

9. Pavages

En général, par “un *pavage* \mathcal{T} dans \mathbb{R}^d ” on désigne l’objet suivant. On considère une suite finie $\{\tau_1, \dots, \tau_N\}$ de sous-ensembles bornés fermés de \mathbb{R}^d homéomorphe à la sphère unité. On appelle ces sous-ensembles des *prototuites*. On suppose habituellement que les prototuites sont des polytopes dans \mathbb{R}^d avec une unique cellule d -dimensionnelle qui est l’intérieur de la prototuite, mais cette supposition peut être omise.

Un pavage \mathcal{T} de \mathbb{R}^d est alors un recouvrement de \mathbb{R}^d par des ensembles d’intérieurs disjoints, chacun d’entre eux est une *tuile*, c’est-à-dire un translaté de l’une des prototuites.

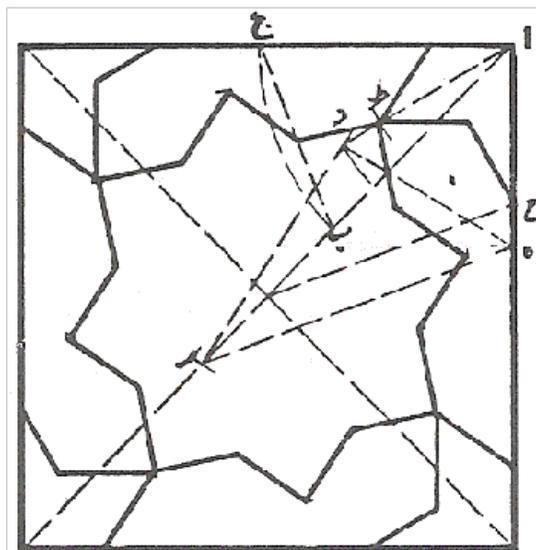


FIGURE 1 : Prototuites pour pavages

Étant donné un pavage \mathcal{T} de \mathbb{R}^d , on peut former la fermeture de son orbite par translations. Une métrique sur les pavages est définie en disant que deux pavages sont proches s’ils sont presque toujours en accord sur une grande sphère centrée à l’origine dans \mathbb{R}^d (pour davantage de détails et des définitions équivalentes, voir par exemple [1], [6]).

Les pavages peuvent être périodiques ou apériodiques. Il y a de nombreux exemples de pavages périodiques, alors que les exemples les plus connus de pavages apériodiques sont les pavages de Penrose [30]. Des sortes similaires de pavages apériodiques ont été largement étudiées en physique des quasi-cristaux (cf. par exemple [5], [6]). On a compris très tôt pendant le développement de la géométrie non commutative (cf. [16] et p. 5–7, p. 88–93, et p. 175–178 de [13]) que les pavages de Penrose fournissent une classe intéressante d’espaces non commutatifs.

<https://arxiv.org/pdf/math/0601054>.

Traduction : Denise Vella-Chemla, juin 2025.

En fait, on peut considérer, sur l'ensemble Ω des pavages \mathcal{T} par des prototyles $\{\tau_1, \dots, \tau_N\}$, la relation d'équivalence donnée par l'action de \mathbb{R}^d par translations, i.e. on identifie des pavages qui peuvent être obtenus l'un à partir de l'autre par des translations. Dans le cas des pavages apériodiques, cela amène le type de construction de quotient décrit dans la Section 4, qui amène naturellement aux espaces non commutatifs. On peut trouver une description explicite de cet espace non commutatif pour le cas des pavages de Penrose dans le § II.3 de [13].

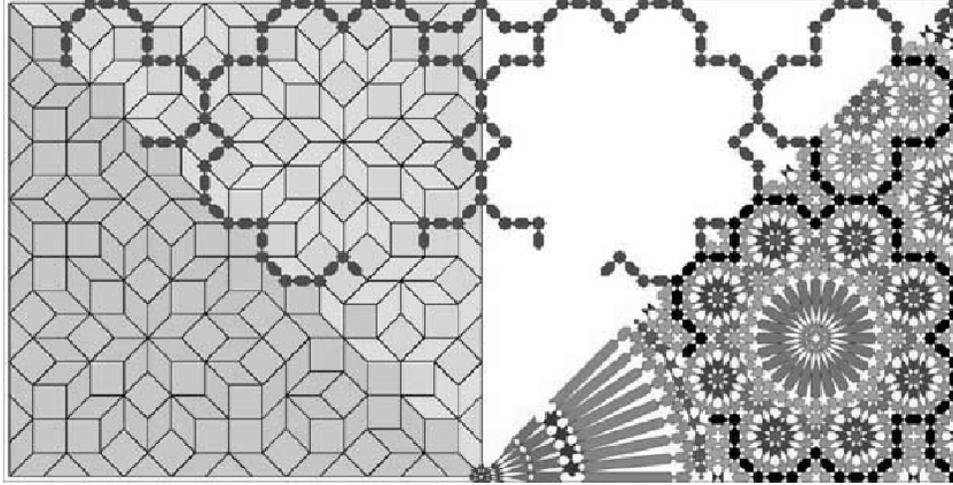


FIGURE 2 : Pavages quasi-périodiques et zelliges.

Pour simplifier légèrement l'image, on peut considérer le problème similaire (de façon duale) de l'étude d'arrangements de points dans \mathbb{R}^d plutôt que l'étude de pavages. C'est la formulation utilisée dans la théorie des solides apériodiques et des quasi-cristaux (cf. [6]). Alors, au lieu des pavages \mathcal{T} , on considère des sous-ensembles discrets de points $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^d$. Un ensemble \mathcal{L} est un ensemble de Delaunay s'il existe des rayons $r, R > 0$ tels que toute sphère ouverte de rayon r rencontre \mathcal{L} en au plus un point et également tels que toute sphère fermée de rayon R rencontre \mathcal{L} en au moins un point. On peut décrire \mathcal{L} par la mesure de comptage

$$\mu_{\mathcal{L}}(f) = \sum_{x \in \mathcal{L}} f(x),$$

et on peut prendre la fermeture de l'orbite Ω de l'action de \mathbb{R}^d par les translations

$$\mu_{\mathcal{L}} \mapsto T_{-a}\mu_{\mathcal{L}} = \mu_{\mathcal{L}} \circ T_a, \quad \text{pour } a \in \mathbb{R}^d,$$

dans l'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ des mesures de Radon avec la *-topologie faible. La fermeture convexe de \mathcal{L} est le système dynamique (Ω, T) , où T dénote l'action de \mathbb{R}^d par des translations.

Ce système dynamique détermine l'espace non commutatif correspondant, le quotient de Ω par les translations, notamment la C^* -algèbre produit croisé

$$\mathcal{A} = C(\Omega) \rtimes_T \mathbb{R}^d. \tag{1}$$

En fait, on peut aussi considérer le groupoïde avec comme ensemble d'unités les flèches transversales

$$X = \{\omega \in \Omega : 0 \in \text{Support}(\omega)\}, \tag{2}$$

de la forme $(\omega, a) \in \Omega \times \mathbb{R}^d$, et avec comme applications domaine source et domaine image $s(\omega, a) = T_{-a}\omega$, $r(\omega, a) = \omega$ et $(\omega, a) \circ (T_{-a}\omega, b) = (\omega, a + b)$ (cf. [6]). Cela définit un groupoïde localement compact $\mathcal{G}(\mathcal{L}, X)$.

Les C^* -algèbres $C^*(\mathcal{G}(\mathcal{L}, X))$ et $C(\Omega) \rtimes_T \mathbb{R}^d$ sont équivalentes selon Morita.

Dans le cas où \mathcal{L} est un arrangement périodique de points avec groupe de symétrie cocompact $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$, l'espace Ω est un espace commutatif ordinaire, qui est topologiquement un tore $\Omega = \mathbb{R}^d/\Gamma$. La C^* -algèbre \mathcal{A} est dans ce cas isomorphe à $C(\widehat{\Gamma}) \otimes \mathcal{K}$, où \mathcal{K} est l'algèbre des opérateurs compacts et où $\widehat{\Gamma}$ est le dual de Pontrjagin du groupe commutatif $\Gamma \cong \mathbb{Z}^d$, isomorphe à T^d , obtenu en prenant le dual de \mathbb{R}^d modulo le treillis réciproque

$$\Gamma^\# = \{k \in \mathbb{R}^d : \langle k, \gamma \rangle \in 2\pi\mathbb{Z}, \forall \gamma \in \Gamma\}. \quad (3)$$

Par conséquent, dans le langage de la physique, $\widehat{\Gamma}$ est identifié à la zone de Brillouin $B = \mathbb{R}^d/\gamma^\#$ du cristal périodique \mathcal{L} (cf. Section 8). Dans ce cas périodique, la transversale $X = \mathcal{L}/\Gamma$ est un ensemble fini de points. La C^* -algèbre groupoïde $C^*(\mathcal{G}(\mathcal{L}, X))$ est dans ce cas isomorphe à $C(\widehat{\Gamma}) \otimes M_k(\mathbb{C})$, où k est le cardinal de la transversale X . Ainsi, le cas périodique revient dans le royaume des espaces commutatifs, alors que les formes apériodiques donnent vraiment naissance à des espaces effectivement non commutatifs, qui sont hautement non triviaux et intéressants.

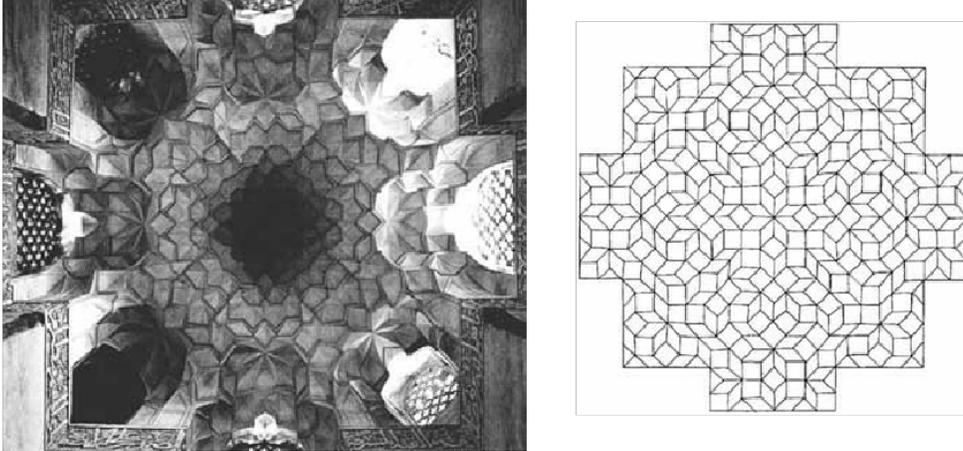


FIGURE 3 : Pavages quasi-périodiques et muqarnas.

L'une des sources les plus riches de pavages intéressants, c'est l'ensemble des *zelliges* et des *muqarnas* largement utilisés en architecture ancienne. Appelés collectivement des "arabesques", non seulement ces motifs présentent des géométries hautement non triviales, mais ils reflètent l'interaction imbriquée entre la philosophie, les mathématiques et l'esthétique (cf. [4], [9]). Quelques-unes des meilleures études sur les zelliges et les muqarnas se concentrent sur les motifs *périodiques* 2-dimensionnels. Par exemple, on trouve dans [4], p. 43 :

"Comme la Nature est basée sur le rythme, l'arabesque est conceptuellement rythmique. Elle reflète le mouvement marqué par la récurrence régulière de motifs, éléments, phénomènes ; elle a ainsi une certaine périodicité."

Il semble selon ce point de vue que seule la théorie des pavages périodiques (i.e. la géométrie commutative) devrait être adaptée à ce contexte. Pourtant, des études plus récentes (cf. [9], [10], [11], [28]) suggèrent que la conception des zelliges et des muqarnas ne se limitait pas aux groupes cristallographiques 2-dimensionnels, mais, spécialement pendant la période témouride, elle étudiait également des motifs *apériodiques* de symétrie 5, analogue à ceux observés dans les quasi-cristaux. Ceci n'est pas accidentel et a dû certainement être le résultat d'une théorie géométrique de haut niveau : déjà le livre historique de Abu'l-Wafa' al-Buzjani (940-998) au sujet des constructions géométriques [38] fait explicitement mention de rencontres et discussions lors desquelles des mathématiciens étaient directement mis à contribution par des artisans dans la conception des motifs des arabesques.

L'apparence des pavages apériodiques est documentée dans le manuscrit perse anonyme [2] "*Sur des figures congruentes et similaires imbriquées*", qui date du XIe-XIIIe siècle. Certains de ces aspects apériodiques des zelliges et muqarnas ont été étudiés par Bulatov dans le livre [9], qui contient également la traduction russe de Vil'danova de l'ancien texte perse.

10. Espaces non commutatifs provenant de systèmes dynamiques

On va regarder quelques exemples d'espaces non commutatifs associés à un système dynamique discret T , par exemple ceux donnés par un automorphisme d'un ensemble de Cantor. De tels espaces non commutatifs ont été intensivement étudiés dans une série d'articles (cf. [22] et [36] pour un survol) où C. Skau et ses collaborateurs ont obtenu de remarquables résultats sur la classification des actions minimales de \mathbb{Z} sur des ensembles de Cantor en utilisant la K -théorie de la C^* -algèbre associée.

Il a été trouvé récemment (cf. [17], [18], § 4 de [27] et § 8 de [26]) que le tore d'application de tels systèmes peut être utilisé pour modéliser le "graphe dual" des fibres pour les nombres premiers archimédiens des surfaces arithmétiques, en géométrie d'Arakelov, dans le cas particulier où le système dynamique T est un sous-décalage de type fini qui encode l'action d'un groupe de Schottky $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sur son ensemble limite $\Lambda_\Gamma \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. En fait, les résultats de [17] étaient motivés par des résultats précédents de Manin [25] qui avait fourni un modèle géométrique de tels graphes duaux en fonction de la géométrie hyperbolique et des uniformisations de Schottky.

Plus généralement, étant donné un alphabet des lettres $\{\ell_1, \dots, \ell_N\}$, l'espace \mathcal{S}_A^+ d'un sous-décalage de type fini contient toutes les suites *admissibles* infinies à droite

$$w = a_0 a_1 a_2 \dots a_n \dots \quad (4)$$

de lettres de l'alphabet. Notamment, $a_i \in \{\ell_1, \dots, \ell_N\}$ étant sujet à une condition d'admissibilité spécifiée par une matrice A de taille $N \times N$ avec ses éléments dans $\{0, 1\}$. Deux lettres ℓ_i et ℓ_j dans l'alphabet peuvent apparaître comme lettres successives a_k, a_{k+1} dans le mot w si et seulement si l'entrée A_{ij} de la matrice d'admissibilité A est égale à 1. On définit de façon similaire l'espace \mathcal{S}_A comme l'ensemble des suites doublement infinies admissibles

$$w = \dots a_{-m} \dots a_{-2} a_{-1} a_0 a_1 a_2 \dots a_n \dots \quad (5)$$

Les ensembles \mathcal{S}_A^+ and \mathcal{S}_A ont un choix naturel d'une topologie. En fait, sur \mathcal{S}_A , on peut mettre la topologie engendrée par les ensembles $W^s(x, \ell) = \{y \in \mathcal{S}_A \mid x_k = y_k, k \geq \ell\}$, et les $W^u(x, \ell) = \{y \in$

$\mathcal{S}_A | x_k = y_k, k \leq \ell$ pour $x \in \mathcal{S}_A$ et $\ell \in \mathbb{Z}$. Cela induit une topologie avec des propriétés analogues sur \mathcal{S}_A^+ en la réalisant comme un sous-ensemble de \mathcal{S}_A , par exemple, en étendant chaque séquence sur la gauche par une suite constante. On considère alors sur \mathcal{S}_A (ou sur \mathcal{S}_A^+) l'action du décalage des deux côtés (resp. d'un seul côté) T défini par $(Tw)_k = a_{k+1}$, où les a_k sont les lettres du mot w . Notamment, le décalage d'un seul côté sur \mathcal{S}_A^+ est de la forme

$$T(a_0 a_1 a_2 \dots a_\ell \dots) = a_1 a_2 \dots a_\ell \dots \quad (6)$$

alors que le décalage des deux côtés sur \mathcal{S}_A agit comme

$$T\left(\begin{array}{cccccccc} \dots & a_{-m} & \dots & a_{-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_\ell & \dots \\ \dots & a_{-m+1} & \dots & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{\ell+1} & \dots \end{array} \right) = \quad (7)$$

Typiquement, les espaces \mathcal{S}_A^+ et \mathcal{S}_A sont des ensembles de Cantor. Le décalage d'un seul côté T de (??) est une application surjective continue sur \mathcal{S}_A^+ , alors que le décalage des deux côtés T de (??) est un homéomorphisme de \mathcal{S}_A .

Par exemple, soit Γ un groupe libre à g générateurs $\{\gamma_1, \dots, \gamma_g\}$. Considérons l'alphabet $\{\gamma_1, \dots, \gamma_g, \gamma_1^{-1}, \dots, \gamma_g^{-1}\}$. Alors, on peut considérer les mots infinis à droite, ou infinis à droite et à gauche contenant ces lettres, sans annulations, c'est-à-dire, sujets à la règle d'admissibilité que $a_{k+1} \neq a_k^{-1}$. Cela définit un sous-décalage de type fini où la matrice A est la matrice symétrique $2g \times 2g$ avec $A_{ij} = 0$ pour $|i - j| = g$ et $A_{ij} = 1$ sinon. Supposons que Γ est un groupe de Schottky de genre g , i.e. un sous-groupe discret finiment engendré $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, isomorphe à un groupe libre à g générateurs, où tous les éléments non triviaux sont hyperboliques. Alors les points dans \mathcal{S}_A^+ paramétrisent les points dans l'ensemble limite $\Lambda_\Gamma \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (l'ensemble des points d'accumulation des orbites de Γ). Les points dans \mathcal{S}_A paramétrisent les géodésiques dans l'espace hyperbolique trois-dimensionnel réel \mathbb{H}^3 avec pour extrémités des points dans l'ensemble limite Λ_Γ .

La paire (\mathcal{S}_A, T) est un exemple typique d'une classe intéressante de systèmes dynamiques, notamment, c'est un *espace de Smale*. Cela signifie que localement, \mathcal{S}_A peut être décomposé en le produit de directions d'expansion et de contraction pour T . Notamment, les propriétés suivantes sont satisfaites :

- Pour tout point $x \in \mathcal{S}_A$, il existe des sous-ensembles $W^s(x)$ et $W^u(x)$ de \mathcal{S}_A , tels que $W^s(x) \times W^u(x)$ est homéomorphe à un voisinage de x .
- L'application T se contracte sur $W^s(x)$ et se dilate sur $W^u(x)$, et $W^s(Tx)$ et $T(W^s(x))$ sont en accord dans un certain voisinage de x , et il en est de même de $W^u(Tx)$ et $T(W^u(x))$.

Une construction de Ruelle montre qu'on peut associer des C^* -algèbres différentes aux espaces de Smale (cf. [35], [32], [33]). Pour les espaces de Smale comme (\mathcal{S}_A, T) , il y a quatre possibilités de base : l'algèbre produit croisé $C(\mathcal{S}_A) \rtimes_T \mathbb{Z}$ et les C^* -algèbres $C^*(\mathcal{G}^s) \rtimes_T \mathbb{Z}$, $C^*(\mathcal{G}^u) \rtimes_T \mathbb{Z}$, $C^*(\mathcal{G}^a) \rtimes_T \mathbb{Z}$ obtenues en considérant l'action du décalage T sur la C^* -algèbre groupoïde associée aux groupoïdes \mathcal{G}^s , \mathcal{G}^u , \mathcal{G}^a des relations d'équivalence stable, instable et asymptotique sur (\mathcal{S}_A, T) .

Le premier choix, $C(\mathcal{S}_A) \rtimes_T \mathbb{Z}$, est relié de façon ténue au système dynamique continu donné par le tore d'application de T , alors qu'un choix comme $C^*(\mathcal{G}^u) \rtimes_T \mathbb{Z}$ est relié au "mauvais quotient" de \mathcal{S}_A^+ par l'action de T . Dans l'exemple du groupe de Schottky, cela correspond à l'action de Γ

sur son ensemble limite.

On peut considérer le flot de suspension \mathcal{S}_T d'un système dynamique T , c'est-à-dire, le tore d'application du système dynamique (\mathcal{S}_A, T) , qui est défini par

$$\mathcal{S}_T := \mathcal{S}_A \times [0, 1] / (x, 0) \sim (Tx, 1). \quad (8)$$

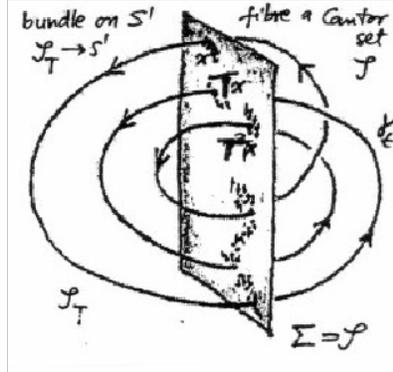


FIGURE 4 : Tore d'application

Le premier groupe de cohomologie de \mathcal{S}_T est la “cohomologie ordonnée” du système dynamique T , au sens de [7] [29]. Il y a une identification de $H^1(\mathcal{S}_T, \mathbb{Z})$ avec le K_0 -groupe de la C^* -algèbre produit croisé pour l'action de T sur \mathcal{S}_A ,

$$H^1(\mathcal{S}_T, \mathbb{Z}) \cong K_0(C(\mathcal{S}_A) \rtimes_T \mathbb{Z}). \quad (9)$$

On peut voir cela à partir de la suite exacte de Pimsner–Voiculescu (cf. [31]) pour la K -théorie d'un produit croisé par \mathbb{Z} , qui dans ce cas se réduit à

$$0 \rightarrow K_1(C(\mathcal{S}) \rtimes_T \mathbb{Z}) \rightarrow C(\mathcal{S}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{I-T^*} C(\mathcal{S}, \mathbb{Z}) \rightarrow K_0(C(\mathcal{S}) \rtimes_T \mathbb{Z}) \rightarrow 0, \quad (10)$$

On peut aussi le voir en fonction de l'isomorphisme de Thom de [14], [15].

En fait, comme cela a été vu dans la Section 2, l'une des constructions fondamentales de la géométrie non commutative (cf. [15]) est celle des *quotients d'homotopie*. Ce sont des espaces commutatifs, qui fournissent, à homotopie près, des modèles géométriques pour les espaces non commutatifs correspondants. Les espaces non commutatifs eux-mêmes, comme on va le montrer dans notre cas, apparaissent comme les espaces quotients de feuilletages sur les quotients d'homotopie à feuilles contractiles.

Pour l'espace non commutatif \mathcal{S}_A/\mathbb{Z} , avec \mathbb{Z} agissant par les puissances du décalage inversible des deux côtés, le quotient d'homotopie est précisément le tore d'application (??),

$$\mathcal{S}_T = \mathcal{S} \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}. \quad (11)$$

L'espace non commutatif \mathcal{S}/\mathbb{Z} peut être identifié à l'espace quotient du feuilletage naturel sur (??) dont la feuille générique est contractile (une copie de \mathbb{R}).

Un autre espace non commutatif associé à un sous-décalage de type fini T (qui, à équivalence de Morita près, correspond à un autre choix de la C^* -algèbre d'un espace de Smale, comme mentionné précédemment) est l'algèbre de Cuntz–Krieger \mathcal{O}_A , où A est la matrice d'admissibilité du sous-décalage de type fini (cf. [19] [20]).

Une isométrie partielle est un opérateur linéaire S satisfaisant la relation $S = SS^*S$. L'algèbre de Cuntz–Krieger \mathcal{O}_A est définie comme la C^* -algèbre universelle engendrée par les isométries partielles S_1, \dots, S_N , satisfaisant les relations

$$\sum_j S_j S_j^* = I \tag{12}$$

$$S_i^* S_i = \sum_j A_{ij} S_j S_j^*. \tag{13}$$

Dans le cas d'un groupe de Schottky $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ de genre g , l'algèbre de Cuntz–Krieger \mathcal{O}_A peut être décrite en fonction de l'action du groupe libre Γ sur son ensemble limite $\Lambda_\Gamma \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (cf. [34], [37]), de telle façon qu'on peut regarder \mathcal{O}_A comme un espace non commutatif en remplaçant le quotient classique Λ_Γ/Γ ,

$$\mathcal{O}_A \cong C(\Lambda_\Gamma) \rtimes \Gamma. \tag{14}$$

L'espace quotient

$$\Lambda_\Gamma \times_\Gamma \mathbb{H}^3 = \Lambda_\Gamma \times_\Gamma \underline{E}\Gamma, \tag{15}$$

est précisément le quotient d'homotopie de Λ_Γ par rapport à l'action de Γ , avec $\underline{E}\Gamma = \mathbb{H}^3$ et l'espace classifiant $\underline{B}\Gamma = \mathbb{H}^3/\Gamma$. Ici \mathbb{H}^3/Γ est une 3-variété hyperbolique de volume infini, qui est topologiquement un corps à poignées de genre g .

Dans ce cas également, on trouve que l'espace non commutatif Λ_Γ/Γ est l'espace quotient d'un feuilletage sur le quotient d'homotopie (??) avec feuilles contractiles \mathbb{H}^3 .

[...]

14. Ensembles de Cantor et fractals

Une classe importante est celle des C^* -algèbres obtenues comme limites directes d'une suite de sous-algèbres finie-dimensionnelles et de plongements. On dit que ces algèbres sont *approximativement finie-dimensionnelles*, ou simplement que ce sont des AF-algèbres.

Une AF-algèbre \mathcal{A} est déterminée par un diagramme d'algèbres finie-dimensionnelles et d'inclusions, son diagramme de Bratteli [8], et à partir du diagramme lui-même, on peut lire beaucoup de la structure de l'algèbre, par exemple, sa structure idéale. Quelques exemples simples d'algèbres qui appartiennent à cette classe sont :

Exemple 14.1 : *Un exemple d'AF-algèbre commutative est l'algèbre des fonctions continues à valeurs complexes d'un ensemble de Cantor, lorsque le diagramme de Bratteli est déterminé par une famille décroissantes d'intervalles disjoints recouvrant l'ensemble de Cantor.*

Un exemple de AF-algèbre non commutative est donné par l'algèbre des relations d'anticommutation canoniques de la mécanique quantique.

Exemple 14.2 : *Considérons un espace de Hilbert réel \mathcal{E} et une application linéaire $\mathcal{E} \rightarrow (\mathcal{H})$, $f \mapsto T_f$, vers les opérateurs bornés dans un espace de Hilbert \mathcal{H} , satisfaisant*

$$T_f T_g + T_g T_f = 0$$

$$T_f^* T_g + T_g T_f^* = \langle g, f \rangle I,$$

et l'algèbre \mathcal{A} engendrée par tous les opérateurs T_f satisfaisant ces relations.

Un survol avec de nombreux exemples d'AF-algèbres et de leurs propriétés est donné par exemple dans [21].

Soit \mathcal{A} une AF C^* -algèbre commutative. Une AF algèbre commutative \mathcal{A} est portée par ses projections, puisque les algèbres finie-dimensionnelles commutatives sont engendrées par des projections orthogonales. Cette condition est équivalente au fait que le spectre de $\Lambda = \text{Spec}(\mathcal{A})$ de l'algèbre est un espace compact de Hausdorff totalement déconnecté, typiquement un ensemble de Cantor. Réaliser un tel ensemble de Cantor comme l'intersection d'une famille décroissante d'intervalles disjoints couvrant Λ fournit également un diagramme de Bratteli de l'AF-algèbre $\mathcal{A} = C(\Lambda)$.

Comme cela est décrit dans [13], pour construire l'espace de Hilbert \mathcal{H} pour un ensemble de Cantor $\Lambda \subset \mathbb{R}$, soit J_k la collection des intervalles bornés ouverts dans $\mathbb{R} \setminus \Lambda$. On dénote par $L = \{\ell_k\}_{k \geq 1}$ la collection dénombrable des longueurs des intervalles J_k . On peut supposer que les longueurs sont ordonnées

$$\ell_1 \geq \ell_2 \geq \ell_3 \geq \dots \geq \ell_k \dots > 0. \quad (16)$$

On dénote aussi par $E = \{x_{k,\pm}\}$ l'ensemble des extrémités des intervalles J_k , avec $x_{k,+} > x_{k,-}$. Considérons l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} := \ell^2(E) \quad (17)$$

Puisque les extrémités des J_k sont des points de Λ , il y a une action de $C(\Lambda)$ sur \mathcal{H} donnée par

$$f \cdot \xi(x) = f(x)\xi(x), \quad \forall f \in C(\Lambda), \forall \xi \in \mathcal{H}, \forall x \in E. \quad (18)$$

Un opérateur de signe F peut être obtenu (cf. [13]) en choisissant le sous-espace fermé $\widehat{\mathcal{H}} \subset \mathcal{H}$ donné par

$$\widehat{\mathcal{H}} = \{\xi \in \mathcal{H} : \xi(x_{k,-}) = \xi(x_{k,+}), \forall k\}. \quad (19)$$

Alors F a des espaces propres $\widehat{\mathcal{H}}$ avec la valeur propre $+1$ et $\widehat{\mathcal{H}}^\perp$ avec la valeur propre -1 , de telle façon que, quand on se restreint au sous-espace \mathcal{H}_k des coordonnées $\xi(x_{k,+})$ and $\xi(x_{k,-})$, le signe F est donné par

$$F|_{\mathcal{H}_k} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement, un opérateur de Dirac $D = |D|F$ est obtenu par

$$D|_{\mathcal{H}_k} \begin{pmatrix} \xi(x_{k,+}) \\ \xi(x_{k,-}) \end{pmatrix} = \ell_k^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \xi(x_{k,-}) \\ \xi(x_{k,+}) \end{pmatrix}. \quad (20)$$

On obtient alors le résultat suivant :

Proposition 14.3 : Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}$ un ensemble de Cantor. Soit $\mathcal{A}_\infty \subset C(\Lambda)$ la sous-algèbre dense des fonctions localement constantes sur l'ensemble de Cantor. Alors le triplet constitué de $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ forme un triplet spectral, avec \mathcal{H} comme dans (??), l'action (??), et D comme dans (??). La fonction zeta satisfait

$$(|D|^{-s}) = 2\zeta_L(s),$$

où $\zeta_L(s)$ est la fonction de zeta géométrique de $L = \{\ell_k\}_{k \geq 1}$, définie par

$$\zeta_L(s) := \sum_k \ell_k^s. \tag{21}$$

Ces fonctions zeta sont liées à la théorie des suites de Dirichlet et à d'autres fonctions zeta arithmétiques, et également aux fonctions zeta dynamiques de Ruelle (cf. [24]).

Par exemple, pour l'ensemble classique triadique de Cantor, on a l'ensemble des longueurs $\ell_k = 3^{-k}$ et les multiplicités $m_k = 2^{k-1}$, pour $k \geq 1$, de telle façon qu'on obtient

$$(|D|^{-s}) = 2\zeta_L(s) = \sum_{k \geq 1} 2^k 3^{-sk} = \frac{2 \cdot 3^{-s}}{1 - 2 \cdot 3^{-s}}. \tag{22}$$

Cela montre que le spectre de dimension du triplet spectral d'un ensemble de Cantor a des points en dehors de la droite réelle. En fait, l'ensemble des pôles de (??) est

$$\left\{ \frac{\log 2}{\log 3} + \frac{2\pi in}{\log 3} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}. \tag{23}$$

Dans ce cas, le spectre de dimension est sur une droite verticale et il intersecte l'axe réel en le point $D = \frac{\log 2}{\log 3}$ qui est la dimension de Hausdorff de l'ensemble de Cantor triadique. La même chose est vraie pour d'autres ensembles de Cantor, à la condition que l'auto-similarité soit donnée par une contraction unique (dans le cas triadique, l'intervalle original est remplacé par deux intervalles de longueurs mis à l'échelle par 1/3).

Si l'on considère des fractals un peu plus compliqués dans \mathbb{R} , où l'auto-similarité nécessite plus qu'une simple application de mise à l'échelle, le spectre de dimension peut être plus compliqué en conséquence. On peut le voir dans le cas de l'ensemble de Fibonacci Cantor, par exemple (cf. [24]).

L'ensemble de Fibonacci Cantor Λ s'obtient à partir de l'intervalle $I = [0, 4]$ en enlevant successivement F_{n+1} intervalles ouverts $J_{n,j}$ de longueur $\ell_n = 1/2^n$ selon la règle de la Figure 5. On peut associer à cet ensemble de Cantor l'AF-algèbre commutative $\mathcal{A} = C(\Lambda)$.

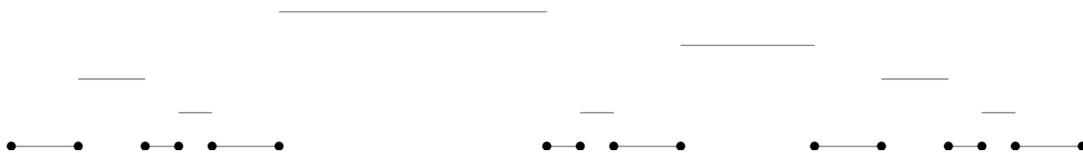


FIGURE 5 : The Fibonacci Cantor set.

Pour obtenir l'espace de Hilbert, on considère à nouveau l'ensemble E des extrémités $x_{n,j,\pm}$ des intervalles $J_{n,j}$ et on prend $\mathcal{H} = \ell^2(E)$. On définit l'opérateur de Dirac comme dans le cas précédent, et on considère à nouveau la sous-algèbre dense involutive \mathcal{A}_∞ des fonctions localement constantes.

Le triplet de données $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ est un triplet spectral. L'opérateur de Dirac est lié à la fonction zeta géométrique de l'ensemble de Fibonacci Cantor par

$$\text{Tr}(|D|^{-s}) = 2\zeta_F(s) = \frac{2}{1 - 2^{-s} - 4^{-s}},$$

où la fonction zeta géométrique est $\zeta_F(s) = \sum_n F_{n+1} 2^{-ns}$, avec F_n les nombres de Fibonacci.

Un argument simple montre que le spectre de dimension est donné par l'ensemble

$$\Sigma = \left\{ \frac{\log \phi}{\log 2} + \frac{2\pi i n}{\log 2} \right\}_{n \in \mathbb{Z}} \cup \left\{ -\frac{\log \phi}{\log 2} + \frac{2\pi i(n + 1/2)}{\log 2} \right\}_{n \in \mathbb{Z}},$$

où $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or.

On pourra trouver des résultats récents sur la géométrie non commutative des fractals et des ensembles de Cantor et les constructions de triplets spectraux pour les AF-algèbres dans [3], [23], [24]. La construction dans [3] est en fait un triplet spectral pour le groupe dual de l'ensemble de Cantor vu comme le produit d'un nombre dénombrable de copies du groupe $\mathbb{Z}/2$. Le travail récent [12] montre qu'il est facile de décrire l'espace métrique compact exactement (i.e. en retrouvant la métrique) via un triplet spectral, qui est une somme de deux modules deux-dimensionnels, mais les triplets spectraux contiennent beaucoup plus d'information qu'une simple étude de la métrique.

Bibliographie

- [1] J.E. Anderson, I.F. Putnam, *Topological invariants for substitution tilings and their associated C^* -algebras*. Ergodic Theory Dynam. Systems 18 (1998), no. 3, 509–537.
- [2] Anonymous Persian manuscript, *Fi tadakhul al-ashkal al-mutashabiha aw mutawafiq*, Bibliothèque Nationale, Paris, Ancien fonds persan 169.
- [3] C. Antonescu, E. Christensen, *Spectral triples for AF C^* -algebras and metrics on the Cantor set*, preprint [ArXiv:math/0309044](https://arxiv.org/pdf/math/0309044) <https://arxiv.org/pdf/math/0309044>.
- [4] Nader Ardalan and Laleh Bakhtiar, *The sense of unity: the Sufi tradition in Persian architecture*, The University of Chicago Press, 1973.
- [5] Michael Baake and Robert V. Moody (Editors), *Directions in mathematical quasicrystals*, CRM Monograph Series, 13. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. viii+379 pp.
- [6] J. Bellissard, *The noncommutative geometry of aperiodic solids*, in “Geometric and topological methods for quantum field theory (Villa de Leyva, 2001)”, 86–156, World Scientific, 2003.
- [7] M. Boyle, D. Handelman, *Orbit equivalence, flow equivalence, and ordered cohomology*, Israel J. Math. 95 (1996) 169–210.
- [8] O. Bratteli. *Inductive limits of finite dimensional C^* -algebras*. Trans. Amer. Math. Soc., 171 (1972) 195–234.
- [9] M.S. Bulatov, *Geometricheskaya garmonizatsiya v arkhitekture Srednei Azii IX-XV vv.*, Nauka, 2nd ed., Moskva 1988, 360 pp.
- [10] J.M. Castera, *Zellijis, muqarnas and quasicrystals*, ISAMA 99 Proceedings, pp.99–104, 1999.

- [11] J.M. Castera, *Arabesques*, ACR editions, 1999, 486 pp.
- [12] E. Christensen, C. Ivan, *Sums of two dimensional spectral triples*, [ArXiv math.0A/0601024](https://arxiv.org/pdf/math/0601024) <https://arxiv.org/pdf/math/0601024>.
- [13] A. Connes, *Noncommutative geometry*. Academic Press, 1994.
- [14] A. Connes, *An analogue of the Thom isomorphism for crossed products of a C^* -algebra by an action of \mathbb{R}* , *Adv. in Math.* 39 (1981), no. 1, 31–55.
- [15] A. Connes, *Cyclic cohomology and the transverse fundamental class of a foliation*. In: *Geometric methods in operator algebras* (Kyoto, 1983). Pitman Res. Notes in Math., 123, Longman, Harlow 1986, 52–144.
- [16] A. Connes, *Compact metric spaces, Fredholm modules, and hyperfiniteness*, *Ergod. Th. Dynam. Sys.* (1989) 9, 207–220.
- [17] C. Consani, M. Marcolli, *Noncommutative geometry, dynamics, and ∞ -adic Arakelov geometry*. *Selecta Math. (N.S.)* 10 (2004), no. 2, 167–251.
- [18] C. Consani, M. Marcolli, *New perspectives in Arakelov geometry*. *Number theory*, 81–102, CRM Proc. Lecture Notes, 36, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [19] J. Cuntz, *A class of C^* -algebras and topological Markov chains II: reducible chains and the Ext-functor for C^* -algebras*, *Invent. Math.* 63 (1981) 25–40.
- [20] J. Cuntz, W. Krieger, *A class of C^* -algebras and topological Markov chains*, *Invent. Math.* 56 (1980) 251–268.
- [21] K.R. Davidson, *C^* -algebras by example*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
- [22] T. Giordano, I. F. Putnam and C. Fr. Skau, *Topological orbit equivalence and C^* -crossed products*. *J. Reine Angew. Math.* 469 (1995), 51–111.
- [23] D. Guido, T. Isola, *Dimensions and singular traces for spectral triples, with applications to fractals*, *Journ. Funct. Analysis*, 203 (2003), 362–400. [Arxiv math.0A/0202108](https://arxiv.org/pdf/math/0202108) <https://arxiv.org/pdf/math/0202108>.
- [24] D. Guido, T. Isola, *Dimensions and spectral triples for fractals in \mathbb{R}^N* , [Arxiv math.0A/0404295](https://arxiv.org/pdf/math/0404295) <https://arxiv.org/pdf/math/0404295>.
- [24] M.L. Lapidus, M. van Frankenhuysen, *Fractal geometry and number theory. Complex dimensions of fractal strings and zeros of zeta functions*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2000.
- [25] Yu.I. Manin, *Three-dimensional hyperbolic geometry as ∞ -adic Arakelov geometry*, *Invent. Math.* 104 (1991) 223–244.
- [26] Yu.I. Manin, A.A. Panchishkin, *Introduction to modern number theory. Fundamental problems, ideas and theories*. Second edition. *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, 49. Springer-Verlag, 2005. xvi+514 pp.
- [27] M. Marcolli, *Arithmetic noncommutative geometry*, *University Lecture Series*, 36. American Mathematical Society, 2005. xii+136 pp.
- [28] D. Nagy, *Visual mathematics: a missing link in a split culture*. *Vis. Math.* 1 (1999), no. 2, 20 pp. (electronic).
- [29] W. Parry, S. Tuncel, *Classification problems in ergodic theory*, *London Math. Soc. Lecture Notes Series* 67, 1982.
- [30] R. Penrose, *Pentaplexity: a class of nonperiodic tilings of the plane*. *Math. Intelligencer* 2 (1979/80), no. 1, 32–37.
- [31] M. Pimsner and D. Voiculescu, *Exact sequences for K groups and Ext group of certain crossed product C^* -algebras*. *J. Operator Theory*, 4 (1980) 93–118.
- [32] I. Putnam, *C^* -algebras from Smale spaces*, *Can. J. Math.* 48 (1996) N.1 175–195.
- [33] I. Putnam, J. Spielberg, *The structure of C^* -algebras associated with hyperbolic dynamical systems*, *J. Funct. Anal.* 163 (1999) 279–299.
- [34] G. Robertson, *Boundary actions for affine buildings and higher rank Cuntz–Krieger algebras*, in J. Cuntz, S. Echterhoff (eds.) “ C^* -algebras”, Springer Verlag 2001, pp. 182–202.
- [35] D. Ruelle, *Non-commutative algebras for hyperbolic diffeomorphisms*, *Invent. Math.* 93 (1988) 1–13.
- [36] C. Skau, *Orbit structure of topological dynamical systems and its invariants*, *Operator algebras and quantum field theory* (Rome, 1996), 533–544, *Internat. Press*, Cambridge, MA, 1997.
- [37] J. Spielberg, *Free-product groups, Cuntz–Krieger algebras, and covariant maps*. *Internat. J. Math.* 2 (1991), no. 4, 457–476.
- [38] Abu’l-Wafa’ al-Buzjani, *Kitab fima yahtaju ilayhi al-sani’ min a‘mal al-handasa*. Milan manuscript (Arabic): Biblioteca Ambrosiana, Arab. 68.