Traduction de 3 pages extraites de *The theory of sets of points* de William Henry Young et Grace Chisholm Young, Cambridge University Press, 1906

103. Un ensemble de points dans un plan est une collection de points du plan, définie par une loi telle que (1) tout point du plan soit appartient à l'ensemble soit n'y appartient pas, mais pas les deux, et pas ni l'un ni l'autre, (2) en supposant qu'on connaît suffisamment d'éléments caractéristiques de ces points, la loi permet de déterminer si oui ou non un point appartient à l'ensemble, (3) en ayant trouvé un nombre quelconque ou un ensemble quelconque de points de l'ensemble, il est toujours possible d'en trouver davantage, si tant est qu'il y en ait.

Il est clair que cette définition est précisément équivalente à la définition suivante :

Un ensemble de points du plan est une collection de points (x_1, x_2), tels que les coordonnées x_1 forment un ensemble de nombres, et il en est de même des coordonnées x_2.

La section d'un ensemble de points par une droite est alors un ensemble linéaire de points, et il en est de même de la projection d'un ensemble de points sur une droite, auquel cas, en général, un point de la projection correspond à plus d'un point de l'ensemble original.

104. La plupart de la terminologie déjà utilisée peut s'appliquer de façon générale dans le plan ou dans l'espace n-dimensionnel, et nécessite une discussion séparée. Les preuves des théorèmes nécessitent habituellement des altérations verbales insignifiantes, comme le fait d'utiliser les mots cercle ou sphère ou sphère n-dimensionnelle à la place du mot intervalle. Un point L est dit être un *point limite d'un ensemble*, si à l'intérieur de chaque cercle de centre L, il y a un point de l'ensemble autre que L, si L est un point de l'ensemble. Les termes *points isolés d'un ensemble*, et *ensemble isolé* ont alors le même sens qu'à la page 18. Une *séquence* est un ensemble avec un et un seul point limite, un ensemble fini n'ayant clairement pas de point limite. Un ensemble qui ne contient que des points limites est dit *dense en lui-même*. Un ensemble qui contient tous ses points limites est dit *fermé*, il est dit *ouvert* sinon. On prouve alors facilement qu'*à la fois la projection et la section d'un ensemble fermé sont des ensembles fermés*. Un ensemble qui est à la fois fermé et dense en lui-même est dit *parfait*. Un ensemble est dit *dense partout* dans la région fondamentale, si tout cercle dans la région fondamentale contient des points de l'ensemble en son intérieur ; un ensemble est dit *dense nulle part*, si tout tel cercle contient un autre cercle ne contenant aucun point de l'ensemble. On trouvera que ces définitions sont parfaitement consistantes avec l'idée étendue d'une région qu'on développera ultérieurement, et que les cercles peuvent être remplacés par des régions qui ne sont pas d'une telle forme.

Les points rationnels du plan sont ces points dont les deux coordonnées sont rationnelles. Ils forment un ensemble ouvert qui est dense en lui-même, dense partout dans le plan, et qui, par le théorème 3 page 35, est de puissance a.

Un ensemble parfait peut clairement être dense nulle part, et il est facile de construire de tels ensembles parfaits, par exemple comme suit.

Ex. 1. Prenons comme région fondamentale le cercle de rayon unité. Prenons un cercle, et divisons sa circonférence en trois parties égales. Divisons chacune de ces parties, comme dans l'exemple de Cantor p. 20, en trois parties égales, et noircissons la partie centrale, et divisons alors chacun des deux segments dans chacune des trois parties similairement, etc. L'ensemble des points du cercle qui ne sont pas internes aux arcs noircis, constitue un ensemble plan de points qui est parfait et dense nulle part (Fig. 20).

Cela aurait pu, bien sûr, être obtenu par une transformation à partir de la droite. L'ensemble suivant est un ensemble plan plus typique.

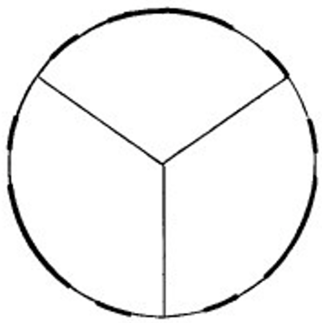

Fig. 20.

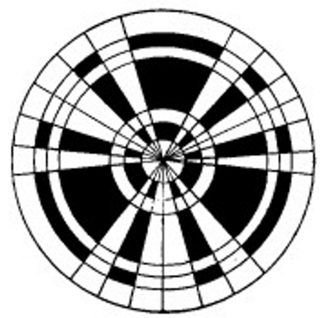

Fig. 21.

Ex. 2. Prenons comme région fondamentale un cercle de rayon unité. Dessinons un cercle de rayon 1 et un cercle de rayon 2, en utilisant la notation ternaire. Noircissons des arcs de la circonférence et la partie de l'anneau entre eux comme dans l'exemple précédent, en laissant sur la circonférence de tout cercle concentrique entre eux un ensemble parfait dense nulle part. Dessinons alors des cercles de rayons 01 et 02, et noircissons les parties entre les arcs de leur circonférence comme précédemment, et similairement avec des cercles de rayons $L1$ et $L2$, et etc., en utilisant le principe de l'exemple de Cantor non seulement pour les rayons des cercles mais également pour la construction des points de l'ensemble appartenant aux cercles. L'ensemble contenant tous les points exceptés les parties noircies est un ensemble plan parfait, dense nulle part (Fig. 21).

Ex. 3. Au lieu de subdiviser la circonférence des cercles, construits comme dans l'exemple précédent, on peut noircir seulement les anneaux entre les cercles (Fig. 22), l'ensemble plan sera toujours parfait et dense nulle part dans le plan, bien que sur chaque cercle, l'ensemble soit du point de vue linéaire, ou plutôt circulaire, dense partout. Ou bien, on peut prendre sur les cercle n'importe quels ensembles parfaits qu'on souhaite.

Fig. 22.

Il est clair qu'on peut construire de façon similaire des ensembles de points qui sont denses nulle part dans le plan, et qui peuvent contenir ou ne pas contenir des composantes qui sont denses partout sur les lignes droites ou sur d'autres courbes ; ceci présente un intérêt historique car on peut le relier à l'une des premières tentatives de gérer pratiquement quelques-uns des problèmes les moins évidents des ensembles plans de points dense nulle part.