Traduction de la fameuse lettre de Goldbach à Euler du 7 juin 1742 par outils Google traduction (Denise Vella-Chemla, 15 février 2024)[1]

Lettre XLIII: de Goldbach à Euler du 7 juin 1742

Moscou, le 7 juin 1742

Même si j'ai peut-être fait preuve de précaution dans ma lettre précédente avec la particule (?), $(a+b)^p - a^p - b^p$ n'aurait pas toujours été... mais je ne crois pas que la formule $(a+b)$ numeri (modulo ?) p doive être représentée par l'un des diviseurs $-a$ (?) qui permette une division si celle-ci n'est pas possible par celle de Ew (?). Les exemples donnés seraient clairement confirmés.

Pour autant que je me souvienne, dans ma dernière lettre, j'avais la formule $2^{xp\sqrt{-1}} + 2^{-xp\sqrt{-1}}$, étant posé $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 0$, comme fonctions d'une courbe serpentiforme, dont les abscisses sont x ; néanmoins, une erreur s'est glissée dans mon expression à l'époque, et c'est la vôtre, remarquée à juste titre, et qui peut facilement être améliorée en disant que si q est un nombre quelconque et $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 0$, alors n étant un entier quelconque, on a

$$2^{(8n-4-q)p\sqrt{-1}} + 2^{-(8n-4-q)p\sqrt{-1}} = 2^{qp\sqrt{-1}} + 2^{-qp\sqrt{-1}}$$

Vous avez découvert que tous les nombres qui ne peuvent pas être $4mn - m - n$ qui peuvent être conceptualisés dans cette formule sont $v^2 + v + u^2$ et je trouve que tous les $4mn - m - n$ de cette forme $y^2 + y - x^2$, de sorte que tout nombre donné est égal à $p^2 + p \pm q^2$, où p et q indiquent des nombres entiers, ou même l'un des deux littéraux peut signifier 0 ; d'où on peut voir que tout nombre consiste en un double nombre triangulaire $\pm$ un carré[2]. Mais comme chaque nombre est le même dans la formule

$$u^2 + v^2 + v + y^2 + y - x^2$$

C'est ce qui se passe si vous définissez $u = \dfrac{z^2+z}{4} + 1, x = \dfrac{z^2+z}{4} - 1, u^2 - x^2 = z^2 + z$, dont chaque donnée numérique

$$\frac{n}{2} = \frac{v^2 + v + y^2 + y + z^2 + z}{2},$$

est constituée de trois nombres triangulaires.

Si la formule polygonale $\dfrac{(p-2)x^2 - (p-4)x}{2}$ doit devenir égale à $4mn - m - n$, p ne peut être ni 5 ± 2 ni 5 ± 1, mais tous les trigonaux, tétragonaux, hexagonaux et heptagonaux sont exclus, selon ce même principe.

Je ne pense pas qu'il soit inapproprié de noter les propositions qui sont très probables, indépendamment de l'absence de véritable démonstration, car même si elles s'avèrent ensuite fausses, elles peuvent néanmoins fournir l'occasion de découvrir une nouvelle vérité. L'idée de Fermat selon laquelle chaque nombre $2^{2^{n-1}} + 1$ donne une série de nombres premiers peut être vue, comme la

[1] *Note de la traductrice : je fais ici une tentative de correction, n'étant pas germaniste, à la recherche d'idées, en utilisant les outils proposés gratuitement par Google.*

[2] *Note de la traductrice : le double nombre triangulaire correspond au $v^2 + v$, double d'un triangulaire de la forme $\dfrac{v(v+1)}{2}$ tandis que u^2 est le carré.*

vôtre, je l'ai déjà montré, cela ne passe pas ; mais ce serait quelque chose d'étrange si ces séries étaient toutes des nombres décomposables d'une seule manière en deux carrés[3]. De cette façon je veux aussi hasarder une conjecture : que tout nombre qui est composé de deux nombres premiers est un agrégat d'autant de nombres premiers qu'on veut (y compris 1), à l'exception de la somme composée uniquement d'unités[4]); Par exemple

$$4 = \begin{cases} 1+1+1+1 \\ 1+1+2 \\ 1+3 \end{cases} \qquad 5 = \begin{cases} 2+3 \\ 1+1+3 \\ 1+1+1+2 \\ 1+1+1+1+1 \end{cases} \qquad 6 = \begin{cases} 1+5 \\ 1+2+3 \\ 1+1+1+3 \\ 1+1+1+1+2 \\ 1+1+1+1+1+1 \end{cases} \qquad \text{Etc.}$$

Voici quelques observations qui peuvent être démontrées :

Si ν est une fonction de x, et qu'on pose $\nu = c$ un nombre quelconque, on peut déterminer x en fonction de c et les constantes restantes dans les fonctions exprimées, il est possible de déterminer cette valeur de x dans l'équation

$$\nu^{2x+1} = (2\nu+1)(\nu+1)^{x-1}.$$

$$\nu^{2n+1} - (\nu\nu+\nu)(\nu+1)^{n-1} \quad \text{et} \quad (\nu\nu+1)(\nu+1) \quad \text{divisib. par} \quad \nu\nu-\nu-1$$

$$\nu^{n+1} - (2\nu+1)(\nu+1^{n-1} \quad \text{divisib. par} \quad \nu\nu-\nu-1$$

Si la courbe se coupe en l'abscisse x, mais que la somme de la série soit appliquée $\dfrac{x^n}{n \cdot 2^{2n}}$ le bénéfice n pour l'exposant des termes, c'est-à-dire en appliquant $= \dfrac{x}{1.2^2} + \dfrac{x^2}{2.2^4} + \dfrac{x^3}{3.2^6} + \dfrac{x^4}{4.2^4} +$ etc., je veux dire si c'est l'abscisse, =

1. serait appliquée $= \dfrac{1}{3} \left\{ \begin{array}{c} l \times \frac{4}{3}, \text{ car ainsi s'applique l'âge } = y, \\ \\ \text{erit} \quad y = l \times \frac{4}{4-x} \end{array} \right\}$

2 . . . $l \times 2$

3 . . . $2l \times 2$

4 . . . niveaux majeurs... à l'infini.

(*une phrase illisible*)

Goldbach.

[3]*Note de la traductrice : de nos jours, des nombres premiers de la forme* $4k+1$.

[4]Après avoir relu ceci, je trouve que la conjecture peut être démontrée en toute rigueur dans le cas $n+1$ qui succède au cas n, et $n+1$ peut être décomposé en somme de deux nombres premiers. La démonstration est très simple. Au moins, il semble que tout nombre supérieur à 1 soit décomposable en somme de 3 nombres premiers.

haben, nicht bestehen, so wäre aber schon was sonderliches, wann diejenige series lauter numeros unico modo in duo quadrata divisibiles gäbe, auf solche Weise will ich auch eine conjecture hazardiren: dass jede Zahl welche aus zweyen numeris primis zusammengesetzt ist ein aggregatum so vieler numerorum primorum sey als man will (die unitatem mit dazu gerechnet) biss auf die congeriem omnium unitatum.* zum Exempel

$$4 = \begin{cases} 1+1+1+1 \\ 1+1+2 \\ 1+3 \end{cases} \qquad 5 = \begin{cases} 2+3 \\ 1+1+3 \\ 1+1+1+2 \\ 1+1+1+1+1 \end{cases} \qquad 6 = \begin{cases} 1+5 \\ 1+2+3 \\ 1+1+1+3 \\ 1+1+1+1+2 \\ 1+1+1+1+1+1 \end{cases} \quad \&c.$$

Hierauf folgen ein paar observationes so demonstrirt werden können:

Si v. sit functio ipsius x. eiusmodi ut facta v = c. numero cuicunque, determinari possit x per c. et reliquas constantes in functione expressas, poterit etiam determinari valor ipsius x. in aequatione $v^{2x+1} = (2v+1)(v+1)^{x-1}$ | [illegible]

Si concipiatur curva cuius abscissa sit x. applicata vero sit summa seriei $\frac{x^n}{n.2^{2n}}$ posita n. pro exponente terminorum, hoc est, applicata $= \frac{x}{1.2^2} + \frac{x^2}{2.2^4} + \frac{x^3}{3.2^6} + \frac{x^4}{4.2^8}$ + &c. dico, si fuerit abscissa = 1. applicatam fore $= \frac{1}{3} = l\frac{4}{3}$: Sit haec applicata = y erit $y = l\frac{4}{4-x}$

2 . . . . $l2$.

3 . . . . $2l2$.

4 vel major . . . . infinitam.

Ich verharre mit aller ersinnlichen Hochachtung

Ew. Hochedelgebohren ergebenster Diener

Moscau d. 7. Jun. st. n. 1742.

Goldbach

* Nachdem ich dieses wieder durchgelesen, finde ich, dass sich die conjecture in summo rigore demonstriren lässet in casu n+1, si successerit in casu n. et n+1 dividi possit in duos numeros primos. Die demonstration ist sehr leicht. Es scheinet wenigstens, dass eine jede Zahl, die grösser ist als 2, ein aggregatum trium numerorum primorum sey.