éliminé la tâche de montrer qu'une C^*-algèbre séparable de spectre fini a une sous-algèbre involutive localement dense (voir [5, Section 2]).

Le fait qu'un groupe ordonné, de la sorte considérée, s'il est de rang fini, provienne d'une C^*-algèbre de spectre fini peut être établi en construisant des exemples (comme dans [5]) qui épuisent toutes les possibilités pour le groupe. Cela peut aussi se déduire par une analyse de la structure du treillis des faces du cône positif du groupe, qui est le même que celui du treillis des idéaux de l'algèbre.