Apprendre d'une Professeure éminente : une conversation avec Claire Voisin

Interviewée par Rob Lazarsfeld et Olivier Debarre
Édité par Keating Zelenke

Claire Voisin est une géomètre algébriste française. Ses recherches portent sur une grande variété de sujets en géométrie algébrique, et certaines de ses recherches les plus célèbres incluent sa réfutation de la conjecture de Kodaira, ses travaux sur la théorie de Hodge et ses travaux sur la conjecture de Green pour les courbes canoniques génériques. En 2016, elle a reçu la Médaille d'Or du Centre National de la Recherche Scientifique, la plus haute distinction scientifique de France. Elle a également reçu le prix Hopf en 2015 puis le prix Shaw de mathématiques en 2017. Elle est actuellement chercheuse senior au CNRS à Paris. Cette entrevue a eu lieu au Centre Simons le 15 décembre 2022.

Rob Lazarsfeld : Bon, eh bien, je suis Rob Lazarsfeld de Stony Brook, et voici Olivier Debarre. Nous tenons à remercier Claire Voisin, venue pour le colloque sur la complexité birationnelle, d'avoir accepté de venir parler avec nous. J'ai promis de parler très lentement et Claire a promis de parler fort, alors j'espère que ça se passera bien.

Claire, quand as-tu commencé à t'intéresser aux mathématiques ? Lorsque tu étais enfant, vos parents étaient-ils influents et cherchaient-ils à obtenir de vous ou de vos frères et sœurs que vous soyez intéressés par les mathématiques ?

Claire Voisin : Je pense que mon frère aîné m'a influencé en m'offrant un livre d'algèbre, qui était d'un bon niveau lycée. Pour moi, cela a été une belle découverte de mathématiques très substantielles avec des preuves très satisfaisantes. Je pense que c'est bien plus que ce que j'ai appris à l'école. Pendant très longtemps, j'ai aimé les mathématiques mais je ne les prenais pas très au sérieux car elles n'étaient pas assez approfondies. Peut-être que j'étais plus ambitieuse. Je pensais que les mathématiques n'étaient qu'un jeu.

Aussi, pendant très longtemps, ce que l'on voit quand on apprend les mathématiques, ce sont des mathématiques déjà faites, déjà prouvées. On est censé apprendre à être intelligent, à comprendre les preuves qui ont été faites par d'autres personnes, peut-être à inventer quelques astuces, mais cela ressemble à un jeu. Et puis au final, il n'y a pas de conséquences graves. C'est bien plus tard que j'ai vraiment été attirée par les mathématiques, par le sentiment que c'était très important et qu'on pouvait réaliser quelque chose de très nouveau en faisant des mathématiques. Ce n'est pas seulement un jeu pour montrer que vous êtes intelligent.

RL : Quand avez-vous découvert la géométrie algébrique pour la première fois ? C'était quand vous étiez au collège ou après le lycée à l'École Normale ?

CV : Je pense que j'ai vraiment découvert les mathématiques, la géométrie algébrique, seulement lorsque j'étais au niveau master. Ce que j'ai découvert en arrivant dans les classes préparatoires, c'est le système français juste entre le lycée et l'université. Je pense que c'est justement là que j'ai

Référence : https://scgp.stonybrook.edu/archives/40101.

vu que les mathématiques pouvaient être profondes. Par exemple, j'ai adoré la topologie générale selon laquelle vous pouvez définir une fonction comme étant continue simplement en théorie, car elle préserve un certain type de sous-ensemble que vous avez défini avant. J'ai trouvé ça merveilleux, surtout parce que je ne suis pas très douée en informatique, donc cela avait l'air beaucoup plus facile. Déjà, je trouvais ça sympa, mais je ne dirais pas que j'ai appris la géométrie algébrique à cette époque parce que cela n'était pas du tout enseigné. Quand, plus tard, j'ai étudié à l'École Normale, j'ai alors eu par exemple des cours d'algèbre commutative, mais aussi de nombreux cours de géométrie.

Pour moi, venir à la géométrie algébrique, c'est d'abord découvrir différents types de géométrie, par exemple la géométrie riemannienne - j'ai beaucoup aimé. Finalement, j'ai découvert la géométrie algébrique assez tard.

RL : Quel a été votre premier cours de géométrie algébrique ?

CV : Je pense avoir d'abord lu le livre de Hartshorne, puis Beauville a donné un Master II de géométrie algébrique. Mais je pense que c'était trop tard dans un certain sens parce que j'avais déjà lu de nombreux livres sur l'algèbre commutative, puis Hartshorne, puis des livres de Mumford et Fulton dans lesquels j'ai appris beaucoup de géométrie algébrique. En fait, je ne l'ai pas vraiment appris en suivant des cours, alors que d'autres cours qui étaient très importants pour moi m'ont bien sûr appris beaucoup de géométrie, notamment, comme je l'ai dit, la géométrie riemannienne de Marcel Berger qui était en fait merveilleuse.

Olivier Debarre : Concernant la façon dont vous faites vos recherches, comment la décririez-vous ? Avez-vous un ensemble de problèmes que vous stockez dans votre tête et sur lesquels vous revenez de temps en temps ? Des idées à ce sujet ?

CV : C'est vraiment le problème le plus difficile, quand on fait des recherches, ce problème de comment se gérer soi-même, en un sens, en faisant des mathématiques. Oui, c'est vrai que j'ai un petit livre où j'ai une liste de problèmes, mais c'est plus pour me faire réfléchir. Parfois, je fais des recherches qui fonctionnent bien, peut-être plus ou moins, et du coup j'ai une autre idée qui me semble beaucoup plus attrayante, et puis j'y vais. Je pense bien sûr que je devrais essayer de travailler de manière plus organisée sur les questions difficiles. Le problème est que si vous êtes complètement bloqué, vous devez faire quelque chose. Je regrette beaucoup de ne pas avoir cette capacité à rester sur un seul problème.

J'ai été vraiment attirée par les mathématiques, par le sentiment que c'était très important et qu'on peut réaliser quelque chose de très nouveau en faisant des mathématiques.

Claire Voisin

J'ai quelques questions dont je sais qu'elles me sont essentielles, comme la conjecture de Hodge généralisée ou la conjecture de Bloch pour les cycles nuls sur les surfaces ou encore des exemples précis de ces conjectures qui m'intéressent beaucoup, comme la conjecture de Hodge généralisée pour les hypersurfaces. Les exemples sont très faciles à produire, nous savons ce qui est prédit et ce que nous devrions pouvoir prouver. Mais j'ai essayé, bien sûr, et de temps en temps, j'essaye encore, mais ça ne marche pas. J'admire beaucoup ces gens qui s'attardent sur un problème précis et qui, à la fin, obtiennent un résultat solide, un résultat important, quelque chose qu'ils voulaient vraiment faire. Mais dans la pratique, j'ai découvert que j'avais de bonnes idées juste par hasard, et aussi parfois simplement en travaillant sur différentes choses qui me faisaient revenir brusquement sur d'autres questions. Donc, ma réponse est non, je ne sais pas comment je décrirais mon processus de recherche.

RL : Par exemple, pour votre travail sur le problème Kodaira, comment en êtes-vous arrivée là ? Avez-vous soudainement pensé, si je prends ce graphique et...

CV : Laissez-moi me souvenir. Je pense que j'étais à Oberwolfach et tout d'un coup, peut-être en discutant avec Demailly, j'ai soudain pensé à cette construction. Eh bien, la première chose que j'ai prouvée n'était pas si générale. J'ai fait cette construction, j'ai vu qu'elle avait de bonnes propriétés, et puis très vite j'ai vu que je pouvais faire beaucoup mieux parce que...

C'était un exemple typique de recherche qui ne représentait presque aucun travail pour moi. Je dois dire aussi que mon travail sur la spécialisation de la décomposition de la diagonale qui a finalement été très utilisé par d'autres personnes a été très facile, et ce n'était pas beaucoup de travail.

Une fois qu'on a une bonne idée, il est très facile de l'exploiter. Après cela, bien sûr, vous aurez peut-être besoin d'un travail de développement plus sérieux, pour vraiment obtenir l'ensemble des applications. Mais au début, c'est juste une bonne idée. Vous pouvez alors facilement obtenir un bon résultat avec peu de travail technique, ce qui est bien sûr très agréable. Le seul cas où j'ai vraiment travaillé dur, c'est mon travail sur les syzygies. Parce qu'alors, j'ai passé beaucoup de temps sur ce travail, plusieurs mois, peut-être six ou neuf mois ou quelque chose comme ça. Mais parce que j'ai eu cette idée, cette formulation des syzygies en termes géométriques comme étant décrites par des sections d'un certain faisceau de lignes. J'avais cette interprétation dès le début et je pensais que je voulais l'exploiter. Le contexte des courbes sur les surfaces K3 était très naturel car vous aviez la preuve qu'elles étaient générales Brill-Noether. II y a aussi cette théorie que vous aviez développée, des fibrés vectoriels sur les surfaces K3. Il y avait donc des outils. Puis j'ai commencé à calculer, à calculer. J'ai trop calculé, je pense. Enfin, je pense que ma preuve était trop compliquée et maintenant elle a été simplifiée et simplifiée. Ce n'est pas un bon exemple de mon travail car, d'une certaine manière, ma preuve était trop compliquée.

RL : J'ai toujours eu l'impression que vos recherches étaient très basées sur des exemples. Beaucoup de vos contributions impliquaient d'une manière ou d'une autre des exemples spécifiques plutôt que de la théorie générale. Êtes-vous d'accord avec le fait que vous développez la théorie à travers des exemples, tandis que d'autres commencent par la théorie ?

CV : Je n'aime pas beaucoup les exemples. Une fois qu'on a la théorie, essayer de passer à l'exemple suivant puis lui appliquer la théorie n'est pas très intéressant à mes yeux. Je ne me décrirais pas comme une personne travaillant avec des exemples. Je pense qu'en général, ce n'est presque jamais une situation particulière qui est importante mais plutôt les outils, les méthodes qui sont développés.

Je pense qu'en général, ce n'est presque jamais une situation particulière qui est importante mais plutôt la théorie qui est développée.

Claire Voisin

Je pense que c'est une question générale en géométrie algébrique car nous disposons de nombreux outils théoriques, de grandes théories, de belles théories. Mais une fois que vous avez assimilé ces théories, vous ne savez toujours pas vraiment ce qu'est la géométrie algébrique. C'est une grande chance qu'au cours des 20 dernières années, nous ayons découvert plusieurs classes de variétés algébriques que nous pouvons raisonnablement étudier avec ces outils généraux. Je veux dire, par exemple, les variétés rationnellement connectées. En un certain sens, il s'agit d'une classe de variétés assez récente, bien plus intéressante que les variétés de Fano, trop restreintes. Un autre exemple est celui des variétés hyper-Kahler, sur lesquelles nous travaillons avec plusieurs personnes.

Je pense que nous avons peut-être maintenant un meilleur équilibre entre la théorie générale, par exemple la théorie abstraite des schémas, ou théorie K générale, très à la mode dans les années 90, et la connaissance de la géométrie des variétés algébriques. Nous disposons désormais de davantage de situations ou d'instances dans lesquelles nous pouvons appliquer ces outils généraux. Par contre, je suis surprise que vous m'ayez décrite comme quelqu'un qui part d'exemples car ce n'est pas ainsi que je vois mon travail

RL : Peut-être que je parle de calculs plus spécifiques plutôt que de théorie générale.

CV : Vous avez raison. Il est clair que je suis plutôt une résolveuse de problèmes. D'un autre côté, par exemple, je pense que la personne qui m'a le plus influencé est certainement Griffiths. J'aime le style de Griffiths qui consiste à faire de la belle théorie. Je pense que j'ai énormément appris de sa façon de faire des mathématiques. Sa façon de décrire les structures de Hodge, leurs modules, le domaine des périodes, comment elles varient en développant la théorie dans tous ces longs articles. Par exemple, ce qu'il a fait sur les variations infinitésimales des structures de Hodge. Il a cette façon de penser longue et théorique que j'aime beaucoup. C'était très important pour moi. Après, c'est vrai que... Oui, je crois que j'aime résoudre, peut-être appliquer ces outils à une classe précise d'objets.

OD : Changeons de sujet. Comment décririez-vous vos relations avec vos étudiants ? Comment leur trouvez-vous des problèmes ?

CV : Je pense que la plupart du temps, c'est plus ou moins inspiré de ce que je fais à ce moment-là. Dans le passé, j'avais l'habitude de poser des problèmes plus difficiles pour lesquels je n'avais pas de suggestions vraiment précises. Mais je trouve maintenant que c'est trop dangereux.

La thèse de doctorat en France dure trois ans. Pendant ce temps, l'étudiant doit produire quelque chose. C'est une courte période, et ce n'est pas bon. C'est très différent du style américain, où la thèse de doctorat est plus longue. J'apprécie cela car quand on discute avec des doctorants américains, ils sont bien plus matures que nos étudiants. La raison est très simple : notre thèse de doctorat est trop courte. Et donc, si l'étudiant veut juste travailler sur des problèmes difficiles, alors les trois années s'écoulent et il n'y a pas de travail rédigé, ce qui signifie que la période postdoctorale est consacrée à la rédaction de la thèse.

Peut-être que mon style n'est pas toujours bon pour l'élève, mais parfois il a été vraiment excellent. Par exemple, les thèses de doctorat de Grivaux et Charles étaient très bonnes. Leurs recherches étaient issues d'un développement de mes recherches, mais elles allaient beaucoup plus loin. Ces derniers temps, c'est une évolution de ce que je fais qui ne semble ni trop problématique ni trop difficile. Je devrais peut-être être plus ambitieuse. Je ne sais pas.

Pour moi, le point important est que les doctorants tentent d'avoir une vision globale de la géométrie algébrique. Je pense que le pire danger pendant la thèse de doctorat, surtout en géométrie algébrique, est de trop se spécialiser. C'est là le danger car, comme je l'ai dit, on travaille avec des classes d'objets sinon la théorie générale est trop générale, on ne peut rien dire. Dans ces classes d'objets, vous allez parfois vous spécialiser et étudier quelque chose de plus spécifique. Le danger survient lorsqu'un doctorant estime que l'objet qu'il a regardé est suffisant peut-être pas pour le reste de sa vie, mais pour les prochaines années, ce qui n'est absolument pas bon.

La géométrie algébrique est en réalité un vaste domaine avec tant de classes de géométries et il y a tant de formes différentes de méthodes à utiliser. Comme je l'ai dit, vous avez la théorie K, la topologie, la cohomologie algébrique de Rham... Il existe de nombreuses façons d'aborder la géométrie. Il existe également des développements dans le domaine de la géométrie différentielle complexe. Par exemple, les gerbes de fibres stables, les métriques de Hermite-Einstein, tous ces développements autour de la stabilité. Il est également bon de connaître un peu de géométrie différentielle complexe.

Pour moi, pendant la thèse, il est agréable de produire des articles, mais il est plus important d'avoir une vision de ce qu'est la géométrie algébrique et des différents types d'outils disponibles. Cette compréhension est plus importante que d'avoir travaillé sur un seul problème.

RL : Comment restez-vous au courant du terrain ? Vous avez une vision très large de la géométrie algébrique. Lisez-vous systématiquement les prépublications ?

CV : Avant, je lisais beaucoup d'articles, mais maintenant je lis beaucoup moins. Au contraire, je préfère suivre les conférences, car j'en apprends beaucoup plus. Mais quand j'étais jeune, j'ai lu énormément de journaux.

RL : Laissez-moi juste vous demander, quelle proportion avez-vous réellement lu des EGA [Éléments de Géométrie Algébrique de Grothendieck et Dieudonné], par exemple ? Peut-être que je ne devrais pas vous le demander.

CV : Pas tant que ça. D'une certaine manière, je n'ai jamais abordé la géométrie algébrique de cette façon car, comme je l'ai dit, je m'intéressais auparavant à d'autres géométries. Par exemple, quand j'étais jeune et encore aujourd'hui, je trouvais extraordinaire le lien entre la géométrie algébrique complexe et la géométrie symplectique.

Pour travailler en géométrie algébrique, il y a bien sûr des outils très importants qu'il faut maîtriser, mais on n'a pas besoin dès le début d'outils d'un degré de généralité incroyable. Certes, vous réalisez à un moment donné que vous ne devriez pas toujours travailler sur des champs, et certainement vous réalisez à un moment donné que vous ne pouvez pas uniquement travailler sur des champs algébriquement fermés, car alors vous manquez tellement de situations sur les champs de fonctions, mais toutes ces choses je les ai apprises progressivement. En fait, j'ai une formation en géométrie plus traditionnelle, donc je n'ai pas d'abord abordé la géométrie algébrique en absorbant ce langage abstrait. J'ai lu beaucoup plus d'articles de Griffiths que de Grothendieck.

OD : Sur un plan plus personnel, vous avez élevé cinq enfants. Comment avez-vous concilié votre vie professionnelle et votre vie personnelle ?

CV : Je n'utiliserais pas le terme "concilier". Je pense qu'avoir une famille m'a été très utile car quand on reste coincé dans les mathématiques, cela peut être très difficile. Moi, je ne suis pas une personne si forte et je n'ai pas une si haute opinion de moi-même que je puisse continuer à faire des mathématiques sans déprimer si ça ne marche pas. Pour moi, avoir une vie de famille était une façon de me défendre contre la dépression causée par la recherche mathématique.

C'est bien de produire des articles, mais il est plus important d'avoir une vision de ce qu'est la géométrie algébrique et des différents types d'outils disponibles. Cette compréhension est plus importante que d'avoir travaillé sur un seul problème.
Claire Voisin

RL : Quand vos enfants étaient jeunes, travailliez-vous principalement à la maison ? Si vous aivez une demi-heure de temps libre, pouviez-vous réellement penser aux mathématiques ? J'imagine que si vous avez beaucoup d'enfants, vous devez saisir des moments ici et là.

CV : J'ai toujours essayé. Mais vous savez, parfois vous agissez comme si vous travailliez. C'est vrai que s'il y a du bruit, s'il y a des enfants, vous allez à votre bureau dans la maison, vous essayez de travailler, mais vous ne travaillez pas vraiment. Mais j'ai toujours pensé que... je n'ai jamais arrêté.

À un moment donné, vous ne le savez peut-être pas, j'ai eu deux jeunes enfants à moins d'un an d'intervalle. Durant cette période, c'était dur de travailler mais je n'ai jamais arrêté. Honnêtement, quand on arrête de faire des mathématiques, je veux dire vraiment, arrêter pendant plusieurs mois ou un an, c'est difficile de revenir.

Cela me rappelle une histoire amusante. J'ai eu une discussion avec Hélène Esnault à propos de mathématiques, et pour une raison quelconque, à un moment donné, j'ai mentionné mes enfants, quelque chose sur ma vie de famille.

"Mais ceci est votre jardin secret", dit-elle. Pour moi, c'était absurde car mon jardin secret, c'est les mathématiques. C'est tellement clair pour moi ; quand on a cinq enfants, les cinq enfants ne sont pas votre jardin secret.

RL : En avez-vous déjà parlé à Christopher Hacon ? Il a six enfants.

CV : je sais. Il me bat. Il semble très bien gérer cela. Peut-être que, comme moi, il trouve que cela aide plutôt que de déranger.

RL : Permettez-moi de revenir sur une autre question concernant votre style de recherche. Est-ce que vous revenez de temps en temps sur d'anciens problèmes, ou quand vous en avez fini avec quelque chose, est-ce que vous passez définitivement à autre chose ?

CV : Absolument[, j'y retoume parfois]. Par exemple, lorsque j'ai fait ce travail sur l'application de la décomposition de la diagonale comme invariant birationnel. C'était un argument de spécialisation, et l'idée de recourir à la spécialisation était tout à fait récente. Mais je me souviens que cette question de la rationalité du quadruple cubique était déjà très à la mode à mes débuts. C'est donc tout naturellement après mes travaux sur le théorème de Torelli pour les quadruples cubiques que je me suis intéressée au problème de la rationalité.

À cette époque, je connaissais les idées autour de la décomposition de la diagonale car j'étais très intéressée par l'approche de Bloch-Srinivas du théorème de Mumford qui est extrêmement élégante. C'est quelque chose qui vient naturellement comme outil pour étudier les groupes de Chow. Mais typiquement dans le cadre de Bloch-Srinivas, ceci est un énoncé avec des coefficients rationnels. Mais je me suis rappelée que j'avais fait cette observation que la décomposition de la diagonale à coefficients intégraux est un obstacle à la rationalité, une condition nécessaire de la rationalité.

Mais bien sûr, j'étais coincée à ce moment-là alors je suis passée à autre chose. Un autre exemple est le problème de Kodaira. Je le savais bien avant d'y penser. Je pense qu'il est très important pour moi d'avoir cette question en tête. C'est vraiment ça qui fait qu'il est possible de réaliser soudainement que l'on peut appliquer une nouvelle idée à un problème classique.

Alors oui, je pense qu'il y a une continuité et il y a beaucoup de questions qui sont là, dans un fond de ma tête, depuis très longtemps, ça ne veut pas dire que je ne vais plus y travailler. Au contraire, je revenais à ces questions classiques. J'ai quelques questions que je trouve importantes et j'y reviens régulièrement.

RL : Je peux me tromper complètement, mais... Savez-vous ce que vous allez faire le mois prochain? Je considère votre travail comme étant en quelque sorte plus opportuniste.

CV : Ce n'est pas ma façon de travailler.

RL : Oui, c'était ma pensée.

CV : Non, je sais certainement que j'ai quelques choses à terminer. J'aime le moment où j'ai fini un travail et où je regarde autour de moi avec une certaine liberté, puis je commence quelque chose, peut-être quelque chose qui ne fonctionnera pas. Mais non, il n'y a pas vraiment de préméditation.