**Cohomologie cyclique et**
**géométrie différentielle non-commutative**

Alain CONNES

Proceedings du Congrès international des mathématiciens
Berkeley, Californie, Etats-Unis, 1986

La cohomologie cyclique est apparue indépendamment à partir de deux courants différents d'idées, la $K$-théorie algébrique et la géométrie différentielle non-commutative. J'essaierai d'expliquer dans cet article le sens de la géométrie différentielle non-commutative. Le besoin de considérer de tels espaces et de développer pour eux les analogues des outils de géométrie différentielle est mieux compris dans les deux exemples suivants. Dans les deux cas, on essaie de prouver un résultat de géométrie différentielle classique, et une preuve heuristique est possible si l'on accepte la nouvelle définition de l'espace.

*Premier exemple.*

THÉORÈME (LICHNEROWICZ, 1961). *Si $M$ est un feuilletage compact de spin dont le genre $\widehat{A}$ est non nul, alors il est impossible de doter $M$ d'une métrique Riemannienne de courbure scalaire strictement positive.*

La preuve du résultat utilise une idée globale simple. Par l'identité de Lichnerowicz, le carré de l'opérateur de Dirac est $\nabla * \nabla + \frac{1}{4}\chi$ où $\nabla * \nabla$ est un opérateur positif et $\chi$ est la courbure scalaire. Ainsi pour $\chi > 0$, l'opérateur de Dirac a un indice nul. Mais par le théorème de l'indice indice(Dirac) $= \widehat{A}(M) \neq 0$. CQFD.

On a un résultat plus fort à propos de la non-existence d'une métrique de courbure scalaire positive qui est le résultat suivant

THÉORÈME **[14]**. *Soit $M$ un feuilletage compact orienté avec $\widehat{A}(M) \neq 0$.*
*Alors il n'y a pas de sous-fibré de spin intégrable $F$ de $TM$ de courbure scalaire strictement positive.*

Donnons une preuve heuristique de ce résultat qui fonctionnera lorsque nous obtiendrons les bons outils. L'idée est la suivante : étant donné un sous-fibré intégrable $F$ du fibré tangent de $M$, on peut a priori l'intégrer et obtenir un feuilletage de $M$ qui crée un nouvel espace $B$ de feuilles de cette variété feuilletée (Voir Figure 1).

Maintenant, $\widehat{A}(M)$ est l'indice de l'opérateur de Dirac, au moins si $M$ est spin, ou, équivalemment, c'est le pushforward $\pi!(L)$ du fibré trivial $L$ sur $M$ par la fonction $\pi : M \to \text{pt}$. Comme $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$, où $\pi_2$ est la projection de $M$ sur l'espace de feuilles $B$, on a $\pi!(L) = \pi_1!(\pi_2!(L))$, mais $\pi_2!(L) \in K(B)$ est l'indice de la famille d'opérateurs de Dirac le long des feuilles et par conséquent est nul puisque la courbure scalaire des feuilles est strictement positive.

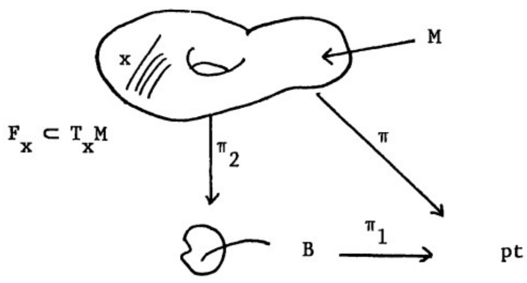


FIGURE 1

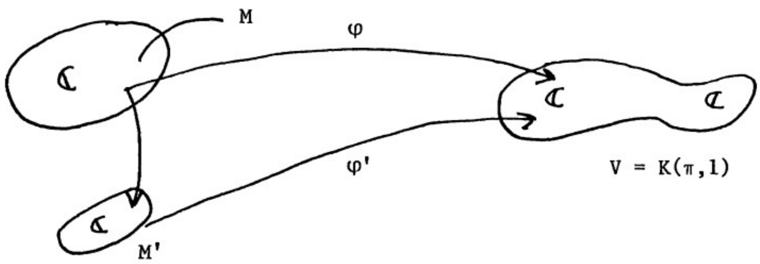


FIGURE 2

Ce raisonnement ne marche pas si l'on a juste une fibration ; on applique alors le théorème de l'indice pour les familles. Pourtant, en général, étant donné un sous-fibré intégrable $F$, il est impossible de décider s'il crée une fibration ou un feuilletage. Par exemple, sur le deux-tore $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$, l'équation $\mathrm{d}y = \theta\ \mathrm{d}x$ définit une fibration ssi $\theta$ est rationnel. Du coup, il est impossible de se restreindre au cas des fibrations, et on a besoin de gérer des espaces comme l'espace $B$ des feuilles d'un feuilletage arbitraire. On a besoin de nouveaux outils pour comprendre et utiliser de tels espaces parce que vus seulement comme des espaces topologiques ordinaires, ils ne sont d'aucune utilité ; en général, ils devraient apporter la topologie globale et $K(B)$ serait trivial.

*Second exemple*. Nous passons maintenant de l'espace des feuilles d'un feuilletage à un autre exemple lié aux groupes discrets. Il vient d'un problème énoncé par Novikov - l'invariance d'homotopie des plus grandes signatures. Soit $M$ une variété compacte orientée et $\varphi$ une fonction de $M$ vers un $K(\pi, 1)$ espace $V$. Par exemple, on peut prendre pour $\varphi$ la fonction qui classifie la couverture universelle de $M$. Pour chaque classe de cohomologie $\omega \in H^*(V, \mathbf{C}) = H^*(\pi, \mathbf{C})$, la plus grande signature de la paire $(M, \varphi)$ est donnée par le scalaire $\langle \mathcal{L}_M.\varphi^*(\omega), [M]\rangle$ où $\mathcal{L}_M$ est le $L$ genre de $M$ et $\varphi^*(\omega)$ est le pullback de $\omega$ par $\varphi$. Le problème est le suivant : le nombre bien défini ci-dessus est-il un invariant d'homotopie de la paire $(M, \varphi)$ ? (voir Figure 2).

Quand $V = \mathrm{pt}$, on obtient la signature ordinaire de $M$, qui est un invariant d'homotopie. Par le travail de Wall et Miscenko, en théorie de la chirurgie équivariante, on peut assigner une signature $\pi$-équivariante au recouvrement $\widetilde{M}$ de $M$ pullbacké par $\varphi$ du recouvrement universel $\widetilde{V}$ de $V$. De plus, cette signature équivariante appartient (en négligeant la torsion) au groupe de Witt de l'anneau de groupe $\mathbf{C}\pi$ et est un invariant d'homotopie, $\mathrm{Signature}_\pi(M) \in \mathrm{Witt}(\mathbf{C}\pi)$. Quand $\pi$ est *commutatif*, on peut prouver l'invariance d'homotopie des plus grandes signatures comme suit. Il y a par exemple un *espace* assigné au groupe $\pi$, l'espace des caractères, i.e., le dual $\widehat{\pi}$, qui est Hausdorff et compact, de dimension finie si $\pi$ est finiment engendré. Alors l'anneau de groupes $\mathbf{C}\pi$ intègre comme sous-anneau l'anneau $C(\widehat{\pi})$ des fonctions continues sur $\widehat{\pi}$ :

$$\mathbf{C}\pi \subset C(\widehat{\pi}).$$

La diagonalisation des formes quadratiques sur $C(\widehat{\pi})$ amène une fonction du groupe de Witt de $\mathbf{C}\pi$ sur le $K^0$ groupe de $\widehat{\pi}$ :

$$\mathrm{Witt}\ \mathbf{C}\pi \to K^0(\widehat{\pi}).$$

Maintenant n'importe quel

$$\omega \in H^n(V, \mathbf{C}) = H^n(\pi, \mathbf{C})$$

est représenté par un cocycle de groupes $\omega(g^1, \dots, g^n)$ totalement antisymétrique en les $g^i$.

On définit alors de manière unique un flot $C$ sur $\widehat{\pi}$ par l'égalité :

$$\langle c, f^0 df^1 \wedge \dots \wedge df^n \rangle = \sum_{\prod_0^n g^i = 1} \widehat{f}^0(g^0)\widehat{f}^1(g^1) \dots \widehat{f}^n(g^n)\omega(g^1, \dots, g^n)$$

où les $f^i$ sont les fonctions sur $\widehat{\pi}$ de telle façon que leur transformation de Fourier $\widehat{f^i}$ soient des fonctions sur le groupe $\pi$ lui-même. Le flot $C$ est fermé parce que $\omega$ est un cocycle de groupes.

Le lemme principal, alors, qui est un corollaire du théorème de l'indice pour les familles, dit que si l'on apparie $C$ avec le caractère de Chern de la signature équivariante, on obtient une signature plus grande :

$$\langle C, \mathrm{Ch}(\mathrm{Signature}_\pi(\widetilde{M})) \rangle = \langle \mathcal{L}_M . \varphi^*(\omega), [M] \rangle.$$

Ainsi le côté droit est invariant par homotopie. CQFD.

En général, *quand $\pi$ n'est pas commutatif*, il n'y a pas d'espace de caractères intéressant et on ne peut pas vraiment parler du dual de $\pi$ comme d'un espace. Pourtant, et cela sera l'élément clef de cette discussion, on peut assigner une $C^*$-algèbre non-commutative à $\pi$ ; c'est la complétion de l'anneau de groupe $\mathbf{C}\pi$ agissant sur l'espace de Hilbert $l^2(\pi)$.

Une étude attentive des deux exemples précédents révèle que l'on a besoin, de manière à pouvoir procéder, d'une généralisation adéquate de la notion d'espace, qui nous autorisera à traiter à la fois les espaces de feuilles et les duaux des groupes non-commutatifs, comme si c'étaient des espaces ordinaires.

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{Category of sheaves on } X \\
\text{Space } X \arrow[ur, "\text{Grothendieck}"] \arrow[dr, "\text{Gelfand}"'] & \\
 & \text{Algebra of complex functions on } X
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{Topos} \\
\text{“Space”} X \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \text{Noncommutative } C^*\text{-algebras}
\end{tikzcd}
$$

L'idée de base sous-tendant la nouvelle notion d'espace découverte par Grothendieck - et qu'il a appelée “topos” - est que dans un espace topologique ordinaire, le rôle principal n'est plus joué par les points et par leurs relations de proximité, mais par les catégories de faisceaux sur l'espace. En effet, l'espace topologique original peut être retrouvé à partir de cette catégorie et, de plus, si l'on garde vraiment les conditions adéquates satisfaites par de telles catégories, on obtient la notion de topos qui joue un rôle fondamental implicite dans la nouvelle géométrie algébrique. La nouvelle notion d'espace avec laquelle nous allons travailler est basée sur une idée similaire, mais elle assigne un rôle spécifique aux nombres complexes $\mathbf{C}$ ou, de façon équivalente, à l'analyse fonctionnelle. Elle a pour origine la théorie de Gelfand des $C^*$-algèbres. Elle affirme qu'un espace topologique compact $X$ est caractérisé par la $*$-algèbre $C(X)$ des fonctions continues à valeurs complexes sur $X$ et que de telles algèbres sont les $C^*$-algèbres commutatives les plus générales. Il n'y a donc pas de bonne raison de se restreindre aux $C^*$-algèbres commutatives plutôt qu'aux non-commutatives et cette idée remonte aux développements initiaux de la mécanique quantique avec la découverte de la *mécanique matricielle* par Heisenberg. En comprenant, d'un point de vue très optimiste grandement renforcé par l'évidence expérimentale en spectroscopie, l'interaction de la matière avec le champ de radiation, Heisenberg a montré que les observables habituels de la mécanique classique devaient être remplacés par des matrices qui violent la commutativité de la multiplication. Ainsi l'espace des phases des particules quantiques est un des premiers exemples de ce nouveau type d'espaces que nous allons traiter. Pour pousser plus avant cette seconde idée d'espace, nous avons besoin de nombreux exemples, chacun étant utilisé comme un petit laboratoire dans lequel tester les idées et voir ce qui fonctionne. Nous résumons quelques exemples dans la table ci-dessous :

| *Espace* | Algèbre |
|---|---|
| $X$ | $C(X)$ |
| $X = \hat{\pi}$ dual d' | $C^*(\pi) \supset \mathbf{C}\pi$ |
| un groupe discret | (complétion dans $\ell^2(\pi)$) |
| $X = M/F$ espace des feuilles | $C^*(M, F)$ |
| Exemple : feuilletage de Kronecker | $VU = (exp\, 2\pi\, i\theta)UV$ |
| $X = \Omega/G$ espace des orbites | produit croisé $C_0(\Omega) \rtimes G$ |

Nous avons déjà discuté du premier exemple. Le second vient des feuilletages. Il y a une $C^*$-algèbre très naturelle, venant des opérateurs qui différencient seulement dans la direction des feuilles, et qui sont elliptiques dans cette direction. Ils s'avèrent avoir des paramètres naturels ;

ils sont inversibles modulo les opérateurs qui sont lisses dans la direction des feuilles. Ces opérateurs constituent une $C^*$-algèbre, $C^*(M, F)$. Un exemple serait de prendre le feuilletage de Kronecker du 2-tore, qui est induit par l'équation $\mathrm{d}y = \theta \ \mathrm{d}x$ où $\theta$ est irrationnel. Dans ce cas, on obtient une $C^*$-algèbre engendrée par les deux éléments unitaires qui ne commutent pas, mais qui commutent à une phase près égale à $\lambda = \exp 2\pi i\theta$. C'est une algèbre avec laquelle on peut faire de nombreux calculs, exactement comme si on calculait avec les fonctions ordinaires du 2-tore en utilisant l'analyse de Fourier.

Un autre exemple très important a été découvert par Bellissard [**6**] dans le domaine de la physique des états solides et de l'effet de Hall quantique. Dans l'étude des systèmes désordonnés, l'Hamiltonien $H_\omega$ est étiqueté par un paramètre $\omega \in \Omega$. De plus, $H_\omega$ ne peut commuter avec $H_{T_x}(\omega)$ où $T$ est l'action du groupe de translation de l'espace de paramètre $\Omega$. Ainsi le translaté de l'Hamiltonien engendre une $C^*$-algèbre non-commutative, qui correspond au “spectre d'énergie” du système.

Etant donnés ces exemples, on a besoin des bons outils. Le premier provient de mon domaine originale d'étude : “les algèbres de von Neumann”. Ces algèbres constituent exactement l'analogue non-commutatif de la théorie de la mesure. Leur classification et compréhension ont atteint un état presque complet et satisfaisant.

Mais nous avons besoin alors d'un peu plus que de la simple théorie de la mesure ; nous avons besoin de topologie. Je décrirai maintenant l'outil de base en topologie, introduit initialement par Grothendieck en géométrie algébrique, et ensuite par Atiyah pour les objectifs de la topologie. Cet outil est la $K$-théorie. Il y a une relation assez simple entre les fibrés vectoriels complexes sur l'espace $X$ et les modules projectifs sur l'algèbre $A = C(X)$ ; c'est le théorème de Serre-Swann :

$$K^i(X) = K_i(A = C(X)).$$

Il nous permet de faire de la $K$-théorie des espaces en faisant de l'algèbre linéaire où le corps $\mathbf{C}$ est remplacé par l'anneau $A$. Alors le groupe des dimensions des modules projectifs finis est le $K$-groupe $K_0(A)$. Le théorème de périodicité de Bott nous dit que les $K$-groupes d'une $C^*$-algèbre $A$ sont les groupes d'homotopie du groupe de jauge, i.e. du groupe unitaire $\mathcal{U}$ des matrices infinies sur $A$ :

$$K_i(A) = \pi_{i+1}(\mathcal{U})$$

A chaque fois qu'un espace est construit en collant ensemble deux espaces, de telle façon qu'on ait une séquence exacte d'algèbres, il y a une séquence exacte longue correspondante de $K$-groupes, qui est raccourcie grâce à la périodicité :

$$0 \to J \to A \to B \to 0 \Rightarrow \quad \begin{tikzcd} & K_0(J) \arrow[r] & K_0(A) \arrow[dr] & \\ K_1(B) \arrow[ur] & & & K_0(B) \arrow[dl] \\ & K_1(A) \arrow[ul] & K_1(J) \arrow[l] & \end{tikzcd}$$

De plus, il y a un principe général qui est absolument crucial. Ci-dessus, nous avons utilisé deux fois le théorème de l'indice pour les familles. Maintenant le principe est qu'un "espace" $X$ sera décrit par une algèbre non-commutative $A$, et que quand on a une famille $(D_x)$, $x \in X$ indexée par $X$, de telle façon que la famille des opérateurs de Dirac soit indexée feuille à feuille par l'espace des feuilles, alors l'indice de cette famille appartient à $K^0(X) = K_0(A)$.

Ce principe est très important parce qu'il nous autorise à traduire en termes $K$-théoriques les propriétés analytiques de base telles que :

- L'évanouissement de l'indice de la famille d'opérateurs de Dirac feuille à feuille :

$$\text{Indice}(\text{Dirac}_L)_{L \in M/F} = 0$$

  quand la courbure scalaire des feuilles est strictement positive.
- L'invariance d'homotopie de la signature $\pi$-équivariante : $\text{Signature}_\pi(\widehat{M}) \in K_0(C^*(\pi))$.

L'évanouissement dont il est question ci-dessus a lieu dans le $K$-groupe $K_0(C^*(M, F))$. Tous les $K$-groupes sont des groupes abéliens dénombrables mais sont de prime abord des objets extrêmement mystérieux, définis à travers les $C^*$-algèbres ci-dessus. Quand on travaille avec des espaces ordinaires, on obtient quelque intuition à propos de leurs $K$-groupes, mais cela est moins clair avec les $C^*$-algèbres. La première percée réelle qui a vraiment fait tout démarrer a été réalisée par Pimsner et Voiculescu [**26**] qui ont, en particulier, calculé les $K$-groupes du feuilletage du flot de Kronecker dont il a été question ci-dessus. Cela a permis à P. Baum et à l'auteur de deviner quelle serait la réponse à la fois en termes généraux et en termes géométriques. La situation se décrit ainsi : nous construisons un groupe géométrique, la $K$-homologie de son espace classifiant, et une fonction $\mu$ vers le $K$-groupe de la $C^*$-algèbre. L'espace classifiant fait sens dans toutes les situations ci-dessus puisque les topologues ont une manière de donner du sens, à homotopie près, à des espaces comme l'espace des feuilles d'un feuilletage ou l'espace des orbites d'une action de groupe. Ce qu'ils font c'est qu'ils amplifient l'espace, disons $M$, sur lequel le groupe $\Gamma$ agit, en croisant $M$ avec un espace contractible $E\mathrm{T}$ sur lequel $\Gamma$ agit librement ; alors le quotient $M \times_\Gamma E\mathrm{T}$ fait sens et est "*homotopique à* $M/\Gamma$".

$$K_*(\text{Espace classifiant}) \xrightarrow{\mu} K(C^*\text{-algèbre})$$

L'application $\mu$ est difficile à construire [**5, 4, 12, 24**] et même quand on traite un espace à un seul point, sa simple existence découle du théorème d'Atiyah-Singer [**5**]. C'est essentiellement l'application de la dualité de Poincaré dans la mesure où elle inverse les fonctorialités. Le problème principal de la théorie est de gérer cette application $\mu$ ; tous les calculs effectués jusque-là indiquent que c'est une bijection [**4, 23, 24, 27**]. Un outil important développé par l'école russe, par Miscenko et Kasparov en particulier, et aussi par Atiyah, Brown, Douglas, et Fillmore (cf. [**23, 24, 1, 7**]), est la $K$-homologie pour les $C^*$-algèbres. Puisque cette théorie a joué un rôle crucial dans la compréhension de l'analogue de la théorie de de Rham des flots sur les espaces ci-dessus, je la rappellerai brièvement. Pour les espaces ordinaires, la K-homologie est définie, en utilisant la dualité, par un théorème général qui établit qu'étant donnée une théorie cohomologique (telle que la $K$-théorie), il y a une théorie correspondante de l'homologie, appelée ici $K$-homologie. On veut réaliser cette théorie de l'homologie concrètement. Il est assez frappant que si l'on est très conservateur et que l'on souhaite coller des espaces ordinaires, en n'acceptant pas les "espaces", on ne sera pas capable de décrire la théorie $K$-homologie $(X)$ (il y a un $K_{pair}$ et un $K_{impair}$) comme des classes d'homotopie de classes d'applications d'espaces $Z_{pair}, Z_{impair}$ vers l'espace $X$. Pourtant, avec des "espaces", c'est possible ; $Z_{pair}$ s'obtient en collant ensemble deux "espaces" contractibles, et la $C^*$-algèbre $C(Z_{pair})$ est l'algèbre non-commutative $A_{pair}$, des paires d'opérateurs $(x, y)$ dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ dont la différence $x - y$ est un opérateur compact. De façon similaire, $C(Z_{impair}) = A_{impair}$ qui apparaît aussi dans *Beyond Affine Lie Algebras*, d'I. Frenkel, est l'algèbre des matrices $2 \times 2$ $(x_{ij})$ d'opérateurs, tels que $x_{12}$ et $x_{21}$ sont compacts. Bien sûr, une "application continue" de $Z_{pair}$ vers $X$ est donnée par un homomorphisme de $C(X)$ vers $C(Z_{pair})$, i.e., un homomorphisme de la $C^*$-algèbre $A = C(X)$ vers $A_{pair}$. On l'appelle un *module de Fredholm* sur $A$ parce que cela revient à donner un espace de Hilbert mesuré $\mathbf{Z}/2$, $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ avec comme étalon $\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, avec une structure de $A$-module à gauche telle que

(1) $\varepsilon a = a\varepsilon \quad \forall a \in A$,

(2) $[F, a]$ est compact $\forall a \in A$ où $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Il y a une notion similaire de module de Fredholm impair. Sur chaque variété compacte spin$^c$ de dimension paire, le module des spineurs $L^2$, avec l'étalon $\mathbf{Z}/2$ donné par la matrice $\gamma_5$ [**5**] et l'opérateur $F$ donné par la phase $F = D|D|^{-1}$ de l'opérateur de Dirac, est un module de Fredholm qui représente la *classe fondamentale* de la variété en $K$-homologie [**5**]. Si l'on met ensemble cette notion d'un module de Fredholm avec les idées de Helton et Howe, Carey et Pincus [**18, 9**] sur les opérateurs commutants modulo les idéaux de la trace, on aboutit à l'analogue non-commutatif de la théorie de de Rham : la cohomologie cyclique. Helton et Howe ont associé à chaque opérateur $T$, normal modulo les opérateurs de classe trace, un flot de de Rham sur $\boldsymbol{R}^2$ avec une frontière amenée par le spectre essentiel de $T$. Leur travail était très inspirant parce qu'il montrait que le calcul des formes différentielles pourrait naître de considérations purement théoriques sur les opérateurs dans l'espace de Hilbert. C'est ce qui est fait dans [**11**] ; étant donné un module de Fredholm sur $A$, on peut définir *des formes différentielles* sur l'"espace" correspondant non pas en utilisant des cartes locales et en les recollant ensemble mais directement comme des opérateurs dans $\mathcal{H}$. C'est exactement la même étape que le remplacement, en mécanique quantique, des crochets de Poisson par des commutateurs. Ainsi

$$\mathrm{d}a = i[F, a] \qquad \forall a \in A$$

définit la différentielle d'une fonction. Les formes de degré $q$ sont obtenues comme produits de 1-formes : $\Omega^q = \{\sum x^0 \, \mathrm{d}x^1 \ldots \, \mathrm{d}x^q, \quad x^j \in A\}$. De cette manière, on obtient une algèbre différentielle graduée ; le produit est le produit d'opérateurs et la différentielle est donnée par

$$d\omega = i(F\omega - (-1)^q \omega F) \qquad \text{for } \omega \in \Omega^q.$$

On a $d^2 = 0$, et le point principal est d'obtenir l'intégration des formes $\omega \to \int \omega \in \mathbf{C}$ satisfaisant $\int d\omega = 0$ et $\int \omega_2\omega_1 = (-1)^{q_1 q_2} \int \omega_1\omega_2$.
La formule qui marche est assez simple : $\int \omega = Trace(\varepsilon\omega)$. C'est là qu'apparaît la *dimension*, la trace ayant uniquement un sens si $\omega$ est un opérateur de *classe trace*. Par l'inégalité de Holder, cela est vérifié, pour tout $\omega \in \Omega^n$, si l'on suppose que $[F, a] \in \mathcal{L}^n \ \ \forall a \in A$. Ici, pour tout nombre *réel* $p \in [1, \infty]$, $\mathcal{L}^p$ est l'idéal des opérateurs compacts $T$ avec $\sum \lambda_q(|T|)^p < \infty$, où $\lambda_q(|T|)$ est la $q^{\text{ème}}$ valeur propre de la valeur absolue de $T$. La *dimension* d'un module de Fredholm sur une algèbre est le plus petit des $p$ pour lesquels $[F, a] \in \mathcal{L}^p \ \forall a \in A$. Pour la classe fondamentale des variétés $M$ décrite ci-dessus, cela fournit la dimension de $M$. En général, elle n'est pas nécessairement entière. Etant donné un module pair de Fredholm de dimension $p$ sur $A$, on ne peut intégrer que les formes $\omega \in \Omega^n$ de degré $\geq p$. De plus, les formes impaires ont une intégrale nulle. Du coup, la construction ci-dessus fournit pour tout entier pair $n \geq p$, la fonctionnelle $\tau_n$ appelée le caractère $n$-dimensionnel du module de Fredholm :

$$\tau_n(a^0, \dots, a^n) = \int a^0 \mathrm{d}a^1 \dots \mathrm{d}a^n \ \ \forall a^i \in A.$$

Une analyse attentive de ces fonctionnelles m'a amené à découvrir la cohomologie cyclique en 1981. Elle a été découverte indépendamment à partir de la $K$-théorie algébrique par Feigin et Tsigan [**17, 30**], en remplaçant l'homologie de groupe par l'homologie de l'algèbre de Lie dans la construction de base de la $K$-théorie algébrique de Quillen. Elle est aussi apparue, au moins sous une forme implicite, dans le travail de Hsiang et Staffeld sur la $K$-théorie algébrique des espaces [**20**]. C'est bien sûr frappant que de plusieurs courants d'idées, on obtienne la même théorie : la *cohomologie cyclique*. On a le lemme simple et crucial suivant.

LEMME. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre et $\tau$ une application $(n+1)$-linéaire $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \cdots \times \mathcal{A} \to \mathbf{C}$ telle que*
(1) $\tau(a^1, \dots, a^n, a^0) = (-1)^n \tau(a^0, \dots, a^n) \forall a^i \in \mathcal{A}$;
(2) $\sum_0^n (-1)^j \tau(a^0, \dots, a^j, a^{j+1}, \dots, a^{n+1}) + (-1)^{n+1} \tau(a^{n+1}a^0, \dots, a^n) = 0 \ \ \forall a^i \in \mathcal{A}$.
*Alors l'application $e \in \mathcal{A}, e^2 = e \to \tau(e, \dots, e)$, fournit un morphisme de $K_0(\mathcal{A})$ dans $\mathbf{C}$.*

En fait, $K_0(\mathcal{A})$ est engendré par les idempotents $e^2 = e$ dans les matrices sur $\mathcal{A}$, $M_q(\mathcal{A}) = M_q(\mathbf{C}) \otimes \mathcal{A}$, et on doit étendre $\tau$ à $M_q(\mathcal{A})$ par l'égalité :

$$\tau_q(m^0 \otimes a^0, \dots, m^n \otimes a^n) = \mathrm{Trace}(m^0 \dots m^n)\tau(a^0, \dots, a^n)$$

$\forall m^j \in M_q(\mathbf{C}), a^j \in \mathcal{A}$.

Voici quelques exemples de fonctionnelles r$\tau$ qui satisfont (1) et (2) :

EXEMPLE $\alpha$. Soit $\mathcal{A} = \mathbf{C}^\infty(M)$, l'algèbre des fonctions lisses sur une variété compacte, et $C$ un flot fermé sur $M$ de dimension $k$. Alors $\tau(\int^0, \dots, \int^k) = \langle C, \int^0 d \int^1 \wedge \dots \wedge d \int^k \rangle \forall \int^j \in \mathcal{A}$ a exactement les propriétés (1), (2) d'un cocycle cyclique. En fait, $\tau$ satisfait $\tau^\sigma = sign(\sigma)\tau$ pour *toute* permutation de $\{0, 1, .., k\}$, mais puisque Trace$(m^0 \dots m^k)$ est invariant seulement sous les permutations *cycliques*, il n'y a que (1) qui soit satisfaite par tous les $\tau_q$. On a $K_0(\mathcal{A}) = K^0(M)$ et le lemme fournit en retour le caractère de Chern, vu comme un appariement avec l'homologie de $M$.

EXEMPLE $\beta$. Soit $\pi$ un groupe discret, $\mathcal{A} = \mathbf{C}\pi$ l'anneau de groupe, et $\omega \in \mathbf{Z}^n(\pi, \mathbf{C})$ un cocycle de groupe convenablement normalisé tel que $\omega(g^1, \ldots, g^n) = 0$ si $g^1 \ldots g^n = 1$. Alors l'égalité

$$\tau(g^0, \ldots, g^n) = 0 \text{ if } g^0 \ldots g^n \neq 1 \ \ \forall g^i \in \pi$$
$$\tau(g^0, \ldots, g^n) = \omega(g^1, \ldots, g^n) \text{ if } g^0 \ldots g^n = 1 \ \ \forall g^i \in \pi,$$

définit un cocycle $n$-cyclique $\tau$ sur $\mathcal{A}$. De plus, en étendant $\tau$ aux matrices infinies sur $\mathcal{A}$, on peut montrer que

$$\langle \tau, \mathrm{Signature}_\pi(\widetilde{M}) \rangle = \langle \mathcal{L}_M . \varphi^*(\omega), [M] \rangle$$

avec les notations du problème des plus hautes signatures. La cohomologie cyclique des anneaux de groupes est calculée par Burghelea dans [**8**].

EXEMPLE $\gamma$. Pour chaque $n \geq p$ pair, le caractère $n$-dimensionnel $\tau_n$ d'un module de Fredholm sur $A$ est un cocycle cyclique. De plus, l'appariement avec $K_0(A)$, $\langle \tau_n, e \rangle$ est donné pour tout idempotent $e$ par l'*indice d'un opérateur de Fredholm*, et, en particulier, il aboutit dans $\mathbf{Z} \subset \mathbf{C}$. Il correspond à l'appariement $\mathbf{Z}$-valué entre la $K$-théorie et la $K$-homologie, ce qui assure qu'il est hautement non trivial.

Etant donnée une algèbre $\mathcal{A}$, il y a une manière évidente de construire des cocycles cycliques sur $\mathcal{A}$, notamment $\tau = b\varphi$ où $\varphi \in C_\lambda^{n-1}$ est une fonctionnelle $n$-linéaire sur $\mathcal{A}$ satisfaisant (1), et $b\varphi$ sa colimite de Hochschild donnée par la formule (2). Le groupe pertinent est le quotient $H_\lambda^n(\mathcal{A}) = Z_\lambda^n(\mathcal{A})/bC_\lambda^{n-1}$, où $Z_\lambda^n = \mathrm{Ker}\ b$, et il est appelé la *cohomologie cyclique* de $\mathcal{A}$. Il s'avère qu'en travaillant simplement avec les modules de Fredholm de l'exemple $\gamma$, toutes les propriétés de la cohomologie cyclique permettent de retomber sur ses pieds. D'abord, un module de Fredholm a de nombreux caractères $\tau_q$, un pour chaque entier pair $q \geq p$, et il ne serait pas déraisonnable de s'attendre à ce que $\tau_{q+2}, \tau_{q+4} \ldots$ amène une nouvelle information non contenue dans $\tau_q$. Les calculs explicites montrent qu'il y a un opérateur de périodicité naturelle

$$S : H_\lambda^n(\mathcal{A}) \to H_\lambda^{n+2}(\mathcal{A})$$

donné en fait par le cup produit par le générateur de ${H_\lambda}^2(\mathbf{C})$ et tel que $\tau_{q+2k} = S^k \tau_q$ in $H_\lambda^{q+2k}(\mathcal{A})$. Alors, dans le but de trouver le plus petit $n$ pour lequel $\tau_n$ est défini, on a besoin de déterminer l'image de $S$. Mais par construction, le complexe $(C_\lambda^n, b)$ est un sous-complexe du complexe de Hochschild $(C^n, b)$ où $C^n$ est l'espace de toutes les fonctionnelles $(n+1)$-linéaires sur $\mathcal{A}$. Il en résulte que $\tau \in \mathrm{Im} S$ ssi $\tau$ est trivial dans ce dernier complexe, dont la cohomologie $H^n(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$, la cohomologie de Hochschild de $\mathcal{A}$ à coefficients dans le bimodule des formes linéaires sur $\mathcal{A}$, est calculable par les méthodes générales de l'algèbre homologique. Le point final est la construction d'un opérateur naturel $B$ à partir de la cohomologie de Hochschild $H^n(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ vers $H_\lambda^{n-1}(\mathcal{A})$ et la preuve de l'exactitude de la séquence suivante :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^n_\lambda(\mathcal{A}) \arrow[r, "S"] & H^{n+2}_\lambda(\mathcal{A}) \arrow[r, "I"] & H^{n+2}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*) \arrow[dll, "B"'] \\
& H^{n+1}_\lambda(\mathcal{A}) \arrow[r, "S"] & H^{n+3}_\lambda(\mathcal{A}) \arrow[r, "I"] & H^{n+3}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ainsi, la cohomologie de Hochschild et la cohomologie cyclique forment un couple exact qui avec la séquence spectrale associée devient un outil de base pour calculer la cohomologie cyclique des algèbres. La puissance de cet outil est illustrée par deux exemples :

EXEMPLE a. Soit $M$ une variété compacte, $\mathcal{A} = C^\infty(M)$. En imposant des conditions de continuité évidentes aux cochaînes, on obtient que les groupes de cohomologie de Hochschild $H^q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ sont identifiables à l'espace $\Omega_q$, des flots de de Rham de dimension $q$ sur $M$. L'application $I \circ B$ du couple exact est la limite de de Rham $d^t$, et on obtient

$$H^q_\lambda(\mathcal{A}) = \{\mathrm{Ker}\, d^t \subset \Omega_q\} + H_{q-2}(M, \mathbf{C}) + H_{q-4}(M, \mathbf{C}) \dots .$$

L'homologie de de Rham de $M$ s'identifie à la cohomologie cyclique périodique de

$$\mathcal{A} = H^*_{\mathrm{Per}}(\mathcal{A}) = \underset{\rightarrow}{\mathrm{Lim}}(H^n_\lambda(\mathcal{A}), S).$$

EXEMPLE b. Soit $(M, F)$ une variété feuilletée, $A = C^*(M, F)$ sa $C^*$-algèbre correspondante. Dans $A$, il y a une sous-algèbre dense naturelle $\mathcal{A}$ d'éléments lisses et on doit calculer sa cohomologie cyclique. On a

$$H^*_{\mathrm{Per}}(\mathcal{A}) \cong H^*_\tau(\text{Espace classifiant})$$

où le côté droit est la cohomologie avec les coefficients complexes de l'espace classifiant du groupoïde d'holonomie ou le graphe du feuilletage. L'indice $\tau$ signifie que cette cohomologie est tordue par l'orientation du fibré transverse $\tau$ du feuilletage. En utilisant les fibres sur $M$ et la construction naturelle de $\mathcal{A}$, on construit un morphisme de localisation $\lambda_M$, qui est une généralisation de grande portée du flot de Ruelle-Sullivan :

$$\lambda_V \,:\, H^*_{\mathrm{Per}}(\mathcal{A}) \overset{\lambda_M}{\to} H^*_\tau(M, C)$$

et l'on aboutit à la formulation cohomologique suivante du théorème de l'indice longitudinal pour les feuilletages [**12**].

THÉORÈME. *Soit (M,F) une variété compacte feuilletée, D un opérateur elliptique longitudinal, et $\tau$ un cocycle cyclique sur $\mathcal{A}$. Alors*

$$\langle \tau, \mathrm{Indice}(D) \rangle = (\lambda_M(\tau) \mathrm{Td}(F_{\mathbf{C}}) \mathrm{Ch}\, \sigma_D, [M])$$

*où $\sigma_D$ est le symbole longitudinal de D.*

Il y a, cependant, encore une très difficile étape à franchir pour utiliser la cohomologie cyclique comme une théorie de de Rham ordinaire pour nos "espaces" - tel que l'espace des feuilles d'un feuilletage - et pour prouver le Théorème 2 de cet article, par exemple [**14**]. Le point problématique est que $\mathcal{A} \subset A$, dans l'exemple b, n'est en général pas un isomorphisme en $K$-théorie, et l'information analytique repose en $K(A)$ et non en $K(\mathcal{A})$. Ce problème est complètement résolu dans [**14**] pour la classe transverse fondamentale de $M/F$ et toutes les classes venant par pullback de la cohomologie de Gelfand-Fuchs par la fonction $B$(espace classifiant) $\rightarrow B\Gamma_q$.

Cette difficulté est que pour un feuilletage général, il est impossible de réduire le groupe de structure transverse à un groupe compact. De façon équivalente, pour un groupe de difféomorphismes agissant sur une variété, on ne peut pas trouver de métrique Riemannienne invariante. Le résultat implique, en particulier, la conjecture de Novikov pour les classes de cohomologie de Gelfand-Fuchs sur $B(\text{Diff } N)$ pour tout $N$.

## BIBLIOGRAPHIE

Commentaires bibliographiques. Pour un survol de la cohomologie cyclique et une bibliographie complète, voir [**10**, **17**]. Le calcul de l'homologie des traces sur l'algèbre différentielle universelle $\Omega(\mathcal{A})$ d'une algèbre $\mathcal{A}$ a été effectué explicitement dans [**11**, Théorème 33, p. 118]. Une fois dualisé, cela donne le calcul [**22**] en fonction de l'homologie cyclique de la cohomologie du complexe universel de de Rham introduit par Karoubi dans [**21**]. Le calcul de l'homologie de l'algèbre de Lie des matrices en fonction de l'homologie cyclique est faite dans [**25**, **30**]. L'idée d'utiliser l'identité de Lichnerowicz dans un contexte de C*-algèbres est due à J. Rosenberg [**27**].


[1] M.F. Atiyah, *Global theory of elliptic operators*, Proc. Internat. Conf. on Functional Analysis and Related Topics, Univ. of Tokyo Pres, Tokyo, 1970, pp. 21-29.

[2] _________, *K-theory*, Benjamin, New York, 1967.

[3] M. F. Atiyah and L. Singer, *The index of elliptic operators*. IV, Ann. of Math. **93** (1971), 119-138.

[4] P. Baum et A. Connes, *Geometric K-theory for Lie groups and foliations*, Preprint I.H.E.S., 1082.

[5] P. Baum et R. Douglas, *K-homology and index theory*, Operator Algebras and Applications, Proc, Sympos. Pure Math, vol. 38, part I, Amer, Math. Soc., Providence, R.I., 1982, pp. 117-173.

[6] J. Bellissard, *$K$-theory of C-alpebras in solid state physics* (Conf. on Statistical Mechanics and Field Theory, Mathematical Aspects, Groningen, August 26-30, 1985).

[7] L. G. Brown, R. Douglas, and P. A. Filmore, *Extensions of $C^*$-algebras and $K$-homology*, Ann. of Math. (2) **105** (107), 265-324.

[8] D. Burghelea, *The cyclic cohomology of the group rings*, Comment. Math. Helv. **60** (1985), 354-365.

[9] R. Carey et J. D. Pincus, *Almost commuting algebras, $K$-theory and operator algebras*, Lecture Notes in Math., vol. 575, Springer, Berin-New Vork, 1977.

[10] P. Cartier, *Homologie cyclique*, Exposé 621, Seminaire Bourbaki, Février 1984.

[11] A. Connes, *Noncommutative differential geometry. Part I, The Chern character in $K$-homology, Part II, de Rham homology and noncommutative algebra*, (Preprint), Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math **62** (1986), 44-144.

[12] A. Connes et G. Skandalis, *The longitudinal index theorem for foliations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **20** (1984), 1139-1183.

[13] A. Connes, *$C^*$-algèbres et géométrie différentielle*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **290** (1980), 599-604.

[14] _________, *Cyclic cohomology and the transverse fundamental class of a foliation*, Preprint I.H.E.S. M/84/7, 1984.

[15] _________, *Spectral sequence and homology of currents for operator algebras*, Math Forschungsinstitute Oberwolfach Tagungsbericht 42/81, Funktionalanalysis and $C^*$-Algebren, 27-9/3-10-1981.

[16] R. Douglas and D. Voiculeseu, *On the smoothness af sphere extensions*, J. Operator Theory **6** (1981), no. 1, 103-111.

[18] J. Helton and R. Howe, *Integral operators, commutators, traces, index and homology*, Proc. Conf, on Operator Theory, Lecture Notes in Math, vol. 345, Springer, Berlin-New York, 1973.

[19] _________, *Traces of commutators of integral operators*, Acta Math. **135** (1975), 271-305.

[20] W. C. Hsiang et R. E. Staffeldt, *A model for computing rational algebraic $K$-theory of simply connected spaces*, Invent. Math. **68** (1982), 227-239.

[21] M. Karoubi, *Connexions, courbures et classes caractéristiques en $K$-théorie algébrique*, CMS Conf. Proc, 2, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1982.

[22] _________, *Homologie cyclique et $K$-théorie algébrique*. I, II, C.R. Acad. Sci. Sér. I Math. **297** (1983), 447-450, 513-516.

[23] G. Kasparov, *$K$-functor and extensions of $C^*$-algebras*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Math. **44** (1980), 571-636.

[24] _________, *$K$-theory, group $C^*$-algebras and higher signatures*, Conspectus, Chernogolovka, 1983.

[25] J. L. Loday et D. Quillen, *Cyclic homology and the Lie algebra of matrices*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **296** (1983), 295-297.

[26] M. Pimsner et D. Voiculescu, *Exact sequences for $K$-groups and Ext-groups of certain cross-product $C^*$-algebras*, J. Operator Theory **4** (1980), 93-118.

[27] J. Rosenberg, *$C^*$-algebras, positive scalar curvature and the Novikov conjecture*, Inst. Hautes Études Sci., Publ. Math. **58** (1984), 409-424.

[28] I. Segal, *Quantized differential forms*, Topology **7** (1968), 147-172.

[29] *Quantization of the de Rham complex*, Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 16, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970, pp. 205-210.

[30] B. L. Tsigan, *Homology of matrix Lie algebras over rings and Hochschild homology*, Uspekhi Mat. Nauk **38** (1983), 217-218.

Collège de France, 75005 Paris, France