Traduction de l'allemand au français d'une lettre manuscrite de Gauss à Encke du 24 décembre 1849[1]

Texte 1 :

Cher Ami,

Je tiens avant tout à vous remercier très sincèrement pour votre envoi attentionné de l'annuaire 1852.

L'aimable communication de vos commentaires sur la fréquence des nombres premiers m'a intéressé à plus d'un titre. Ils m'ont rappelé mes propres préoccupations sur le même sujet, dont les premiers commencements remontent à une époque très lointaine, en 1792 ou 1793, lorsque j'ai acquis les suppléments de Lambert aux tables de logarithmes. C'était, avant même d'avoir entrepris des recherches plus fines en arithmétique supérieure, une de mes premières tâches qui attira mon attention sur la fréquence décroissante des nombres premiers ; pour cela, je les comptais dans les chiliades individuelles, et les Résultats consignés sur l'une des feuilles blanches ci-jointes. Je me suis vite rendu compte que sous toutes les fluctuations, cette fréquence était, en moyenne, inversement proportionnelle au logarithme, de sorte que le nombre de tous les nombres premiers sous une limite donnée n était proche de l'intégrale

$$\int \frac{dn}{\log n}$$

où le logarigthme est le logarithme hyperbolique. Plus tard, lorsque j'ai pris connaissance de la liste imprimée dans les planches de Véga (à partir de 1796) jusqu'à 400 031, j'ai encore élargi mon décompte, ce qui a confirmé ce rapport. L'apparition du cribrum de Chernac en 1811 m'a procuré une grande joie, et je n'ai aucune patience pour un dénombrement soutenu de sorte que, très souvent, je passe des quarts d'heure de ci de là à compter une chiliade ici et là ; cependant, à la fin, j'ai laissé cela sans complètement terminer le million. Ce n'est que plus tard que j'ai profité du travail acharné de Goldschmidt, en partie pour combler les lacunes qui restaient dans le premier million, et en partie pour continuer à compter selon les tables de Burckhardt. Ainsi, les trois premiers millions ont été comptés (depuis de nombreuses années) et comparés à la valeur intégrale. Je viens d'en faire un petit extrait ici.

Texte 2 :

[1] Référence : https://gauss.adw-goe.de/handle/gauss/199.

Traduction : Denise Vella-Chemla, assistée de Google traduction, mais en ayant beaucoup corrigé, et non assurée, n'étant pas germaniste que la traduction est correcte, février 2024.

Unter	gibt es Primzahlen	Integral $\int \frac{dn}{\log n}$	Differ	Ihre Formel	Abweich.
500000	41556	41606,4	+50,4	41596,9	+40,9
1000000	78501	78627,5	+126,5	78672,7	+171,7
1500000	114112	114263,1	+151,1	114374,0	+264,0
2000000	148883	149054,8	+171,8	149233,0	+350,0
2500000	183016	183245,0	+229,0	183495,1	+479,1
3000000	216745	216970,6	+225,6	217308,5	+563,6

Je ne savais pas que Legendre avait également traité de ce sujet ; à l'instigation de votre lettre, j'ai parcouru sa Théorie des Nombres et j'ai trouvé quelques pages qui s'y rapportent dans la deuxième édition, que j'ai dû négliger auparavant (ou oublier depuis). Legendre utilise la formule

$$\frac{n}{\log n - A}$$

où A est supposé être une constante, pour laquelle il fixe 1,08366. Après un calcul rapide, je trouve ensuite les écarts dans les cas ci-dessus :

−23,3
+42,2
+68,1
+92,8
+159,1
+167,6

Ces différences sont encore plus petites que celles avec l'intégrale, mais elles semblent croître plus vite que cette dernière à mesure que n augmente, de sorte qu'il serait facilement possible que, si on continuait beaucoup plus loin, cette dernière dépasse cette dernière. Afin de mettre en accord le nombre et la formule, il faudrait définir respectivement au lieu de $A = 1,08366$.

1,09040
1,07682
1,07582
1,07529
1,07179
1,07297

Texte 3 :

Il semble que lorsque n augmente, la valeur (moyenne) de A diminue ; mais si la limite à mesure que n grandit vers l'infini devient 1 ou une grandeur différente de 1, je n'ose pas spéculer. Je ne peux pas dire qu'il est possible d'attendre une valeur limite très simple ; d'un autre côté, l'excédent de A sur 1 pourrait très bien être une quantité du style

$$\frac{\partial n}{\log n}$$

En supposant que la formule de Legendre présuppose une fonction différentielle, ce serait

$$\frac{\partial n}{\log n - (A-1)}$$

J'inclinerais à croire que la différentielle de la fonction en question doit être plus simple que la fonction elle-même ; à propos, votre formule serait pour un très grand n

$$\frac{n}{\log n - \dfrac{1}{2K}}$$

peut être considéré de manière cohérente, où k est le module des logarithmes de Brigg, c'est-à-dire avec la formule de Legendre, si l'on pose $A = \dfrac{1}{2K} = 1,1513$ ensembles.

Enfin, je tiens à souligner que j'ai remarqué quelques différences entre vos décomptes et les miens.

Entre 59 000 et 60 000, vous avez 95 et 94 et entre 101 000 et 102 000, vous avez 94 et 93.

La première différence est peut-être due au fait que les Suppléments de Lambert, le nombre premier 59 023 est répertorié deux fois.

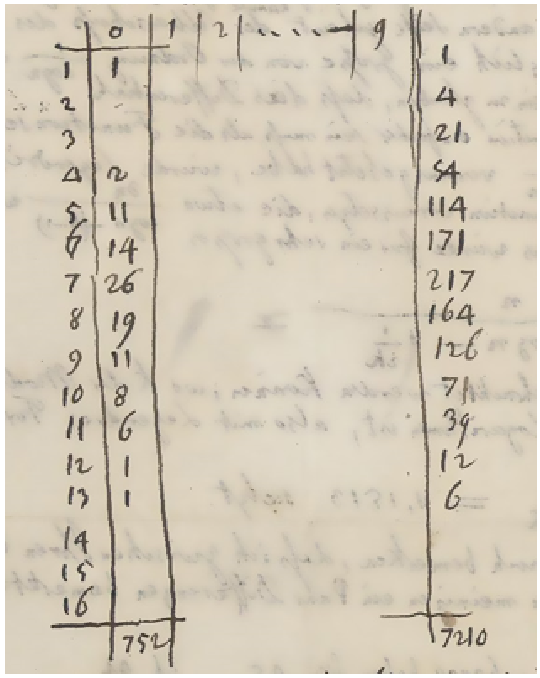
La chiliade de 101 000 à 102 000 des suppléments de Lambert regorge d'erreurs ; j'ai barré 7 chiffres dans ma copie.

N'obligez pas le jeune Dase à mettre les nombres premiers dans le document de décompte, et je crains que le public ne devrait pas le posséder ?

Je remarque que dans le $2^{\text{ème}}$ et le $3^{\text{ème}}$ millions, il n'y a pas de nombres premiers, et par contre, 2 nombres non premiers sont comptés. Pour ce cas le comptage selon mes instructions selon un schéma particulier est fait, ce que j'ai moi-même déjà fait dans une partie du premier million de demandes. Les comptes de 100 000 chacun poursuivent les millions à partir des tablettes situées à l'Académie.

Texte 4 :

Ci-dessous, sur une (petite) page d'octave en 10 colonnes, chacune relative à une myriade ; il y a aussi une colonne devant (à gauche) et une derrière (à droite) ; à titre d'exemple, voici une colonne verticale et les deux colonnes supplémentaires de l'intervalle 1 000 000 − 1 100 000



	0	1	2	. . . . . .	9	
1	1					1
2						4
3						21
4	2					54
5	11					114
6	14					171
7	26					217
8	19					164
9	11					126
10	8					71
11	6					39
12	1					12
13	1					6
14						
15						
16						
	752					7210

Par exemple, utilisez la $1^{\text{ère}}$ série verticale pour expliquer cela : dans la myriade de 1 000 000 à 1 010 000, il y a 100 Hecafontades, dont 1, qui ne contient qu'un nombre premier, et aucune du tout avec 2 ou 3 ; 2 pièces avec 4 nombres premiers chacune ; 11 pièces de 5 chacune, etc. le tout donne 752. $= 1, 1 + 4, 2 + 5, 11 + 6, 14 +$ etc. La dernière colonne contient les agrégats des 10 individuels. Les chiffres 14.15.16 dans la première rangée verticale sont ici élevés, puisqu'il n'y a pas d'Hécafontades avec autant de nombres premiers ; mais dans les pages suivantes, ils deviennent valables. Finalement, les 10 pages sont à nouveau combinées en une seule et constituent ainsi l'ensemble des 2 millions. Mais il est temps d'arrêter. Je tiens également à vous remercier chaleureusement pour vos informations sur la coloration du ????. Il n'y a toujours pas d'issue au labyrinthe dans lequel nous ont entraînés les singeries des Français[2].

Avec mes vœux chaleureux pour votre bien-être, qu'il soit toujours le vôtre.

Par moi pour ça

En fidélité

Göttingen 24 décembre 1849 C.F. Gauss

[2] *note de la traductrice : dans notre face.*

Remarques :

Le nombre de nombres premiers de 2 (= premier nombre premier) jusqu'à une limite supérieure n est une fonction échelonnée, car dans certains intervalles, il n'y a aucun nombre premier avant qu'un saut de 1 vers le haut ne se produise. Cette fonction échelon $\pi(n)$ est approchée avec une très bonne approximation par la fonction lisse $N = (n)$, qui est donnée par N selon la formule de Gauss

$$N = 1 + \int_2^n dx/\ln x$$

est donné, où (puisque 1 n'est pas considéré comme un nombre premier) 2 est le plus petit nombre premier. Par exemple, jusqu'à la limite $n = 1 milliard (10^{10})$, il existe un total de $N = 50847534$ nombres premiers ; La formule de Gauss donne $N = 50849235$, une valeur approximative avec une erreur de seulement 0,003 %. La formule de Legendre donne par contre (selon la valeur de A, ici avec $A = 1,1513$ selon Gauss) $N = 51093488$, et donc une erreur de l'ordre de 0,48 %.

Gauß B, Encke III
Briefe

1849 Decemb. 24

75

Hochzuverehrender Freund.

Vor allem statte ich Ihnen für die gewogentliche Übersendung des Jahrbuchs von 1852 meinen verbindlichsten Dank ab.

Die gütige Mittheilung Ihrer Bemerkungen über die Frequenz der Primzahlen ist mir in mehr als einer Beziehung interessant gewesen. Sie haben mir meine eignen Beschäftigungen mit demselben Gegenstande in Erinnerung gebracht, deren erste Anfänge in eine sehr entfernte Zeit fallen, ins Jahr 1792 oder 1793, wo ich mir die Lambertschen Supplemente zu den Logarithmentafeln angeschafft hatte. Es war noch ehe ich mit feinern Untersuchungen aus der höhern Arithmetik mich befaßt hatte eines meiner ersten Geschäfte, meine Aufmerksamkeit auf die abnehmende Frequenz der Primzahlen zu richten, zu welchem Zweck ich dieselben in den einzelnen Chiliaden abzählte, und die Resultate auf einem der angehefteten weissen Blätter verzeichnete. Ich erkannte bald, daß unter allen Schwankungen diese Frequenz durchschnittlich nahe dem Logarithmen verkehrt proportional sei, so daß die Anzahl aller Primzahlen unter einer gegebenen Grenze n nahe durch das Integral

$$\int \frac{dn}{\log n}$$

ausgedrückt werde, wenn der hyperbolische Logarithm verstanden werde. In späterer Zeit, als mir die in Vegas Tafeln (von 1796) ~~bek~~ abgedruckte Liste bis 400031 bekannt wurde, dehnte ich meine Abzählung weiter aus, ~~die~~ was jenes Verhältniß bestätigte. Eine große Freude machte mir 1811 die Erscheinung von Chernacs cribrum, und ich habe (da ich zu einer anhaltendenden Abzählung der Reihe nach keine Geduld hatte) sehr oft einzelne unbeschäftigte Viertelstunden verwandt, um bald hie bald dort eine Chiliade abzuzählen; ~~ich~~ ich ließ jedoch zuletzt es ganz liegen, ohne mit der Million ganz fertig zu werden. Erst später benutzte ich Goldschmidts Arbeitsamkeit, theils die noch gebliebenen Lücken in der ersten Million auszufüllen, theils nach Burckhardts Tafeln die Abzählung weiter fortzusetzen. So sind (nun schon seit vielen Jahren) die drei ersten Millionen abgezählt, und mit dem Integralwerthe verglichen. Ich setze hier nur einen kleinen Extract her:

Unter	gibt es Primzahlen	Integral $\int \frac{dn}{\log n}$	Differ.	Ihre Formel	Abweich.
500 000	41 556	41606,4	+50,4	41596,9	+40,9
1000 000	78 501	78627,5	+126,5	78672,7	+171,7
1500 000	114112	114263,1	+151,1	114374,0	+264,0
2000 000	148883	149054,8	+171,8	149233,0	+350,0
2500 000	183016	183245,0	+229,0	183495,1	+479,1
3000 000	216745	216970,6	+225,6	217308,5	+563,6

Dass Legendre sich auch mit diesem Gegenstande beschäftigt hat, war mir nicht bekannt; auf Veranlassung Ihres Briefes habe ich in seiner Theorie des Nombres nachgesehen, und in der zweiten Ausgabe einige darauf bezügliche Seiten gefunden, die ich früher übersehen (oder seitdem vergessen) haben muss. Legendre gebraucht die Formel

$$\frac{n}{\log n - A}$$

wo A eine Constante sein soll, für welche er 1,08366 setzt. Nach einer flüchtigen Rechnung finde ich danach in obigen Fällen die Abweichungen

−23,3
+42,2
+68,1
+92,8
+159,1
+167,6

Diese Differenzen sind noch kleiner als die ~~nach~~ mit dem Integral, sie scheinen aber bei zunehmendem n ~~stärker~~ schneller zu wachsen als diese, so dass leicht möglich wäre, dass bei viel weiterer Fortsetzung jene die letztern überträfen. Um Zählung und Formel in Übereinstimmung zu bringen müsste man respective anstatt $A = 1,08366$ setzen

1,09040
1,07682
1,07582
1,07529
1,07179
1,07297

Es scheint, daß bei wachsendem n der (Durchschnitts-) Werth von A abnimmt; ob aber die Grenze beim Wachsen des n ins Unendliche 1 oder eine von 1 verschiedene Größe sein wird, darüber wage ich keine Vermuthung. Ich kann nicht sagen, daß eine Befugniß da ist, einen ganz einfachen Grenzwerth zu erwarten; von der andern Seite ~~scheint~~ könnte der Überschuß des A über 1 ganz füglich eine Größe von der Ordnung $\frac{1}{\log n}$ sein. Ich würde geneigt sein zu glauben, daß das Differential der betreffenden Function einfacher sein muß, als die Function selbst; Indem ich früher $\frac{\partial n}{\log n}$ vorausgesetzt habe, würde Legendre's Formel eine Differentialfunction voraussetzen, die etwa $\frac{\partial n}{\log n-(A-1)}$ wäre. Ihre Formel übrigens würde für ein sehr großes n als mit

$$\frac{n}{\log n - \frac{1}{2k}}$$

übereinstimmend betrachtet werden können; wo k der Modulus der Briggischen Logarithmen ist, also mit Legendre's Formel, wenn man

$$A = \frac{1}{2k} = 1{,}1513 \text{ setzt.}$$

Endlich will ich noch bemerken, daß ich zwischen Ihren Abzählungen und den meinigen ein Paar Differenzen bemerkt habe.

Zwischen 59000 u. 60000	haben Sie	95	ich 94
101000 102000		94	93

Die erste Differenz hat vielleicht ihren Grund darin, daß in Lamberts Suppl. die Primzahl 59023 zweimahl aufgeführt ist. Die Chiliade von 101000 — 102000 wimmelt in Lamberts Supplementen von Fehlern; ich habe in meinem Exemplare 7 Zahlen ausgestrichen, die keine Primzahlen sind, u. dagegen 2 fehlende eingeschaltet. Könnten Sie nicht den jungen Dase veranlassen, daß er die Primzahlen in den folgenden Millionen aus denjenigen bei der Akademie befindlichen Tafeln abzählte, die wie ich fürchte das Publicum nicht besitzen soll? Für diesen Fall bemerke ich, daß in der 2. u. 3 Million die Abzählung auf meine Vorschrift nach einem besondern Schema gemacht ist, welches ich selbst auch schon bei einem Theile der ersten Million angewandt hatte. Die Abzählungen von je 100000

stehen auf Einer (klein) Octavseite in 10 Columnen, jede sich auf
Eine Myriade beziehend; dazu kommt noch eine Columne
davor (links) und eine dahinter (rechts); ~~jene zeigten~~ als Beispiel
hier eine Verticalcolumne u. die beiden Zusatzcolumnen aus dem
Intervall 1000000 — 1100000

	0	1	2	 9	
1	1				1
2	-				4
3					21
4	2				54
5	11				114
6	14				171
7	26				217
8	19				164
9	11				126
10	8				71
11	6				39
12	1				12
13	1				6
14					
15					
16					
	752				7210

Zur Erläuterung diene z. B.
die 1te ~~horizontal~~ Vertical reihe.
In der Myriade 1000000
bis 1010000 sind 100
Hecatontaden; darunter
ist 1 die nur eine Prim-
zahl enthält; gar keine
mit 2 oder 3; 2 Stück
mit je 4 Primzahlen;
11 Stück mit je 5 u.s.w.
alle zusammen geben 752.
= 1.1 + 4.2 + 5.11 +
6.14 + u.s.w.
Die letzte Columne ~~ist~~
enthält die Aggregate
aus den 10 einzelnen.
Die Zahlen 14.15.16 in
der ersten Verticalreihe

stehen hier nur zum Überfluss, da keine Hecatontaden mit
so vielen Primzahlen vorkommen; ~~sie~~ aber auf den folgenden
Blättern bekommen sie Geltung. Zuletzt werden wieder
die 10 Seiten in 1 vereinigt, u. umfassen so die ganze Vte Millj.

Doch es ist Zeit abzubrechen. Ich sage noch meinen herzlichen
Dank für Ihre Mittheilungen über die Färbungen der dortigen öffentl.
Zustände. Noch sieht man keinen Ausweg aus dem Labyrinth,
in das uns die Nachäfferei der Franzosen gezerrt hat. Unter
herzlichen Wünschen für Ihr Wohlbefinden

Stets der Ihrige

C. F. Gauß

Göttingen 24 ~~Decb~~ December
1849