

Traduction de *Music : a mathematical offering ; Appendix B : The wave equation, an example* de Dave Benson, p. 471. Le livre complet est téléchargeable gratuitement dans cette page lien.

(Denise Vella-Chemla, avril 2024).

L'équation d'onde : un exemple

Pour trouver des tambours non équivalents avec les mêmes fréquences résonantes (voir § 3.7), on applique le théorème W.21 ¹ pour construire des régions planes avec le même spectre de Dirichlet ². On doit commencer par choisir un groupe fini G et deux sous-groupes H_1 et H_2 qui ne sont pas conjugués dans G , mais qui satisfont l'hypothèse du théorème. Un exemple est $G = GL(3, \mathbb{F}_2)$, le groupe général linéaire des matrices inversibles d'éléments dans le corps à deux éléments $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. Ce groupe a 168 éléments, et il a des sous-groupes H_1 et H_2 d'ordre 24 constitués des matrices de la forme $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$ respectivement. Les cosets gauches de H_1 et H_2 dans G correspondent aux non-vecteurs et aux vecteurs colonnes de longueur trois respectivement.

Soit T un triangle dans \mathbb{R}^2 avec des angles aigus et trois côtés de différentes longueurs, le côté rouge, le côté bleu et le côté jaune. On construit Ω à partir de 168 triangles T_g , un pour chaque $g \in G$, dont chacun est une copie de T . Soient r , b et y les éléments suivants de G :

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que ces matrices satisfont les relations suivantes :

$$r^2 = b^2 = y^2 = 1, \quad (rb)^4 = (by)^4 = (yr)^4 = 1.$$

On colle le triangle T_g , le long du côté rouge à T_{gr} , le long du côté bleu à T_{gb} , et le long du côté jaune à T_{gy} , de telle manière que des triangles adjacents aient des orientations opposées. Les relations ci-dessus entre r , b et y impliquent qu'il y aient 8 triangles autour de chaque sommet. Le polyèdre résultant Ω a 168 faces, $\frac{3}{2} \times 168 = 252$ côtés et $\frac{3}{8} \times 168 = 63$ sommets ³. L'action de G sur Ω est donnée par la formule $h(T_g) = T_{hg}$. Il est facile de vérifier que cette action préserve la manière dont les faces sont collées le long des arêtes.

¹THÉORÈME W.21. Soient H_1 et H_2 des sous-groupes de G tels que pour toute classe de conjugaison \mathcal{C} d'éléments de G on ait

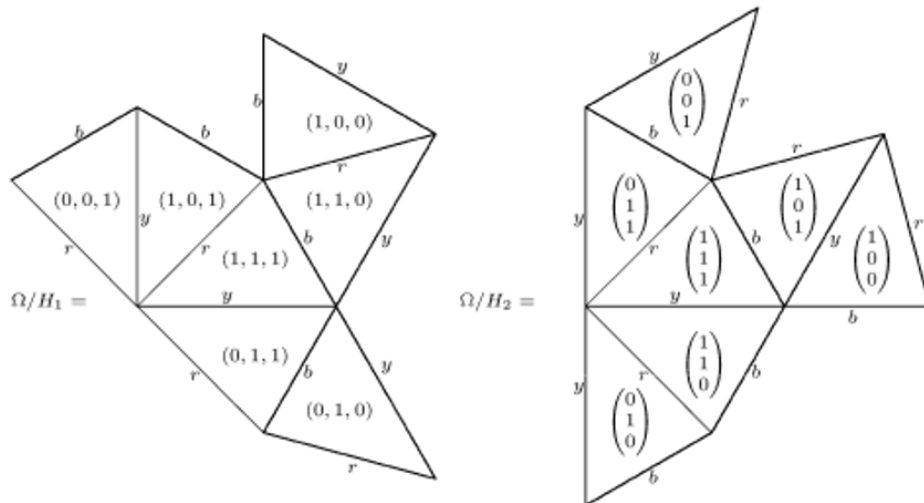
$$|\mathcal{C} \cap H_1| = |\mathcal{C} \cap H_2|.$$

Alors les valeurs propres de Dirichlet de ∇^2 et leurs multiplicités sur Ω/H_1 et Ω/H_2 coïncident.

²L'exemple décrit dans cette section est une élaboration d'un exemple emprunté à Peter Buser, John Conway, Peter Doyle et Dieter Semmler, *Some planar isospectral domains*, International Mathematics Research Notices (1994), 391-400.

³En particulier, la caractéristique d'Euler de Ω is $168 - 252 + 63 = 21$, qui est impaire. Donc Ω n'est pas orientable ; c'est la somme connectée de 23 plans projectifs réels.

Chacun de Ω/H_1 et Ω/H_2 a $168/24 = 7$ faces triangulaires, et chacun d'eux est inclus dans le plan, mais la configuration des faces est différente. Donc ce sont des exemples de tambours non équivalents ayant le même spectre de Dirichlet.



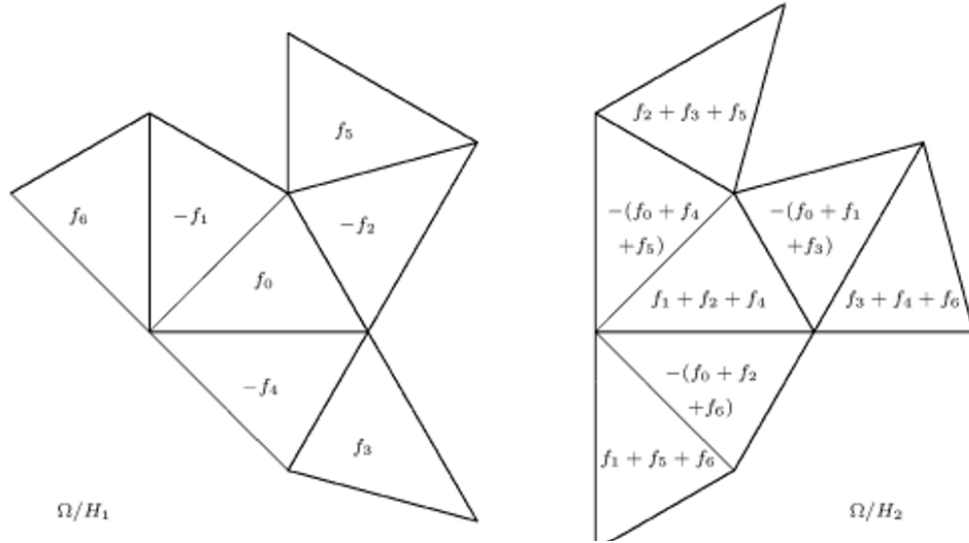
La méthode décrite ci-dessus peut même être utilisée pour donner une correspondance explicite entre les fonctions propres de ∇^2 sur Ω/H_1 et Ω/H_2 (Bérard). Prenons un espace vectoriel $\mathbb{C}[G/H_1]$ dont les éléments de base sont les cosets gauches de H_1 dans G , et faisons permuer ces éléments de base par G par multiplication à gauche. Cela donne une représentation matricielle de G sur $\mathbb{C}[G/H_1]$ dans laquelle les matrices ont la propriété que chaque colonne et chaque ligne ait un unique élément égal à 1 et les autres égaux à 0. Faisons la même chose avec H_2 , on obtient les représentations $\phi_1 : G \rightarrow GL(\mathbb{C}[G/H_1])$ et $\phi_2 : G \rightarrow GL(\mathbb{C}[G/H_2])$. L'hypothèse du théorème W.21 peut s'exprimer en disant que pour chaque élément du groupe $g \in G$, on a $\text{Tr}(g, \mathbb{C}[G/H_1]) = \text{Tr}(g, \mathbb{C}[G/H_2])$. La théorie des caractères des groupes finis ⁴ implique qu'il y ait une application linéaire inversible $\psi : \mathbb{C}[G/H_1] \rightarrow \mathbb{C}[G/H_2]$ telle que pour tout $g \in G$ et $v \in \mathbb{C}[G/H_1]$, on ait $\phi_2(g)(\psi(v)) = \psi(\phi_1(g)(v))$. Une telle application peut être utilisée pour créer des fonctions propres sur Ω/H_2 à partir des fonctions propres sur Ω/H_1 . Une façon d'expliquer cela est que la réciprocity de Frobenius donne un isomorphisme $V_\lambda^{H_1} \simeq \text{Hom}_G(\mathbb{C}[G/H_1], V_\lambda)$ (et similairement pour H_2) de telle façon que

$$V_\lambda^{H_2} \simeq \text{Hom}_G(\mathbb{C}[G/H_2], V_\lambda) \simeq \text{Hom}_G(\mathbb{C}[G/H_1], V_\lambda) \simeq V_\lambda^{H_1},$$

quand l'isomorphisme du milieu est donné par composition avec ψ .

Dans l'exemple ci-dessus, un choix possible pour ψ envoie l'élément de base $\mathbb{C}[G/H_1]$ correspondant à un vecteur ligne de longueur 3 (α, β, γ) vers la somme des éléments de base de $\mathbb{C}[G/H_2]$ correspondant aux vecteurs colonnes (u, v, w) satisfaisant $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$. Ainsi en prenant en compte l'orientation, la correspondance entre les fonctions propres est donnée par le diagramme suivant.

⁴Voir par exemple de G. D. James and M. Liebeck, *Representations and characters of groups*, 2^{ème} édition, Cambridge University Press, 2001.



Même sans savoir comment cet exemple a été construit, il est facile de vérifier que cette recette fonctionne. Il est nécessaire de remarquer que si une fonction propre qui est nulle sur la frontière était poursuivie au-delà de la frontière, elle deviendrait négative et réfléchie (selon le principe de réflexion). Donc par exemple, voyons ce qui arrive quand on va de la région du milieu de Ω/H_2 à un voisin en-dessous d'elle. En regardant Ω/H_1 , on voit que lorsqu'on passe à travers un long côté, $-f_1$ est remplacé par f_6 , et donc f_1 est remplacé par $-f_6$. De façon similaire, f_4 est remplacé par $-f_0$. Le long côté de la région de Ω/H_1 faisant intervenir f_2 est un côté frontière, donc par le principe de réflexion, f_2 est remplacé par $-f_2$. Au total, on voit que $f_1 + f_2 + f_4$ est remplacé par $-(f_0 + f_2 + f_6)$, qui correspond à la valeur fournie dans le diagramme pour Ω/H_2 .

Ce genre de vérification peut être utilisée pour l'exemple de Gordon, Webb and Wolpert du § 3.7 également. Voici la recette pour le transport des fonctions propres.

