

UNE VISION DES MATHÉMATIQUES ALAIN CONNES

Les mathématiques sont la colonne vertébrale de la science moderne et une source remarquablement efficace de nouveaux concepts et outils pour comprendre la “réalité” à laquelle nous participons.

Elles jouent un rôle fondamental dans les grandes nouvelles théories de la physique du XX^e siècle telles que la relativité générale, et la mécanique quantique.

La nature et le fonctionnement interne de cette activité mentale sont souvent mal compris ou simplement ignorés, même parmi les scientifiques d’autres disciplines. Ils n’utilisent généralement que des outils mathématiques rudimentaires déjà connus au XIX^e siècle et manquent complètement la force et la profondeur de l’évolution constante de nos concepts et outils mathématiques.

On m’a demandé d’écrire une introduction générale sur les mathématiques, ce que j’ai fini par faire d’un point de vue plutôt personnel plutôt que de produire l’interminable litanie habituelle “X a fait ceci et Y a fait cela”. L’évolution du concept “d’espace” en mathématiques sert de thème fédérateur est décrite, en partant de certaines de ses racines historiques et en allant vers des développements plus récents dans lesquels j’ai été plus ou moins directement impliqué.

1. L’UNITÉ DES MATHÉMATIQUES

Il pourrait être tentant au premier abord de voir les mathématiques comme l’union de parties distinctes comme la Géométrie, l’Algèbre, l’Analyse, la Théorie des nombres etc... où la première est dominée par la compréhension du concept d’“espace”, la seconde par l’art de manipuler des “symboles”, la suivante par l’accès à “l’infini” et au “continuum” etc...

Cela ne rend cependant pas justice à l’une des caractéristiques les plus essentielles du monde mathématique, à savoir qu’il est pratiquement impossible d’isoler l’une des parties ci-dessus des autres sans les priver de leur essence. De cette façon, le corpus des mathématiques ressemble à une entité biologique qui ne peut survivre que comme un tout et périrait si elle était séparée en morceaux disjoints.

Le premier embryon d’image mentale du monde mathématique à partir duquel on peut partir est celui d’un réseau d’une complexité déconcertante entre des concepts de base. Ces concepts de base eux-mêmes sont assez simples et sont le résultat d’un long processus de “distillation” dans l’alambic de la pensée humaine.

Là où un dictionnaire procède de manière circulaire, définissant un mot par référence à un autre, les concepts de base des mathématiques sont infiniment plus proches d’“éléments indécomposables”, des sortes de “particules élémentaires” de la pensée avec un minimum d’ambiguïté dans leur forme.

C’est le cas par exemple pour les nombres naturels où le nombre 3 représente cette qualité qui est commune à tous les ensembles à trois éléments. Ce sont des ensembles qui deviennent vides exactement après que nous ayons supprimé un de leurs éléments, puis un autre, puis un autre. De cette façon, la qualité en

question devient indépendante du symbole 3 qui n'est qu'un dispositif utile pour coder le nombre.

Alors que les lettres que nous utilisons pour coder les nombres sont dépendantes des accidents sociologiques et historiques qui sont à l'origine de l'évolution de toute langue, le concept mathématique de nombre et même la spécificité d'un nombre particulier tel que 17 sont totalement indépendants de ces accidents.

La "pureté" de ce concept mathématique le plus simple a été utilisée par Hans Freudenthal pour concevoir un langage de communication cosmique qu'il a appelé "Lincos" [39].

La vie scientifique des mathématiciens peut être décrite comme un voyage à l'intérieur de la géographie de la "réalité mathématique" qu'ils dévoilent peu à peu dans leur cadre mental intime.

Cela commence souvent par un acte de rébellion à l'égard de la description dogmatique existante de cette réalité que l'on trouvera dans les livres existants. Le jeune "futur mathématicien" se rend compte dans son propre esprit que sa perception du monde mathématique capture certaines caractéristiques qui ne cadrent pas tout à fait avec le dogme existant. Ce premier acte est souvent dû dans la plupart des cas à l'ignorance mais il permet de s'affranchir du respect de l'autorité en se fiant à son intuition à condition qu'elle soit étayée par des preuves concrètes. Une fois que les mathématiciens connaissent vraiment, de manière originale et "personnelle", une petite partie du monde mathématique, aussi ésotérique qu'elle puisse paraître au premier abord¹ leur voyage peut vraiment commencer. Il est bien sûr primordial tout du long de ne pas rompre le "fil d'Ariane" qui permet de garder constamment un œil neuf sur tout ce que l'on rencontrera en chemin, et aussi de remonter à la source si l'on se sent parfois perdu...

Il est également essentiel de toujours bouger. Sinon, le risque est de se cantonner dans un domaine relativement restreint d'extrême spécialisation technique, réduisant ainsi sa perception du monde mathématique et de son ahurissante diversité.

Le point vraiment *fondamental* à cet égard est que si tant de mathématiciens ont passé toute leur vie scientifique à explorer ce monde, ils s'accordent tous sur ses contours et sur sa connexité : quelle que soit l'origine de son itinéraire, un jour ou l'autre si l'on marche assez longtemps, on est obligé d'atteindre une ville bien connue, c'est-à-dire par exemple de rencontrer des fonctions elliptiques, des formes modulaires, des fonctions zêta. "Tous les chemins mènent à Rome" et le monde mathématique est "connecté".

En d'autres termes, il n'y a qu'"un" monde mathématique, dont l'exploration est la tâche de tous les mathématiciens et ils sont tous dans le même bateau en quelque sorte.

De plus, exactement comme l'existence de la réalité matérielle extérieure semble indéniable mais n'est en fait justifiée que par la cohérence et le consensus de nos perceptions, l'existence de la réalité mathématique découle de sa cohérence et du consensus des découvertes des mathématiciens. Le fait que les preuves soient un ingrédient nécessaire d'une théorie mathématique implique une forme de "consensus" beaucoup plus fiable que dans de nombreuses autres disciplines intellectuelles ou scientifiques. Il a jusqu'à présent été assez fort pour éviter la formation de grands rassemblements de chercheurs autour de certains dogmes scientifiques "à la manière religieuse", imposés par l'impérialisme sociologique.

¹Mon point de départ était la localisation des racines des polynômes.

La plupart des mathématiciens adoptent une attitude pragmatique et se considèrent comme les explorateurs de ce “monde mathématique” dont ils n’ont aucune envie de remettre en cause l’existence, et dont ils découvrent la structure par un mélange d’intuition, pas si étranger au “désir poétique”², et d’une grande rationalité nécessitant d’intenses moments de concentration.

Chaque génération construit une “image mentale” de sa propre compréhension de ce monde et construit des outils mentaux de plus en plus pénétrants pour explorer des aspects auparavant cachés de cette réalité.

Là où les choses deviennent vraiment intéressantes, c’est lorsque des ponts inattendus émergent entre des parties du monde mathématique que l’on croyait auparavant très éloignées les unes des autres dans l’image mentale naturelle qu’une génération avait élaborée. À ce moment-là, on a l’impression qu’un vent soudain a soufflé le brouillard qui cachait des parties d’un magnifique paysage.

Je décrirai à la fin de cet article un exemple récent d’un tel pont. Avant de faire cela, je prendrai le concept d’“espace” comme ligne directrice pour emmener le lecteur à travers une visite guidée menant au bord de l’évolution réelle de ce concept à la fois en géométrie algébrique et en géométrie non-commutative. Je passerai également en revue quelques-uns des outils “fondamentaux” dont nous disposons aujourd’hui comme la “positivité”, la “cohomologie”, le “calcul”, les “catégories abéliennes” et surtout les “symétries” qui seront un thème récurrent dans les trois parties différentes de ce texte.

Il est évidemment impossible de donner un “panorama” de l’ensemble des mathématiques dans un texte de taille raisonnable. Mais il est parfaitement possible, en choisissant un thème précis, de montrer la limite de certains concepts fondamentaux qui jouent un rôle central en mathématiques et continuent d’évoluer activement.

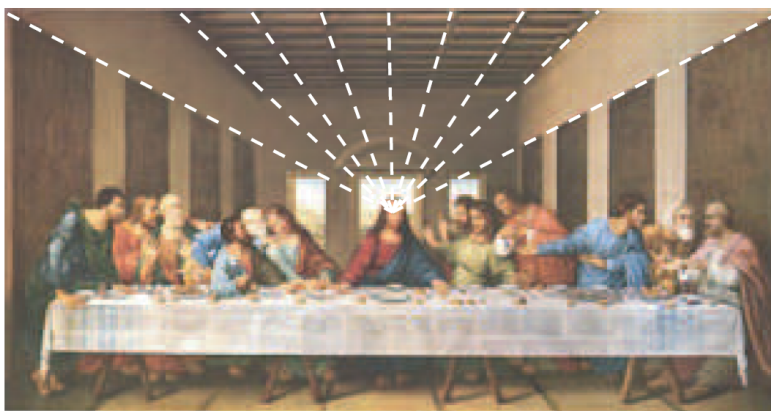


FIGURE 1. Perspective

Le concept “d’espace” est suffisamment polyvalent pour être un thème idéal pour montrer cette évolution active et nous confronterons le concept mathématique d’espace à son concept correspondant en physique et plus précisément à ce que la théorie des champs quantique nous enseigne et nous essaierons d’expliquer plusieurs des questions ouvertes et des découvertes récentes dans ce domaine.

²comme souligné par Paul Valéry.

2. LE CONCEPT D'ESPACE

Les images mentales de la géométrie sont faciles à créer en exploitant les zones visuelles du cerveau. Il serait cependant naïf de croire que la notion d'“espace”, c'est-à-dire l'étape où se développent les formes géométriques, est simple. En fait, comme nous le verrons plus loin, cette notion d'“espace” connaît encore une évolution drastique.

Le référentiel cartésien permet de coder un point du plan ou de l'espace euclidien par deux (ou trois) nombres réels $x^\mu \in \mathbb{R}$. Cette irruption des “nombres” dans la géométrie apparaît d'abord comme un acte de violence subi par la géométrie pensée comme une construction mentale synthétique.

Cet “acte de violence” inaugure la dualité entre géométrie et algèbre, entre l'œil du géomètre et les calculs de l'algébriste, calculs qui se déroulent dans le temps, en contraste avec la perception immédiate de l'intuition visuelle.

Loin d'être une opposition stérile, cette dualité devient extrêmement féconde lorsque géométrie et algèbre s'allient pour explorer des terres inconnues comme dans la nouvelle géométrie algébrique de la seconde moitié du XX^e siècle ou comme dans la géométrie non-commutative, deux façons d'appréhender la notion d'espace.

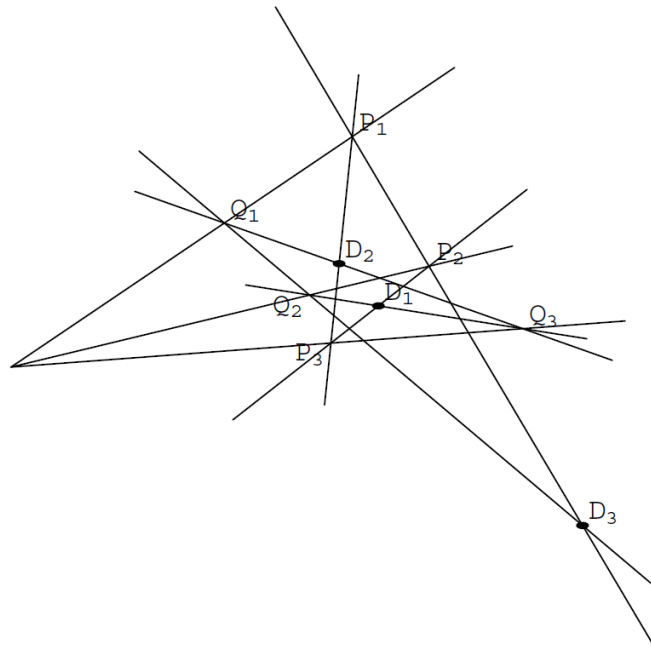


FIGURE 2. Théorème de Desargues : Soient P_j et Q_j , $j \in \{1, 2, 3\}$ des points tels que les trois droites (P_j, Q_j) ont une intersection. Alors les trois points $D_j := (P_k, P_l) \cap (Q_k, Q_l)$ sont sur la même droite.

2.1. Géométrie projective.

Décrivons d'abord brièvement la géométrie projective, un exemple révélateur de la dualité ci-dessus entre la géométrie et l'algèbre.

Au milieu du XVII^e siècle, G. Desargues, essayant de donner un fondement mathématique aux méthodes de perspective utilisées par les peintres et les architectes fonde la véritable géométrie projective. Le plan projectif réel de Desargues est l'ensemble $P_2(\mathbb{R})$ des droites passant par l'origine dans l'espace tridimensionnel \mathbb{R}^3 . Il ajoute aux points habituels du plan une "droite à l'infini" qui donne une formulation parfaite et un support pour les techniques empiriques de la perspective.

En fait, le théorème de Desargues (figure 2) peut être considéré comme la base de l'axiomatisation de la géométrie projective.

Ce théorème est une conséquence des quatre axiomes extrêmement simples qui définissent la géométrie projective, mais il nécessite pour sa démonstration que la dimension de la géométrie soit strictement supérieure à deux.

Ces axiomes expriment les propriétés de la relation " $P \in L$ " i.e. le point P appartient à la droite L , ce sont :

- l'existence et l'unicité de la droite contenant deux points distincts ;
- le fait que deux lignes définies par deux points chacune se rencontrent en un point ;
- le fait que chaque droite contient au moins trois points ;
- le fait qu'il existe un ensemble fini de points qui engendrent toute la géométrie, en itérant l'opération qui permet de passer de deux points à tous les points de la ligne à laquelle ces deux points appartiennent.

En dimension $n = 2$, le théorème de Desargues n'est plus une conséquence des axiomes ci-dessus et il faut l'ajouter comme cinquième axiome. Les géométries desarguennes de dimension n sont exactement les espaces projectifs $P_n(K)$ d'un corps K (pas nécessairement commutatif).

Elles sont ainsi en parfaite dualité avec le concept clé de l'algèbre : celui de corps.

Qu'est-ce qu'un corps ? C'est un ensemble de "nombres" que l'on peut additionner, multiplier et dans lequel tout élément non nul a un inverse de sorte que toutes les règles familières³ sont valides. Un exemple de base est donné par le corps des nombres rationnels \mathbb{Q} , mais il en existe de nombreux autres, le corps à deux éléments \mathbb{F}_2 ou le corps des nombres complexes \mathbb{C} . Le corps des quaternions de Hamilton \mathbb{H} est un bel exemple de corps non-commutatif.

La géométrie projective complexe c'est-à-dire celle de $P_n(\mathbb{C})$ prend sa forme définitive dans "La Géométrie" de Monge en 1795. La présence des points complexes à côté des réels simplifie considérablement le tableau d'ensemble et est d'une rare harmonie à la théorie générale par la simplicité et la généralité de ses résultats.

³sauf éventuellement la commutativité du produit.

Par exemple, tous les cercles du plan passent par les “points cycliques”, une paire de points (introduits par Poncelet) situés sur la droite à l’infini et ayant des coordonnées complexes. Ainsi, comme deux coniques arbitraires, deux cercles quelconques se rejoignent en fait en quatre points, une affirmation clairement fausse dans le plan réel.

La nécessité d’introduire et d’utiliser des nombres complexes même pour régler des problèmes dont la formulation est purement “réelle” était déjà apparue au XVI^e siècle pour la résolution de l’équation du troisième degré. En effet, même lorsque les trois racines d’une telle équation sont réelles, la forme conceptuelle de ces racines en fonction des radicaux passe nécessairement par des nombres complexes (cf. chapitres 11 à 23 du livre de Cardano de 1545 *Ars magna sive de regulis algebraicis*).

2.2. L’ange de la géométrie et le diable de l’algèbre.

La dualité

(1) Géométrie | Algèbre

déjà présente dans la discussion ci-dessus au sujet de la géométrie projective permet, lorsqu’elle est considérée comme un enrichissement mutuel, de traduire dans les deux sens de la géométrie à l’algèbre et d’obtenir des énoncés qu’il serait difficile de deviner si l’on restait confiné dans l’un des deux domaines. Ceci est mieux illustré par un exemple très simple.

Le résultat géométrique, dû à Frank Morley, traite de la géométrie plane et est l’un des rares résultats sur la géométrie des triangles qui était apparemment inconnu des mathématiciens grecs. Vous commencez avec un triangle quelconque... Maintenant le théorème de Morley, qu’il a trouvé aux environs de 1899, dit que *quel que soit le triangle ABC dont vous partez, le triangle $\alpha\beta\gamma$ est toujours équilatéral.* (fig.3).

Voici maintenant une “transcription” algébrique de ce résultat. On part d’un corps commutatif arbitraire et on prend trois transformations “affines” de K . Ce sont des applications g de K dans K de la forme $g(x) = \lambda x + \mu$, où $\lambda \neq 0$. Étant donnée une telle transformation la valeur de $\lambda \in K$ est unique et notée $\delta(g)$. Pour $g \in G$, $g(x) = \lambda x + \mu$ n’étant pas une translation, i.e. $\lambda \neq 1$, on appelle $\text{fix}(g) = \alpha$ l’unique point fixe $g(\alpha) = \alpha$ de g .

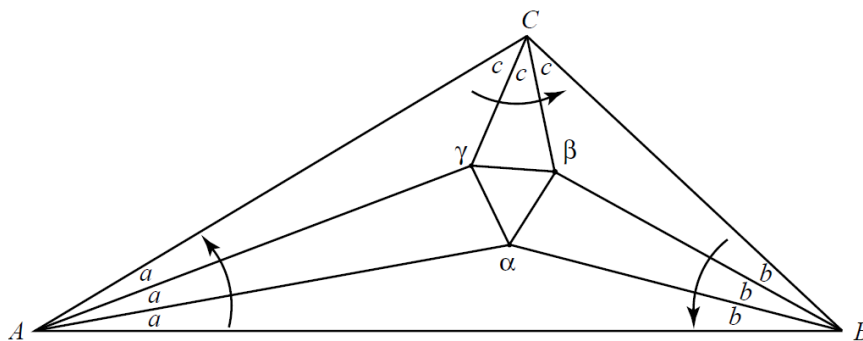


FIGURE 3. Théorème de Morley : *Le triangle $\alpha\beta\gamma$ obtenu à partir de l’intersection des trisecteurs consécutifs d’un triangle quelconque ABC est toujours équilatéral.*

Ces applications forment un groupe $G(K)$ (cf. sous-section 2.4) appelé le “groupe affine” et la contrepartie algébrique du théorème de Morley se lit ainsi

Soit $f, g, h \in G$ tels que fg, gh, hf et fgh ne soient pas des translations et soit $j = \delta(fgh)$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes,

a) $f^3 g^3 h^3 = 1$.

b) $j^3 = 1$ et $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$ où $\alpha = \text{fix}(fg), \beta = \text{fix}(gh), \gamma = \text{fix}(hf)$.

C’est une affirmation suffisamment générale maintenant, impliquant un corps arbitraire et sa preuve est une simple “vérification”, qui est un bon test des compétences élémentaires en “algèbre”.

Il reste à montrer comment cela implique le résultat de Morley. Mais la propriété fondamentale de “planéité” de la géométrie euclidienne, à savoir

$$(2) \quad a + b + c = \pi$$

où a, b, c sont les angles d’un triangle (A, B, C) est mieux représentée algébriquement par l’égalité

$$FGH = 1$$

dans le groupe affine $G(\mathbb{C})$ du corps $K = \mathbb{C}$ des nombres complexes, où F est la rotation de centre A et d’angle $2a$ et similairement pour G et H . Ainsi si on désigne par f la rotation de centre A et d’angle $2a/3$ et similairement pour g et h , on obtient la condition $f^3 g^3 h^3 = 1$.

L’équivalence ci-dessus montre donc que $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$, où α, β, γ , sont les points fixes de fg, gh et hf et où $j = \delta(fgh)$ est une racine cubique non triviale de l’unité. La relation $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$ est une caractérisation bien connue des triangles équilatéraux (elle signifie $\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta} = -j^2$, de telle sorte qu’on passe du vecteur $\overrightarrow{\beta\gamma}$ à $\overrightarrow{\beta\alpha}$ par une rotation d’angle $\pi/3$).

Enfin il est facile de vérifier que le point fixe $\alpha, f(g(\alpha)) = \alpha$ est l’intersection des trisectrices de A et B la plus proche du côté AB . En effet, la rotation g l’envoie sur son symétrique par rapport à AB , et f le ramène à sa place. Ainsi on a démontré que le triangle (α, β, γ) est équilatéral. En fait, on a aussi obtenu gratuitement 18 triangles équilatéraux obtenus en choisissant les autres solutions de $f^3 = F$ etc...

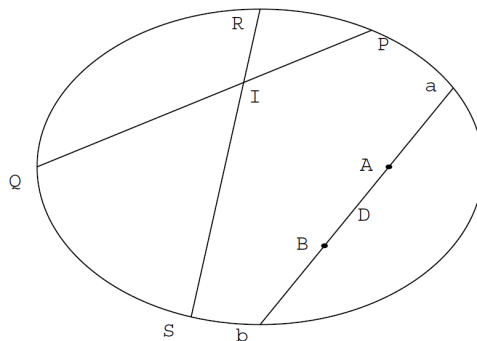


FIGURE 4. modèle de Klein

Cet exemple est typique de la puissance de la dualité entre d'une part la perception visuelle (où les faits géométriques peuvent être assez évidents) et d'autre part la compréhension algébrique. Ensuite, pourvu qu'on puisse écrire les choses en termes algébriques, on accroît leur puissance et on les rend applicables dans des circonstances totalement différentes. Par exemple, le théorème ci-dessus vaut pour un corps fini, il vaut par exemple pour tout corps qui a des racines cubiques d'unité... Donc en quelque sorte, passer de l'intuition géométrique à la formulation algébrique permet d'augmenter le pouvoir du fait "évident" original, un peu comme le langage peut augmenter la force de la perception, lorsqu'on utilise les "mots justes".

2.3. Géométrie non-euclidienne.

La découverte de la géométrie non-euclidienne au début du XIX^e siècle libère les concepts géométriques dont le cadre s'ouvre dans deux directions différentes.

- la première ouverture est intimement liée à la notion de symétrie et à la théorie des groupes de Lie ;
- la seconde est la naissance de la géométrie des espaces courbes de Gauss et Riemann, qui devait jouer un rôle crucial peu après dans l'élaboration de la relativité générale par Einstein.

Un modèle particulièrement simple de géométrie non-euclidienne est le modèle de Klein. Les points de la géométrie sont les points du plan situés à l'intérieur d'une ellipse fixe E (cf. Fig. 4). Les lignes de la géométrie sont les intersections des lignes euclidiennes ordinaires avec l'intérieur de l'ellipse.

Le cinquième postulat d'Euclide sur la "planéité", c'est-à-dire sur la somme des angles d'un triangle (2), peut être reformulé comme l'unicité de la droite parallèle à ⁴ une droite donnée D passant par un point $I \notin D$. Sous cette forme, ce postulat est donc évidemment violé dans le modèle de Klein puisque par un point tel que I passent plusieurs droites telles que $L = PQ$ et $L' = RS$ ne croisent pas D .

Il ne suffit cependant pas de donner les points et les lignes de la géométrie pour la déterminer en entier. Il faut en effet aussi spécifier les relations de "congruence" entre deux segments⁵ AB et CD . La congruence de segments signifie qu'ils ont la même "longueur" et cette condition est spécifiée dans le modèle de Klein par

$$(3) \quad \text{longueur de}(AB) = \log(\text{coefficient de croisement}(A, B; b, a))$$

où le rapport croisé de quatre points P_j sur la même ligne de coordonnées s_j est par définition

$$(4) \quad \text{coefficient de croisement}(P1, P2; P3, P4) := \frac{(s_1 - s_3)(s_2 - s_4)}{(s_2 - s_3)(s_1 - s_4)}$$

La géométrie non-euclidienne a été découverte au début du XIX^e siècle par Lobachevski et Bolyai, après de nombreux efforts de grands mathématiciens comme Legendre pour montrer que le cinquième axiome d'Euclide était inutile. Gauss l'a découvert de manière indépendante et n'a pas rendu sa découverte publique, mais en développant l'idée de "courbure intrinsèque", il avait déjà une longueur d'avance de

⁴i.e. n'intersectant pas.

⁵aussi bien qu'entre angles.

toute façon.

Tous les axiomes d'Euclide sont satisfaits par cette géométrie⁶ sauf le cinquième. Il est frappant de constater, rétrospectivement, la fécondité de la question de l'indépendance du cinquième axiome, question qui aurait d'abord pu être écartée hâtivement comme une sorte de perversion mentale en essayant d'éliminer l'un des axiomes d'une longue liste qui n'aurait même pas l'air plus courte une fois ceci fait.

Ce que le temps a montré, c'est que loin de n'être qu'un contre-exemple ésotérique, la géométrie non-euclidienne est d'une richesse et d'une fécondité rares. En cassant le cadre traditionnel, elle a généré deux ouvertures conceptuelles auxquelles nous avons fait allusion plus haut et dont on discutera plus bas, à partir de l'approche de S. Lie.

2.4. Symétries.

Une façon de définir la congruence des segments dans le modèle de Klein ci-dessus, sans se référer à la "longueur", c'est-à-dire à la formule (3), est d'utiliser le groupe de symétrie naturelle G de la géométrie donnée par les transformations projectives T du plan qui préservent l'ellipse E . Alors, par définition, deux segments AB et CD sont congrus si et seulement s'il existe une transformation $T \in G$ telle que $T(A) = C, T(B) = D$.

L'ensemble de ces transformations forme un groupe, c'est-à-dire qu'on peut composer de telles transformations et en obtenir une autre, i.e. on a une "loi de composition"

$$(5) \quad (S, T) \rightarrow S \circ T \in G, \quad \forall S, T \in G,$$

d'éléments de G dans lesquels plusieurs produits sont définis indépendamment des parenthèses, i.e.

$$(6) \quad (S \circ T) \circ U = S \circ (T \circ U)$$

une condition dite "d'associativité", tandis que la transformation d'identité id satisfait la condition

$$(7) \quad S \circ \text{id} = \text{id} \circ S = S$$

et chaque élément S du groupe admet un inverse, uniquement déterminé par

$$(8) \quad S \circ S^{-1} = S^{-1} \circ S = \text{id}$$

La théorie des groupes prend son essor avec les travaux d'Abel et Galois sur la résolution des équations polynomiales (cf. section 3.6). Dans ce cas, les groupes impliqués sont les groupes finis, c'est-à-dire les ensembles finis G munis d'une loi de composition vérifiant les axiomes ci-dessus.

⁶Ces axiomes d'Euclide sont notablement plus compliqués que ceux de la géométrie projective évoqués plus haut.

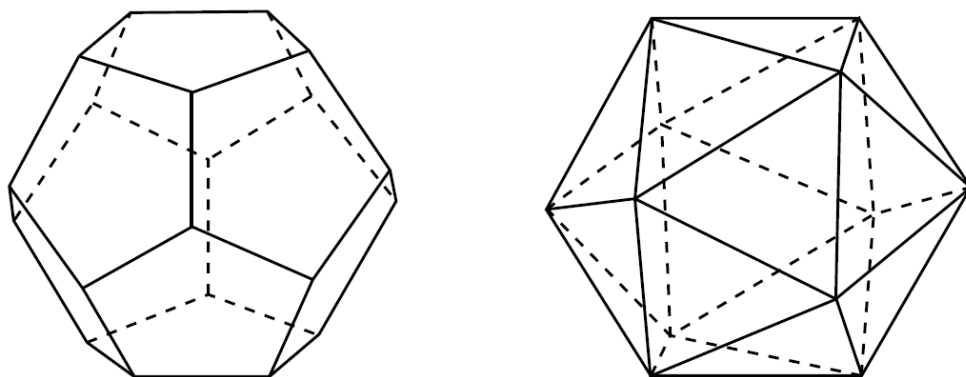


FIGURE 5. Dodécaèdre et icosaèdre

Exactement comme un entier peut être premier, c'est-à-dire ne pas avoir de diviseurs non triviaux, un groupe fini peut être "simple", c'est-à-dire ne pas pouvoir être envoyé de manière surjective vers un groupe non trivial plus petit tout en respectant la règle de composition.

La classification de tous les groupes finis simples est l'une des grandes réalisations des mathématiques du XX^e siècle.

Le groupe de symétries de la géométrie de Klein ci-dessus n'est pas fini puisque spécifier une de ces transformations géométriques revient en fait à choisir trois paramètres continus. Il relève de la théorie de S. Lie qui était en fait une continuation directe des idées formulées par Galois.

Ces idées de Sophus Lie ont été reformulées dans le "programme d'Erlangen" de Félix Klein et développées avec succès par Elie Cartan, dont la classification des groupes de Lie est un autre grand succès des mathématiques du XX^e siècle. À travers les travaux de Chevalley sur les groupes algébriques, la théorie des groupes de Lie a joué un rôle clé dans la classification des groupes finis simples.

2.5. Élément de longueur et géométrie riemannienne.

La congruence des segments en géométrie non-euclidienne peut également être définie en termes d'égalité de leur "longueur" selon (3). En fait, en s'appuyant sur la découverte de Gauss de la géométrie intrinsèque des surfaces, Riemann a pu étendre la géométrie bien au-delà des espaces qui admettent suffisamment de symétries pour se déplacer autour de corps rigides et permettent de définir la congruence des segments en termes de symétries.

Il a considéré des espaces beaucoup plus généraux dans lesquels on ne peut pas (en général) déplacer une forme géométrique comme un triangle par exemple sans la déformer c'est-à-dire modifier la longueur de certains de ses côtés ou de certains de ses angles.

La première nouvelle entrée géométrique est l'idée d'un espace comme une variété de points de dimension arbitraire, définie de manière intrinsèque indépendamment de tout plongement dans l'espace euclidien. D'une certaine manière, c'est une continuation de l'utilisation par Descartes des nombres réels comme coordonnées.

Dans le langage moderne, on appelle ces espaces des variétés différentiables, une notion qui modélise la gamme de variables continues de plusieurs dimensions. Les exemples les plus simples incluent les espaces de paramètres des systèmes mécaniques, les positions d'un corps solide ⁷, etc...

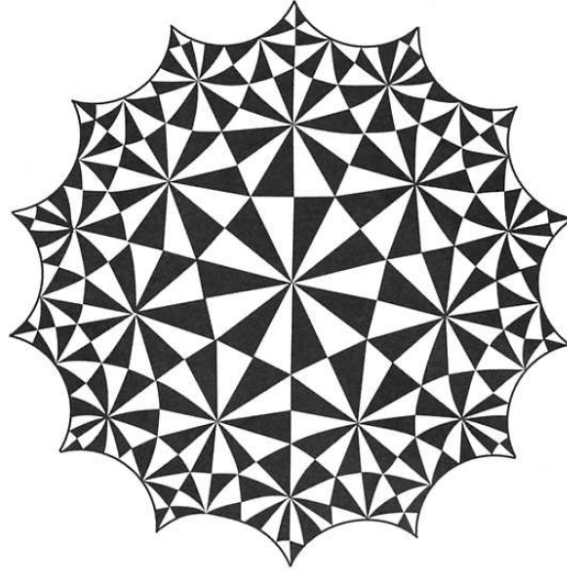


FIGURE 6. Triangles dans le disque de Poincaré

La deuxième idée clé du point de vue de Riemann est que si l'on ne peut pas transporter des corps rigides, on dispose d'une unité de longueur qui peut être transportée et permet de mesurer la longueur de petits intervalles. La distance $d(x, y)$ entre deux points x et y est alors donnée en additionnant la longueur des petits intervalles le long d'un chemin entre x et y puis en recherchant la longueur minimale de cette distance,

$$(9) \quad d(x, y) = \text{Inf} \left\{ \int_{\gamma} ds \mid \gamma \text{ est un chemin entre } x \text{ et } y \right\}$$

Ainsi la donnée géométrique est entièrement codée par "l'élément de longueur" et on suppose que son carré ds^2 , c'est-à-dire la longueur carrée des intervalles infinitésimaux en coordonnées locales x^μ autour de tout point, est donné sous une forme quadratique,

$$(10) \quad ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Par exemple, la longueur des côtés les plus courts des triangles noirs apparaissant sur la figure 6 sont tous égaux pour la métrique riemannienne qu'on utilise pour le disque de Poincaré de la géométrie non-euclidienne. L'élément de longueur ds correspondant est donné par :

$$(11) \quad ds^2 = (R^2 - \rho^2)^{-2} ds_E^2$$

où ds_E est l'élément de longueur euclidienne et ρ est la distance euclidienne au centre du cercle de rayon R dont l'intérieur forme l'ensemble des points du disque de Poincaré de la géométrie non-euclidienne.

⁷comme exercice amusant, le lecteur donnera une borne inférieure pour la dimension de la variété des positions du corps.

La géométrie est entièrement spécifiée par la paire (M, ds) où M est la variété des points et où l'élément de longueur ds est donné par (10).

Ce point de vue "métrique", par rapport à l'étude des "espaces symétriques", admet une liberté supplémentaire considérable puisque le choix des $g_{\mu\nu}$ est essentiellement arbitraire (sauf pour les "conditions de positivité" affirmant que la longueur du carré est positive, qui doit être relâchée pour s'adapter à la physique de l'espace-temps).

On comprend aisément comment l'avantage décisif donné par cette flexibilité permet un lien direct avec les lois de la physique en fournissant un modèle géométrique de la loi de Newton dans un potentiel arbitraire. Premièrement, la notion de droite est un concept de géométrie traditionnelle qui s'étend le plus directement en géométrie riemannienne sous le nom de "géodésiques". Une *géodésique* est un chemin γ qui atteint la valeur minimale de (9) entre deux points $x, y \in \gamma$ suffisamment proches. Le calcul des variations permet de voir les géodésiques comme les solutions de l'équation différentielle suivante, qui continue d'avoir du sens pour une signature arbitraire de la forme quadratique (10),

$$(12) \quad \frac{d^2 x^\mu}{dt^2} = -\frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (g_{\alpha\nu,\rho} + g_{\alpha\rho,\nu} - g_{\nu\rho,\alpha}) \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\rho}{dt}$$

où les $g_{\alpha\nu,\rho}$ sont les dérivées partielles $\partial_{x^\rho} g_{\alpha\nu}$ de $g_{\alpha\nu}$.

C'est la variabilité ou l'arbitraire dans le choix des $g_{\mu\nu}$ qui empêche un espace riemannien général d'être homogène par symétries de sorte que le mouvement rigide est en général impossible, mais c'est ce même arbitraire qui permet d'englober, par l'équation géodésique, de nombreuses lois de la mécanique qui dépendent en général de fonctions assez arbitraires comme le potentiel newtonien.

En effet l'un des points de départ cruciaux de la relativité générale est l'identité entre l'équation géodésique et la loi de gravité de Newton⁸ dans un potentiel V . Si dans la métrique de Minkowski de l'espace-temps, qui sert de modèle à la relativité restreinte, on modifie le coefficient de dt^2 en ajoutant le potentiel Newtonien V , l'équation géodésique devient la loi de Newton. Autrement dit, en modifiant non la mesure de la longueur mais celle du temps, on peut modéliser la loi gravitationnelle le long des lignes d'un espace-temps courbe et exprimer géométriquement le principe d'équivalence comme l'existence d'un substrat géométrique indépendant de la nature de la matière, qui est utilisé pour le tester par son mouvement d'inertie.

La loi de Poisson exprimant le Laplacien de V à partir de la distribution de matière devient alors les équations d'Einstein, qui font intervenir le tenseur de courbure et ont été manquées au départ puisque les seules dérivées premières "covariantes" du potentiel gravitationnel $g_{\mu\nu}$ s'évanouissent toutes identiquement⁹. La façon la plus simple de se souvenir des équations d'Einstein est de les dériver d'un principe d'action et dans le vide, cela est fourni par l'action de Hilbert-Einstein, qui en signature euclidienne est de la forme,

⁸cela vaut en négligeant les termes d'ordre supérieur.

⁹Einstein a écrit un article expliquant qu'alors il ne pouvait pas y avoir d'ensemble d'équations entièrement covariant, la courbure a heureusement sauvé la situation.

$$(13) \quad S_E[g_{\mu\nu}] = -\frac{1}{G} \int_M r \sqrt{g} d^4x$$

où G est une constante et $\sqrt{g} d^4x$ est la forme riemannienne du volume et r la courbure scalaire que nous retrouverons plus loin, au paragraphe 4.1. Les équations d'Einstein en présence de matière s'obtiennent alors facilement en ajoutant l'action de la matière couplée de façon minimale aux $g_{\mu\nu}$, à la précédente (13).

Non seulement la géométrie riemannienne a joué un rôle fondamental dans le développement de la relativité générale mais elle est devenue le paradigme central de la géométrie au XX^e siècle.

Après le théorème d'uniformisation de Poincaré et la classification des espaces symétriques de Cartan, M. Gromov a révolutionné la géométrie riemannienne par la puissance de sa vision. La conjecture de géométrisation de Thurston de trois variétés a été une autre grande force motrice derrière les progrès remarquables de la géométrie au cours des dernières années.

Il est intéressant de noter que Riemann était bien conscient des limites de son propre point de vue comme il l'a clairement exprimé dans la dernière page de sa leçon inaugurale [55] :

“Les questions sur l'immensément grand sont des questions vaines pour l'explication de la nature. Mais la situation est tout à fait différente avec des questions sur l'incommensurable petit. De l'exactitude avec laquelle nous poursuivons les phénomènes dans l'infiniment petit, dépend essentiellement notre connaissance de leurs relations causales. Les progrès des derniers siècles dans la compréhension des mécanismes de la Nature dépendent presque entièrement de l'exactitude de la construction rendue possible par l'invention de l'analyse de l'infini et par les principes simples découverts par Archimède, Galilée et Newton, dont la physique moderne se sert. En revanche, dans les sciences naturelles où les principes simples de telles constructions font encore défaut, pour découvrir des liens de causalité, on poursuit le phénomène dans l'espace infiniment petit, aussi loin que le microscope le permet. Les questions sur les relations métriques de l'espace dans l'immensément petit ne sont donc pas vaines.

Si l'on suppose que les corps existent indépendamment de leur position, alors la courbure est partout constante, et il résulte alors des mesures astronomiques qu'elle ne peut être différente de zéro ; ou du moins sa réciproque doit être une aire par rapport à laquelle la portée de nos télescopes peut être négligée. Mais si une telle indépendance des corps par rapport à la position n'existe pas, alors on ne peut pas tirer de conclusions sur les relations métriques dans l'infiniment petit de celles dans l'infiniment grand ; en tout point la courbure peut avoir des valeurs arbitraires dans trois directions, pourvu seulement que la courbure totale de chaque portion mesurable de l'espace ne soit pas sensiblement différente de zéro. Des relations encore plus compliquées peuvent se produire si l'élément de longueur ne peut pas être représenté, comme cela a été présupposé, par la racine carrée d'une expression différentielle du second degré. Or il semble que les notions empiriques sur lesquelles reposent les déterminations métriques de l'espace, la notion de corps solide et celle de rayon lumineux, perdent leur validité dans l'infiniment petit ; il est donc tout à fait concevable que les relations métriques de l'espace dans l'infiniment petit ne soient pas conformes aux hypothèses de la géométrie ; et en effet on doit le supposer dès que cela permet une explication plus simple des phénomènes.

La question de la validité des hypothèses de la géométrie dans l'infiniment petit est liée à la question du fondement des relations métriques de l'espace. À propos de cette question, qui peut en effet encore être rangée dans le cadre de l'étude de l'espace, la remarque ci-dessus est applicable, que dans une variété discrète le principe des relations métriques est déjà contenu dans le concept de variété, mais dans une variété continue, celui-ci doit provenir d'autre chose. Par conséquent, soit la réalité sous-jacente à l'espace doit former une variété discrète, soit la base des relations métriques doit être recherchée en dehors d'elle, dans des forces contraignantes agissant sur elle.

Une réponse à ces questions ne peut être trouvée qu'en partant de cette conception des phénomènes jusqu'ici approuvée par l'expérience, dont Newton a posé les bases, et en la modifiant peu à peu sous la contrainte de faits qui ne peuvent être expliqués par elle. Des investigations comme celle qui vient d'être faite, qui partent de concepts généraux, ne peuvent servir qu'à s'assurer que ce travail n'est pas entravé par des concepts trop restreints, et que les progrès dans la compréhension de l'enchaînement des choses ne sont pas entravés par des préjugés traditionnels.

Cela nous entraîne dans le domaine d'une autre science, la physique, dans lequel la nature de l'occasion présente ne nous permet pas d'entrer".

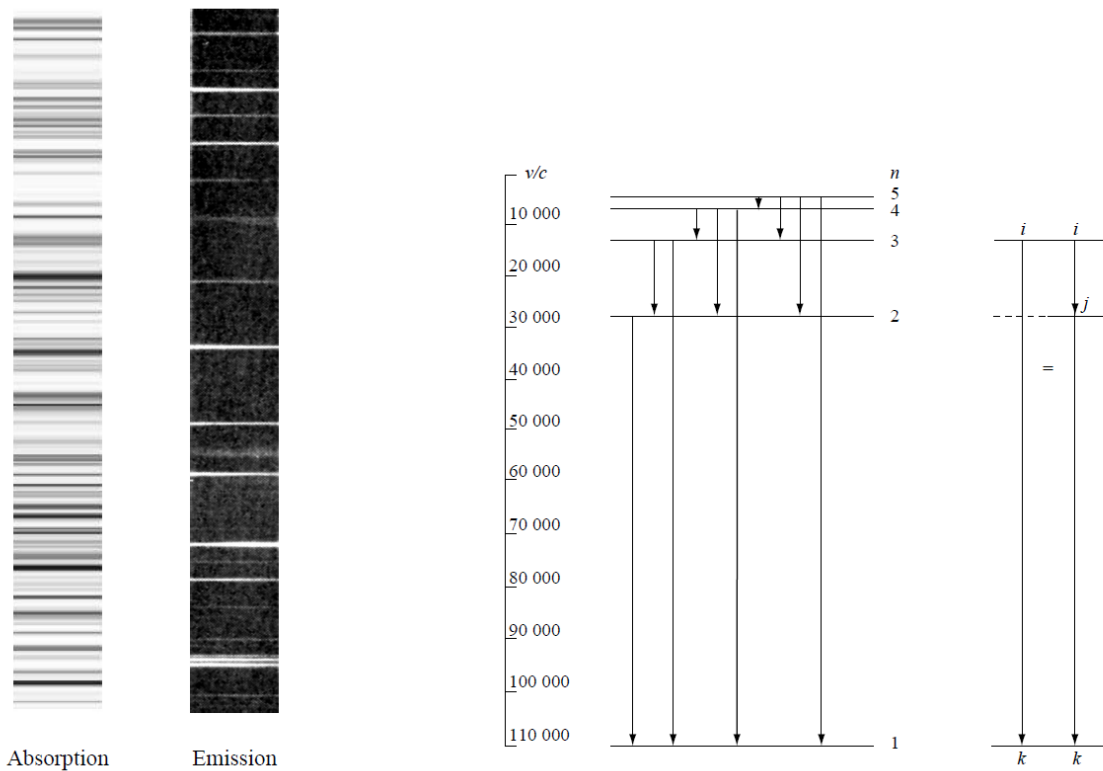


FIGURE 7. Spectres et loi de Ritz-Rydberg

Bien sûr Riemann ne pouvait pas¹⁰ anticiper l'autre découverte majeure de la physique au XX^e, à savoir la mécanique quantique qui débuta en 1900 avec la loi de Planck. Cette découverte, comme nous allons l'expliquer maintenant, a nécessité une extension des idées de Riemann à des espaces d'un type plus étendu que les variétés ordinaires.

2.6. Géométrie non-commutative.

Les premiers exemples de tels "nouveaux" espaces sont venus de la découverte de la nature quantique de l'espace des phases du système mécanique microscopique décrivant un atome. Un tel système se manifeste par son interaction avec le rayonnement et les spectres correspondants (Fig. 7). Les lois de base de la spectroscopie, telles que trouvées notamment par Ritz et Rydberg (Fig. 7), sont en contradiction avec l'image "variété classique" de l'espace des phases et Heisenberg a été le premier à comprendre que pour un système mécanique microscopique les coordonnées, notamment les nombres réels x^1, x^2, \dots tels que les positions et les impulsions que l'on voudrait utiliser pour paramétrer les points de l'espace des phases, ne

¹⁰pas plus que Hilbert dans sa liste des 23 problèmes du tournant du siècle.

commutent effectivement pas. Cela implique que le paradigme géométrique classique ci-dessus est trop étroit pour décrire de manière fidèle les espaces physiques de grand intérêt qui prévalent lorsqu'on traite des systèmes microscopiques. Cela incite à étendre la dualité

(14) Espace géométrique | Algèbre commutative

qui joue un rôle central en géométrie algébrique.

Le point de départ de la géométrie non-commutative est l'existence d'espaces naturels jouant un rôle essentiel à la fois en mathématiques et en physique mais dont "l'algèbre des coordonnées" n'est plus commutative. Les premiers exemples sont venus de Heisenberg et l'espace des phases en mécanique quantique mais il en existe bien d'autres, comme les espaces des feuilles de feuilletages, les duals des groupes discrets non abéliens, l'espace des pavages de Penrose, le tore non-commutatif \mathbb{T}_θ^2 qui joue un rôle dans l'effet de Hall quantique et dans la compactification de la théorie M [20] et l'espace des \mathbb{Q} -réseaux [31] qui est un espace géométrique naturel, avec une action du groupe d'échelle fournissant une interprétation spectrale des zéros des fonctions L de la théorie des nombres et une interprétation des formules explicites de Riemann-Weil comme formule de trace [19].

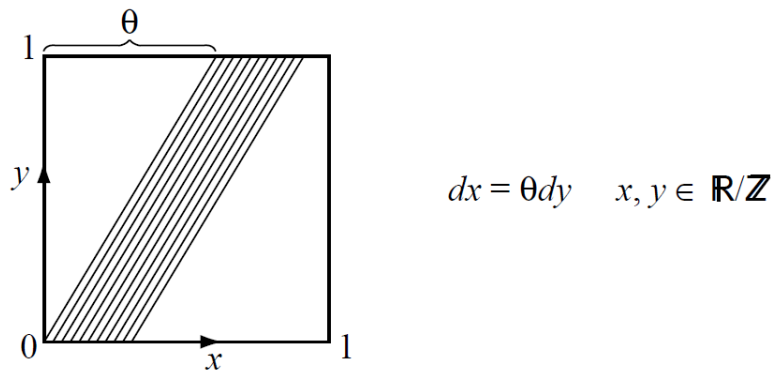


FIGURE 8. Feuilletage du tore à deux dimensions dont l'espacement des feuilles est \mathbb{T}_θ^2

Une autre riche classe d'exemples provient de la théorie de la déformation, comme la déformation des variétés de Poisson, des groupes quantiques et de leurs espaces homogènes. Les espaces de modules génèrent également de nouveaux exemples très intéressants comme dans [20] [50] ainsi que la fibre à l' ∞ en géométrie arithmétique [34].

La caractéristique commune de beaucoup de ces espaces est que, lorsqu'on essaie de les analyser du point de vue habituel de la théorie des ensembles, les outils usuels tombent en panne pour la simple raison suivante. Même si, en tant qu'ensemble, ils ont la cardinalité du continuum, il est impossible de distinguer leurs points par un ensemble fini (ou même dénombrable) de fonctions explicites. En d'autres termes, toute famille dénombrable *explicite* d'invariants échoue à séparer les points et la cardinalité *effective* n'est pas la même que celle du continuum.

Le principe général qui permet de construire l'algèbre des coordonnées sur de tels espaces quotients $X = Y / \sim$ est de remplacer l'algèbre commutative des fonctions sur Y qui sont constantes le long des classes de la relation d'équivalence par l'algèbre de convolution *non-commutative* de la relation

d'équivalence \sim de sorte que la dualité ci-dessus s'étende ainsi

(15) Espace géométrique quotient | Algèbre non-commutative

Les nouveaux espaces non triviaux “les plus simples” sont les tores non-commutatifs qui ont été pleinement analysés à un stade très précoce de la théorie en 1980 ([9]). Ici $X = \mathbb{T}_\theta^2$ est l'espace des feuilles du feuilletage $dx = \theta dy$ du tore en deux dimensions $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ (cf. Fig. 8). Si on essaie de décrire X par une algèbre commutative de coordonnées, on trouve que quand θ est irrationnel, toutes les “fonctions mesurables” sur X sont presque partout constantes et il n'y a pas de fonctions continues non constantes.

Si l'on applique le principe général ci-dessus, on trouve une algèbre très intéressante. Cet exemple a joué un rôle crucial comme point de départ de la théorie générale grâce au phénomène “d'intégralité” qui a été découverte en 1980 ([9]). En effet, même si “l'ombre” de \mathbb{T}_θ^2 obtenue à partir de la gamme des fonctions de Morse peut être un ensemble de Cantor totalement déconnecté, et que la dimension de l'analogie des fibrés vectoriels est en général irrationnelle, lorsqu'on forme la “courbure intégrale” de ces fibrés comme dans le théorème de Gauss-Bonnet, on trouve miraculeusement un entier.

Ce fait ainsi que la forme explicite des connexions et de la courbure sur les fibrés vectoriels sur \mathbb{T}_θ^2 ([9]) étaient suffisamment frappants pour suggérer que la géométrie différentielle ordinaire et la théorie de Chern-Weil pourraient être étendues avec succès au-delà de leur domaine commutatif “classique”.

Un débutant pourrait être tenté de se satisfaire de la compréhension d'exemples aussi simples que \mathbb{T}_θ^2 en ignorant la grande diversité du paysage général. Cependant la grande variété d'exemples oblige à se contenter du cas général et à étendre la plupart de nos concepts géométriques au cas général non-commutatif.

La géométrie usuelle n'est qu'un cas particulier de cette nouvelle théorie, au même titre que la géométrie euclidienne et non-euclidienne sont des cas particuliers de la géométrie riemannienne. Beaucoup de concepts géométriques familiers survivent dans la nouvelle théorie, mais ils acquièrent aussi une nouvelle signification inattendue.

En effet, même au niveau le plus grossier de compréhension d'un espace fourni par la théorie de la mesure, qui ne s'intéresse essentiellement qu'à la “quantité de points” dans un espace, on trouve des caractéristiques totalement nouvelles et inattendues dans le cas non-commutatif. Alors que les algébristes travaillant dans le domaine des algèbres d'opérateurs savent depuis bien longtemps que la théorie des algèbres de von Neumann représente une extension considérable de la théorie de la mesure, la principale surprise survenue au début des années 70 [5] est qu'une telle algèbre hérite de sa non-commutativité une évolution du temps donnée par Dieu :

$$(16) \quad \delta : \mathbb{R} \longrightarrow \text{Out } M$$

où $\text{Out } M = \text{Aut } M / \text{Int } M$ est le quotient du groupe des automorphismes de M par le sous-groupe normal des automorphismes intérieurs. Cela a conduit dans ma thèse [6] à la réduction du type III au type II et à ses automorphismes et finalement à la classification des facteurs injectifs.

Le développement des idées topologiques a été rendu possible par les C^* -algèbres que Gelfand a décou-

vertes au début de sa vie mathématique et a été motivé par la conjecture de Novikov sur l’invariance d’homotopie des signatures supérieures des variétés ordinaires ainsi que par le théorème de l’indice d’Atiyah-Singer. Cela a conduit à la reconnaissance que non seulement la K-théorie d’Atiyah-Hirzebruch, mais plus important encore, la K-homologie duale telle que développée par Atiyah, Brown-Douglas-Fillmore et Kasparov admettent des C^* -algèbres non-commutatives comme leur cadre naturel. Les cycles en K-homologie sont donnés par les représentations de Fredholm de la C^* -algèbre A des fonctions continues. Un exemple de base est le groupe des C^* -algèbres d’un groupe discret et se cantonner aux algèbres commutatives, c’est-à-dire aux groupes commutatifs, est une hypothèse évidemment indésirable.

Le développement des idées géométriques différentielles, dont l’homologie de de Rham, les connexions et la courbure des fibrés vectoriels... a eu lieu au cours des années 80 grâce à la cohomologie cyclique. Elle a conduit par exemple à la preuve de la conjecture de Novikov pour les groupes hyperboliques mais a trouvé de nombreuses autres applications. Fondamentalement, étendre les classes caractéristiques de Chern-Weil au cadre général permet de nombreux calculs concrets sur des espaces non-commutatifs.

La notion même de géométrie non-commutative vient de l’identification des deux concepts de base dans la formulation de la géométrie de Riemann, à savoir ceux de variété et d’élément de longueur infinitésimal. Il a été reconnu au début des années 80 que le formalisme de la mécanique quantique donne une place naturelle non seulement aux variables continues de dimension arbitraire mais aussi aux infinitésimaux (les opérateurs compacts dans l’espace de Hilbert) et à l’intégrale (la divergence logarithmique dans un opérateur trace) comme nous l’expliquerons plus loin dans la section 3.3. Il a également été reconnu depuis longtemps par les géomètres ([59], [53], [58]) que la principale qualité du type d’homotopie d’une variété (en plus d’être défini par une recette de cuisine) est de satisfaire la dualité de Poincaré non seulement en homologie ordinaire mais en K-homologie avec le module de Fredholm associé à l’opérateur de Dirac comme “classe fondamentale”.

Dans le cadre général de la géométrie non-commutative, la confluence des deux notions de métrique et de classe fondamentale en K-homologie pour une variété conduit très naturellement à l’égalité

$$(17) \quad ds = 1/D,$$

qui exprime l’élément de longueur infinitésimal ds comme l’inverse de l’opérateur de Dirac, donc sous des conditions aux limites convenables comme propagateur. L’importance de D est double. D’une part il définit l’élément de longueur par l’équation ci-dessus qui permet de calculer les distances par la formule (18) ci-dessous, d’autre part sa classe d’homotopie représente la classe fondamentale de K-homologie de l’espace considéré.

Il est intéressant d’expliquer en termes simples comment la géométrie non-commutative modifie la mesure des distances. Une description aussi simple est possible parce que l’évolution entre la manière riemannienne de mesurer les distances et la nouvelle manière (non-commutative) est exactement parallèle à l’amélioration de la norme de longueur¹¹ dans le système métrique. La définition originelle du mètre à la fin du XVIII^e siècle était basée sur une petite portion (une quarante millionième partie) de la taille du plus grand objet macroscopique disponible (ici la circonférence terrestre). D’ailleurs cette “unité de longueur” est devenue concrètement représentée en 1799 comme “mètre des archives” par une barre de pla-

¹¹ou de manière équivalente, pour la norme de temps utilisant la vitesse de la lumière comme facteur de conversion.

tine localisée près de Paris. Le prototype international était une copie plus stable du “mètre des archives” qui servait à définir le mètre. Le changement le plus radical dans la définition du mètre s’est produit en 1960 lorsqu’il a été redéfini comme un multiple de la longueur d’onde d’une certaine ligne orange dans la lumière émise par l’isotope 86 du krypton. Cette définition a ensuite été remplacée en 1983 par la définition actuelle qui utilise la vitesse de la lumière comme facteur de conversion et est exprimée en termes de fréquences inverses plutôt que de longueur d’onde, et est basée sur une transition hyperfine dans l’atome de césium. Les avantages de la nouvelle norme sont évidents. Aucune comparaison avec un “mètre des archives” localisé n’est nécessaire, les incertitudes sont estimées à 10^{-15} et pour la plupart des applications un faisceau de césium commercial est suffisamment précis. Nous pourrions également (si une communication était possible) communiquer notre choix d’unité de longueur aux extraterrestres, et uniformiser les unités de longueur dans la galaxie sans avoir à envoyer des copies matérielles du “mètre des archives” ! Le concept de “métrique” en géométrie non-commutative repose précisément sur une telle donnée spectrale. Une distance ne se mesure plus par (9), c’est-à-dire comme infimum de l’intégrale de l’élément linéaire le long des arcs γ mais comme supremum des différences $|f(x) - f(y)|$ de fonctions à valeurs scalaires soumises à la contrainte qu’elles ne varient pas trop rapidement sous le contrôle de la norme de l’opérateur du commutateur, $\|[D, f]\| \leq 1$, de sorte que

$$(18) \quad d(x, y) = \text{Sup} \{ |f(x) - f(y)| ; \|[D, f]\| \leq 1 \}$$

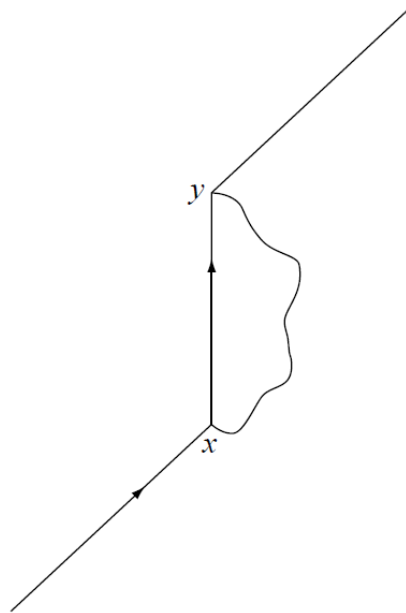


FIGURE 9. ds Fermion Propagator

Cela permet une extension considérable de la notion de variété riemannienne donnée en termes spectraux comme une représentation irréductible dans l’espace de Hilbert \mathcal{H} non seulement de l’algèbre \mathcal{A} des coordonnées sur l’espace géométrique mais aussi de l’élément de longueur $ds = D^{-1}$. Ainsi une géométrie non-commutative est décrite comme un “triplet spectral”

$$(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$$

Le paradigme obtenu de l’espace géométrique est très polyvalent et s’adapte aux situations suivantes :

- espaces des feuilles de feuilletages ;
- espaces de dimensions infinies (comme dans la supersymétrie) ;
- géométrie fractale ;
- variétés de drapeaux dans la théorie des groupes quantiques¹² ;
- zone de Brillouin en physique quantique ;
- espace-temps.

Cela permet également d’incorporer les “corrections quantiques” de la géométrie de l’espace-temps à partir de l’habillage de l’élément de longueur ds identifié au propagateur de fermions.

2.7. Motifs de Grothendieck.

Le paradigme de ce qu’est un espace en géométrie algébrique a considérablement évolué dans la seconde moitié du XX^e siècle sous l’impulsion de problèmes spécifiques tels que les conjectures de Weil finalement prouvées par Deligne en 1973.

Après les travaux fondamentaux de Serre qui a développé la théorie des faisceaux cohérents et une notion très souple de variété algébrique, basée sur la notion de faisceaux de Leray et celle d’“espace annelé” de Cartan, Grothendieck s’est attaché à étendre l’ensemble de la théorie au paradigme des *schémas* obtenus en regroupant la contrepartie géométrique d’anneaux commutatifs arbitraires.

Les “conjectures standard” de Grothendieck sont une vaste généralisation des conjectures de Weil à des correspondances arbitraires, alors que le cas de Weil se limite à une correspondance spécifique connue sous le nom de correspondance “de Frobenius”. Si elles sont vraies (avec les conjectures de Hodge et Tate), les conjectures standard permettraient la construction d’une catégorie abélienne de “motifs” qui unifie la cohomologie ℓ -adique étale pour différentes valeurs de ℓ avec les cohomologies de de Rham et Betti.

Jusqu’à présent, seule la “catégorie dérivée” $DM(S)$ de la catégorie des motifs a été construite avec succès par Levine et Voevodski. À terme, l’un des objets d’étude essentiels de la théorie sera l’étude des fonctions associées à la m -ième cohomologie H^m d’une variété algébrique définie sur un corps de nombres. Leur définition implique diverses théories de cohomologie qui ne sont “unifiées” que par la théorie putative des motifs. De plus, leurs propriétés, incluant l’holomorphie, sont encore conjecturales et constituent une motivation clé du programme de Langlands.

On pourrait penser à première vue que la théorie des motifs est d’une tout autre nature que les objets “analytiques” impliqués dans la géométrie non-commutative. Cette impression est vite dissipée si l’on connaît la correspondance de Langlands où les représentations automorphes advenant du côté analytique apparaissent comme des réalisations potentielles des “motifs”. Dans la dernière section de ces notes, nous expliquerons comment la théorie des motifs apparaît (à partir de la théorie galoisienne motivique) dans la théorie de la renormalisation dans notre travail commun avec M. Marcolli [33].

¹²12 cf. (47).

Il existe en fait une analogie intrigante entre les constructions motiviques et celles de la théorie KK et de la cohomologie cyclique en géométrie non-commutative.

En effet les étapes de base dans la construction de la catégorie $DM(S)$ de Voevodsky qui est la “catégorie dérivée” de ce qui est recherché pour la catégorie des motifs, sont parallèles aux étapes de base de la théorie bivariante de Kasparov KK. Les ingrédients de base sont les mêmes, notamment les correspondances qui, dans les deux cas, ont une propriété de finitude “d’un côté”. On passe alors dans les deux cas à des complexes qui dans le cas de KK s’obtiennent en prenant simplement des différences finies formelles de correspondances “infinies”. théorie des motifs. Aussi comme dans la théorie des motifs on obtient une catégorie additive qui peut être vue comme une “linéarisation” de la catégorie des algèbres. Enfin on notera dans le cas de KK, qu’une légère amélioration (concernant l’exactitude) et une grande simplification technique sont obtenus si l’on considère des “déformations” plutôt que des correspondances comme les “cycles” de base de la théorie, comme cela est réalisé dans la théorie E. Ensuite, lorsqu’au lieu de travailler sur on considère la catégorie $DM(k)_{\mathbb{Q}}$ par tensorisation par \mathbb{Q} , on peut pousser l’analogie plus loin et établir un contact avec la cohomologie cyclique, où l’on travaille également rationnellement, avec un rôle similaire des filtrations. Là aussi, la “linéarisation” obtenue de la catégorie des algèbres est assez explicite et simple en géométrie non-commutative. La catégorie obtenue est simplement la catégorie des Λ -modules, basée sur la catégorie cyclique Λ qui sera décrite ci-dessous dans la section 3.5.

2.8. Théorie des topos.

Comme mentionné ci-dessus, la notion de *schéma* est obtenue en rapiéçant ensemble les contreparties géométriques d’anneaux commutatifs arbitraires. Ainsi on peut se demander d’abord pourquoi un tel rapiéçage n’est pas nécessaire dans une géométrie non-commutative dont les données de base sont simplement celles d’une algèbre non-commutative. L’essentiel ici est que la non-commutativité, présente déjà dans les matrices, permet d’effectuer ce rapiéçage sans sortir de la catégorie des algèbres.

Ainsi, exactement comme ci-dessus en définissant l’algèbre de coordonnées sur un quotient comme l’algèbre de convolution de la relation d’équivalence, on implémente le patching/rapiéçage de manière algébrique à partir de l’algèbre de convolution d’un groupoïde qui est spécifié par la recette géométrique. Dans le cas d’une variété projective $X \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ par exemple, l’astuce de Karoubi-Jouanolou consiste à écrire X comme le quotient d’une sous-variété affine de la variété affine des idempotents $e^2 = e, e \in M_{n+1}(\mathbb{C})$.

La notion conceptuelle clé qui permet de comparer les deux manières de procéder dans des cas “affines” simples est la notion d’équivalence de Morita due à M. Rieffel [54] dans le cadre des C^* -algèbres.

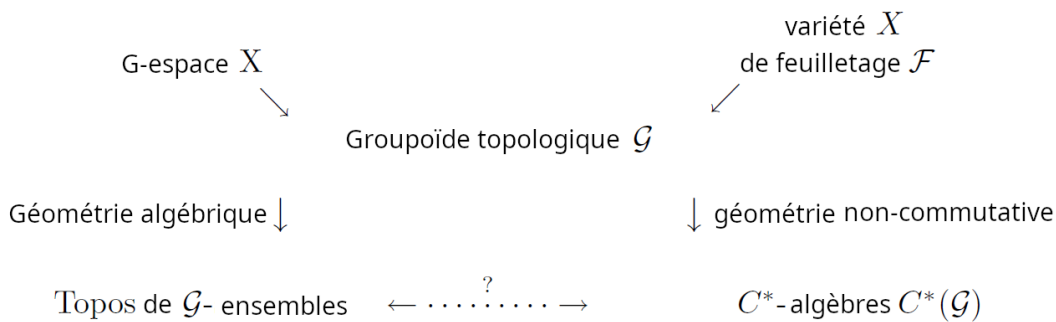
Ainsi, il n’est pas nécessaire en géométrie non-commutative de donner une “donnée de recollement” pour un tas d’algèbres commutatives, on s’en tient plutôt aux objets algébriques les plus “purs” en autorisant simplement des algèbres non-commutatives du côté algébrique de la dualité de base,

$$(19) \quad \underline{\text{Espace géométrique}} \quad | \quad \underline{\text{Algèbre non-commutative}}$$

Il serait cependant faux de penser que la géométrie algébrique n’a pas de place pour le nouveau type d’espaces associés aux groupoïdes ou simplement aux groupes. En effet, dans le prolongement de sa con-

struction de la cohomologie étale, Grothendieck a développé la théorie générale des sites¹³ qui généralise la notion d'espace topologique, en remplaçant l'ensemble partiellement ordonné des ensembles ouverts par une catégorie dans laquelle la notion de "recouvrement ouvert" est assumée comme une donnée supplémentaire. Il est ensuite allé beaucoup plus loin en abstrayant sous le nom de "topos" les propriétés de la catégorie des faisceaux d'ensembles sur un site, obtenant ainsi une vaste généralisation des espaces topologiques. Cette théorie a été utilisée avec succès en logique où elle permet une modélisation simple du résultat d'indépendance de Cohen.

Il existe quelques similitudes entre la géométrie non-commutative et la théorie des topoi comme le suggère le schéma proposé par Cartier dans [3], dans le cas du produit croisé d'un espace par une action de groupe ou d'un feuilletage qui peut être "traité" dans les deux sens,



Il est crucial de comprendre que l'algèbre associée à un topos ne permet en général pas de retrouver le topos lui-même dans le cas général non-commutatif.

Pour voir l'exemple le plus simple où deux topos différents donnent la même algèbre, il suffit de comparer le topos $\mathcal{T}(X, \cdot)$ des faisceaux sur un ensemble fini X avec le topos $\mathcal{T}(\cdot, G)$ des G -ensembles où G est un groupe fini. Si G est abélien de la même cardinalité que X , l'algèbre $C^*(G)$ associée à G est isomorphe grâce à la transformée de Fourier à $C(X)$ alors que les deux topos correspondants ne sont pas isomorphes, puisque l'ensemble des "points" de $\mathcal{T}(X, \cdot)$ s'identifie à X alors que le topos $\mathcal{T}(\cdot, G)$ a seulement un point¹⁴. Il devient alors clair que les invariants qui sont définis directement en termes d'algèbres possèdent de remarquables propriétés de "stabilité" qui ne seraient pas apparentes du côté topos. Pour prendre un exemple, la signature d'une variété non simplement connexe M , vue comme un élément du K -groupe C^* -algèbre $C^*(\pi_1(M))$ du groupe fondamental $\pi_1(M)$ de M est un invariant d'homotopie. Mais sa contrepartie du côté "topos" qui est la signature de Novikov la plus haute n'est pas connue comme étant invariant. D'une manière similaire, les outils de l'analyse tels que la "positivité" (cf. section 3.1) peuvent seulement être amenés à supporter la colonne du côté droit du diagramme ci-dessus comme cela devient apparent par exemple avec l'évanouissement du \hat{A} -genre de variétés admettant des feuilletages avec feuilles de courbure scalaire positive (cf. [13]).

Dans le contexte de la géométrie algébrique, la dualité de base (19) ne devrait bien sûr pas être restreinte aux algèbres "involutives" sur \mathbb{C} , et on devrait autoriser les algèbres avec un nil-radical non trivial comme on le fait dans le cadre commutatif. En fait, la procédure de rapiéçage fait naturellement intervenir des

¹³également appelées topologies de Grothendieck.

¹⁴cf. [49] exercice VII 2.

matrices triangulaires dans ce contexte. Il est cependant remarquable que, à l'exception de la "positivité", la plupart des outils qui ont été développés dans le contexte des algèbres d'opérateurs s'appliquent en fait dans ce cadre plus large des algèbres générales.

3. OUTILS FONDAMENTAUX

Je me souviens d'une discussion à la cafétéria de l'IHES il y a quelques années avec un groupe de mathématiciens. Nous discutons des outils que nous utilisons actuellement pour faire des mathématiques et pour simplifier les choses, chacun de nous n'était autorisé à n'en mentionner qu'un, avec bien sûr l'exigence qu'il soit suffisamment simple.

Inutile de vouloir en donner une liste exhaustive, je me contenterai plutôt d'illustrer quelques exemples de ces outils en prenant comme prétexte la géométrie non-commutative.

3.1. Positivité.

C'est l'ingrédient clé de la théorie de la mesure. Les probabilités sont des nombres réels dans l'intervalle $[0, 1]$ et il n'y a aucun moyen de s'amuser avec cela.

La théorie quantique nous dit que la raison de la positivité des probabilités est la présence d'*amplitudes de probabilités* complexes et que dans le monde quantique, ces amplitudes se comportent de manière additive alors que dans le monde classique, ce sont les probabilités qui se comportent de manière additive.

L'inégalité suivante est en fait la pierre angulaire de la théorie des algèbres d'opérateurs

$$(20) \quad Z^*Z \geq 0, \quad \forall Z \in A$$

Les C^* -algèbres de Gelfand sont ces algèbres abstraites sur \mathbb{C} dotées d'une involution anti-linéaire $Z \rightarrow Z^*$ pour lesquelles l'inégalité ci-dessus "fait sens", c'est-à-dire définit un cône d'éléments positifs $A^+ \subset A$ qui possède la propriété attendue. Grâce à l'analyse fonctionnelle, tout l'outillage de la théorie de la convexité peut alors s'appliquer : on utilise le théorème de Hahn-Banach pour obtenir des formes linéaires positives, on construit des espaces de Hilbert à partir de formes linéaires positives, et toutes les puissantes propriétés des opérateurs de l'espace de Hilbert peuvent alors être utilisées dans ce contexte apparemment abstrait.

De même, la positivité joue un rôle clé en physique sous le nom d'unitarité, qui exclut toute théorie physique dans laquelle les probabilités calculées ne remplissent pas la règle d'or

$$(21) \quad P(X) \in [0, 1]$$

3.2. Cohomologie.

Pour comprendre ce qu'est la cohomologie, il faut partir d'une question simple et ressentir le besoin d'un outil abstrait. Comme exemple simple, nous partirons du théorème de la courbe de Jordan, qui stipule

que le complémentaire dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ d'une courbe fermée simple continue admet exactement deux composantes connexes. On peut essayer de le prouver avec des outils rudimentaires mais il faut être conscient de l'existence d'une courbe de Jordan C dont la mesure de Lebesgue bidimensionnelle est positive. Ceci montre que l'intersection générique $C \cap L$ de C avec une droite L aura une longueur unidimensionnelle positive et évite de donner un argument trop naïf impliquant par exemple la parité du nombre d'éléments de $C \cap L$.

Les théories de cohomologie telles que la K-théorie par exemple donnent une preuve facile. Pour un espace compact X , la K-théorie d'Atiyah-Hirzebruch $K(X)$ est obtenue comme le groupe de Grothendieck des classes d'isomorphismes stables des fibrés vectoriels. Le résultat principal est la périodicité de Bott qui donne une suite exacte de six termes correspondant à tout sous-ensemble fermé $Y \subset X$. Le fait est que si $K^j(X)$ et $K^j(Y)$ donnent quatre de ces six termes, les deux autres ne dépendent que de l'ensemble ouvert $X \setminus Y$ (ou si l'on veut de sa compactification en un point). Cette *excision* permet de gérer facilement des situations délicates comme celle fournie par la courbe de Jordan ci-dessus C .

La K-théorie d'Atiyah-Hirzebruch $K(X)$ est en fait le K -groupe des C^* -algèbres associées à $C(X)$ des fonctions continues sur X et la théorie garde ses caractéristiques essentielles telles que la périodicité de Bott et la suite exacte à six termes sur la catégorie de toutes les C^* -algèbres.

Il est cependant indispensable de développer dans ce cadre général l'analogue de la théorie de Chern-Weil sur la courbure et les classes caractéristiques des fibrés vectoriels. L'essentiel est de pouvoir faire des calculs de nature géométrique différentielle dans le cadre ci-dessus où l'analyse occupe la place centrale. Il vaut la peine de citer ce que dit Grothendieck [41] en comparant le paysage de l'analyse dans lequel il a d'abord travaillé avec celui de la géométrie algébrique dans laquelle il a passé le reste de sa vie mathématique :

“Je me rappelle encore de cette impression saisissante (toute subjective certes), comme si je quittais des steppes arides et revêches, pour me retrouver soudain dans une sorte de “pays promis” aux richesses luxuriantes, se multipliant à l'infini partout où il plaît à la main de se poser, pour cueillir ou pour fouiller...”

Il est bien vrai que le cadre d'analyse est beaucoup moins généreux à première vue mais mon sentiment à la fin des années 70 était que la principale raison à cela était l'absence d'outils flexibles appropriés similaires à ceux fournis par le calcul qui permettraient de développer progressivement une compréhension en effectuant des calculs relativement faciles et significatifs.

Ce qui se produisait généralement, c'était que l'on était confronté à des problèmes qui seraient tout simplement trop difficiles à gérer, de sorte que le choix était soit d'abandonner soit de passer un temps considérable à essayer de résoudre des questions techniques qui n'auraient de sens que pour de vrais spécialistes.

La situation serait totalement différente si, comme c'était le cas en géométrie différentielle, on disposait d'outils souples comme les courants et les formes de de Rham, permettant de se familiariser avec des exemples simples et de voir son chemin.

C'est la principale raison “philosophique” pour laquelle j'ai entrepris en 1981 de développer la cohomologie cyclique qui joue exactement ce rôle en géométrie non-commutative.

3.3. Calcul.

Le calcul infinitésimal est construit sur la tension exprimée dans la formule de base

$$(22) \quad \int_a^b df = f(b) - f(a)$$

entre l'intégrale et la variation infinitésimale df d'une fonction f . On s'accommode à terme de cette tension en développant l'intégrale de Lebesgue et la notion de forme différentielle. Au niveau intuitif, l'image naïve de la "variation infinitésimale" df comme incrément de f pour des valeurs très proches de la variable est assez bonne pour la plupart des objectifs, de telle sorte qu'il n'est pas besoin de créer une théorie des infinitésimaux.

Le décor est différent dans la géométrie non-commutative, où la mécanique quantique offre d'emblée une étape naturelle dans laquelle la notion de *variable* acquiert un sens nouveau et suggestif.

Dans la formulation classique, une variable réelle X est considérée comme une application d'un ensemble vers la droite réelle. Il y a bien sûr une grande part d'arbitraire dans la mesure où cela n'affecte pas vraiment la variable X , c'est-à-dire, par exemple, cela ne modifie pas son domaine $f(X)$ (le sous-ensemble de \mathbb{R} des valeurs atteintes). En mécanique quantique, le domaine est fixé une fois pour toutes, c'est un espace de Hilbert séparable \mathcal{H} . Notez que tous les espaces de Hilbert de dimension infinie sont isomorphes, de sorte que cette étape est assez *canonique*. Ce que les gens ont découvert en développant la mécanique quantique, c'est qu'au lieu de traiter des variables réelles qui ne sont que des applications f d'un ensemble X vers la droite réelle, on doit remplacer cette notion par celle d'opérateur *auto-adjoint* dans l'ensemble de Hilbert \mathcal{H} .

Ces "nouvelles" variables partagent de nombreuses caractéristiques avec les variables classiques, par exemple le rôle de l'intervalle $f(X)$ est désormais joué par le *spectre* de l'opérateur auto-adjoint. Ce spectre est également un sous-ensemble de \mathbb{R} et certains de ses points peuvent être atteints plus souvent que d'autres. Le nombre de fois qu'un élément du spectre est atteint est connu sous le nom de multiplicité spectrale.

Une autre compatibilité assez étonnante de la nouvelle notion avec l'ancienne est que l'on peut composer n'importe quelle fonction (mesurable) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec une variable réelle au sens quantique. Cela revient au calcul fonctionnel de Borel pour les opérateurs auto-adjoints. Étant donné un tel T , non seulement $p(T)$ a un sens de façon évidente quand p est un polynôme, mais en fait cette définition s'étend par continuité à toutes les fonctions boréliennes !!

Une fois que l'on s'est familiarisé avec la nouvelle notion de variable en mécanique quantique, on se rend facilement compte qu'il s'agit d'un foyer parfait pour les infinitésimaux, à savoir pour les variables qui sont plus petites que ϵ pour tout ϵ , sans être nulles. Bien sûr, requérir que la norme d'un opérateur soit plus petite que ϵ est une condition trop forte, mais on peut être plus subtil et demander que, pour tout ϵ positif, on puisse conditionner l'opérateur par un nombre fini de conditions linéaires, de sorte que sa norme devienne inférieure à ϵ . Ceci est une caractérisation connue des opérateurs compacts dans l'espace de Hilbert, et ce sont des candidats évidents pour les infinitésimaux.

Les règles de base des infinitésimaux sont faciles à vérifier, par exemple la somme de deux opérateurs compacts est compacte, le produit compact en temps borné est compact et ils forment un idéal bilatère dans l'algèbre des opérateurs bornés en \mathcal{H} .

La taille d'un infinitésimal $\epsilon \in \mathcal{K}$ est gouvernée par le taux de décroissance de la séquence décroissante de ses valeurs caractéristiques $\mu_n = \mu_n(\epsilon)$ lorsque $n \rightarrow \infty$. (Par définition $\mu_n(\epsilon)$ est la n^{me} valeur propre de la valeur absolue $|\epsilon| = \sqrt{\epsilon^* \epsilon}$). En particulier, pour tout réel positif α , la condition suivante définit les infinitésimaux ϵ d'ordre α :

$$(23) \quad \mu_n(\epsilon) = o(n^{-\alpha}) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Les infinitésimaux d'ordre α forment aussi un idéal bilatère et, de plus,

$$(24) \quad \epsilon_j \text{ d'ordre } \alpha_j \implies \epsilon_1 \epsilon_2 \text{ d'ordre } \alpha_1 + \alpha_2.$$

Ceci n'est qu'une traduction des propriétés bien connues des opérateurs compacts dans l'espace de Hilbert mais l'ingrédient vraiment nouveau dans le calcul des infinitésimaux en géométrie non-commutative est l'intégrale.

$$(25) \quad \int \epsilon \in \mathbb{C}.$$

où ϵ est un infinitésimal d'ordre un. Sa construction [15] repose sur l'analyse de la divergence logarithmique de la trace ordinaire pour un infinitésimal d'ordre un, principalement due à Dixmier ([38]). Cette trace a les propriétés usuelles d'additivité et de positivité de l'intégrale ordinaire, mais elle permet de retrouver la puissance du calcul infinitésimal usuel, en négligeant automatiquement l'idéal des infinitésimaux d'ordre > 1

$$(26) \quad \int \epsilon = 0, \quad \forall \epsilon, \quad \mu_n(\epsilon) = o(n^{-1}).$$

En filtrant ces opérateurs, on passe du stade originel du calcul quantifié décrit ci-dessus à un stade classique où la notion de localité trouve sa juste place.

En utilisant (26) on retrouve la tension mentionnée ci-dessus du calcul différentiel ordinaire, qui permet de négliger les infinitésimaux d'ordre supérieur (comme $(df)^2$) dans une expression intégrale.

3.4. Formules de trace et d'indice.

La formule de l'indice d'Atiyah-Singer est une motivation essentielle et un ingrédient de la géométrie non-commutative.

Premièrement, la flexibilité que l'on gagne dans le cas non-commutatif en considérant des groupoïdes et pas seulement des espaces permet une formulation géométrique très simple du théorème d'indice d'Atiyah-Singer, dans lequel "l'analyse" est subsumée par une image géométrique. L'objet géométrique obtenu, appelé "groupoïde tangent" $TG(M)$ d'une variété M , est obtenu en recollant le fibré tangent $T(M)$ (vu comme le groupoïde qui est l'union des groupes additifs donnés par les espaces tangents $T_x(M)$) avec l'espace $M \times M \times]0, 1]$, vu comme l'union des groupoïdes "triviaux" $M \times M$ où $(x, y) \circ (y, z) = (x, z)$. À

l'inclusion $T(M) \subset TG(M)$ correspond une suite exacte des C^* -algèbres correspondantes aux groupoïdes et on trouve sans effort que l'application de connexion pour la séquence exacte à six termes de la K-théorie est exactement l'indice analytique dans la formule d'indice d'Atiyah-Singer.

La preuve de la formulation de la K-théorie de la formule de l'indice d'Atiyah-Singer découle alors de l'analogie de l'isomorphisme de Thom dans le cas non-commutatif (cf. [15]).

La puissance de la formule d'indice d'Atiyah-Singer est cependant grandement accrue lorsqu'elle est formulée non pas en K-théorie mais lorsque le caractère de Chern est utilisé pour exprimer le côté topologique de la formule en termes "locaux" en utilisant des classes de caractéristiques. La première étape décisive dans cette direction avait été prise par Hirzebruch dans le cas particulier de l'opérateur de signature basé sur la théorie du cobordisme de Thom. En géométrie différentielle classique, la théorie de Chern-Weil était disponible avant la formule de l'indice et facilitait grandement la traduction de la K-théorie vers le langage cohomologique ordinaire.

En géométrie non-commutative, l'analogie de la théorie de Chern-Weil, à savoir la cohomologie cyclique, devait d'abord être développé comme un outil préliminaire nécessaire vers l'analogie de la formule d'indice "locale" d'Atiyah-Singer. La forme générale de la formule de l'indice local en géométrie non-commutative a été obtenue par H. Moscovici et moi-même en 1996, [25]. La notion conceptuelle de base qui a émergé de ces travaux est que la notion de localité est récupérée en l'absence de l'image habituelle "d'ensemble de points" en passant au dual de Fourier, c'est-à-dire en exprimant tout dans "l'espace de quantité de mouvement" où ce qui était local, c'est-à-dire ce qui se produisait "dans le petit" dans l'espace de coordonnées apparaît maintenant "dans le grand", c'est-à-dire comme asymptotique. De plus, les "expressions locales" sont exactement celles qui sont obtenues à partir de l'intégrale non-commutative donnée par la trace de Dixmier discutée ci-dessus, convenablement étendue (comme l'a d'abord étendue Wodzicki dans le cas des opérateurs pseudo-différentiels classiques [60]) pour permettre l'intégration d'infinésimaux d'ordre inférieur à un 1^{15} . La notion de courbure en géométrie non-commutative repose précisément sur ces formules.

De plus, alors que les espaces de feuilles des feuilletages étaient l'exemple motivant de ce théorème, une autre retombée a été le développement de la cohomologie cyclique pour les algèbres de Hopf, qui sera brièvement discutée ci-dessous.

Les formules de Lefschetz qui impliquent notamment des résultats en virgule fixe sont de même nature que la formule d'indice. Dans le cas le plus simple, ils sont obtenus en comparant les résultats du calcul de la trace d'un opérateur de deux manières différentes. L'une est "analytique" et consiste à additionner les valeurs propres de l'opérateur. L'autre est "géométrique" et s'obtient en additionnant les éléments diagonaux de la matrice de l'opérateur ou en général en intégrant le noyau de Schwartz de l'opérateur le long de la diagonale. La trace de Selberg et ses différents avatars jouent un rôle crucial dans le programme de Langlands, qui a été poursuivi avec succès dans les travaux de Drinfeld et Lafforgue dans le cas des corps de fonctions.

Un \mathbb{Q} -réseau n -dimensionnel ([31]) est constitué d'un réseau ordinaire Λ dans \mathbb{R}^n et d'un homomorphisme

$$\phi : \mathbb{Q}^n / \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Q}\Lambda / \Lambda.$$

¹⁵cf. formule (39) de la section 4.1.

Deux tels \mathbb{Q} -réseaux sont *commensurables* si et seulement si les réseaux correspondants sont commensurables et si les applications concordent modulo la somme des réseaux. L'espace non-commutatif \mathcal{L}_n des \mathbb{Q} -réseaux ([31]) est obtenu comme quotient par la relation de *commensurabilité*. Le groupe \mathbb{R}_+^* agit sur \mathcal{L}_n par mise à l'échelle. Il est assez remarquable que les zéros de la fonction zeta de Riemann apparaissent comme spectre d'absorption (cf. Fig. 7) de l'action de mise à l'échelle dans l'espace L^2 de l'espace des classes de commensurabilité des \mathbb{Q} -réseaux de dimension 1 comme dans [19]. En fait le groupe de Galois G de \mathbb{Q}^{ab} agit sur \mathcal{L}_1 de manière naturelle et l'espace L^2 ci-dessus se décompose en une somme directe étiquetée par des caractères de G avec des spectres des fonctions L apparaissant dans chacun des secteurs. De plus les formules explicites de Riemann-Weil apparaissent à partir d'une formule trace ([19], [52]) profondément liée à la validité de l'hypothèse de Riemann.

Dans le cas des fonctions L associées à une variété arithmétique, la recherche d'une forme unifiée des facteurs locaux a conduit Deninger [37] à espérer la construction d'un hypothétique "site arithmétique" dont les propriétés attendues rappellent beaucoup l'espace des \mathbb{Q} -réseaux. Puisque ce dernier espace fournit une explication simple, comme formule de trace de type Lefschetz, pour les facteurs locaux des fonctions L de Hecke, il est naturel de l'étendre pour couvrir le cas des fonctions L associées à une variété arithmétique. Le premier pas dans cette direction est fait dans [32] et repose sur la confluence entre la théorie des motifs qui sous-tend les cohomologies impliquées dans la construction des fonctions L et la géométrie non-commutative qui sous-tend l'analyse d'espaces tels que l'espace des \mathbb{Q} -réseaux.

3.5. Catégories abéliennes.

Le langage des catégories est omniprésent dans la géométrie algébrique moderne. L'algèbre homologique est un outil d'une grande puissance qui est disponible dès que l'on traite des catégories abéliennes. De plus, la catégorie des représentations de dimension finie d'un schéma en groupes affines peut être caractérisée abstraitement comme une catégorie "tannakienne" c'est-à-dire une catégorie tensorielle remplissant certaines propriétés naturelles. Il est frappant que ce résultat ait été obtenu par les physiciens Doplicher et Roberts dans leurs travaux sur les secteurs de super-sélection en théorie algébrique quantique des champs et indépendamment par Deligne dans le contexte de la géométrie algébrique.

Exactement comme ce qui se passe pour les schémas, la catégorie des algèbres non-commutatives n'est même pas une catégorie additive puisque la somme de deux homomorphismes d'algèbres n'est en général pas un homomorphisme.

Afin de pouvoir utiliser l'arsenal de l'algèbre homologique, on plonge la catégorie ci-dessus dans une catégorie abélienne, la catégorie des Λ -modules, en utilisant la catégorie cyclique Λ [12].

Le foncteur résultant

$$A \rightarrow A^{\natural}$$

devrait être comparé à l'encastrement d'une variété dans un espace linéaire. Cela permet de traiter les algèbres comme des objets dans une catégorie abélienne pour laquelle de nombreux outils tels que les bifoncteurs

$$\text{Ext}^n(X, Y)$$

sont facilement disponibles. L'ingrédient clé est la *catégorie cyclique*. C'est une petite catégorie qui a le même espace classifiant que le groupe compact $U(1)$.

Elle peut être définie par ses générateurs et relations. Elle a les mêmes objets que la petite catégorie Δ des ensembles finis totalement ordonnés et des fonctions croissantes qui jouent un rôle clé en topologie simpliciale. Rappelons que Δ a un objet $[n]$ pour tout nombre entier n , et est engendré par les faces $\delta_i, [n-1] \rightarrow [n]$ (l'injection qui manque i), et des dégénérescences $\sigma_j, [n+1] \rightarrow [n]$ (la surjection qui identifie j avec $j+1$), avec des relations élémentaires. Pour obtenir la catégorie cyclique Λ , on ajoute pour chaque n un nouveau morphisme $\tau_n, [n] \rightarrow [n]$ tel que,

$$\begin{aligned}\tau_n \delta_i &= \delta_{i-1} \tau_{n-1} \quad 1 \leq i \leq n, \quad \tau_n \delta_0 = \delta_n \\ \tau_n \sigma_i &= \sigma_{i-1} \tau_{n+1} \quad 1 \leq i \leq n, \quad \tau_n \sigma_0 = \sigma_n \tau_{n+1}^2 \\ \tau_n^{n+1} &= 1_n.\end{aligned}$$

La définition originale de Λ (cf. [15]) utilisait des classes d'homotopie d'applications non décroissantes de S^1 vers S^1 de degré 1, envoyant \mathbb{Z}/n sur \mathbb{Z}/m et est trivialement équivalente à ce qui précède.

Étant donnée une algèbre A , on obtient un module A^\natural sur la petite catégorie Λ en affectant à chaque entier $n \geq 0$ l'espace vectoriel $C^n = A^{\otimes n+1}$, tandis que les opérations de base sont données par

$$\begin{aligned}\delta_i(x^0 \otimes \dots \otimes x^n) &= x^0 \otimes \dots \otimes x^i x^{i+1} \otimes \dots \otimes x^n, \quad 0 \leq i \leq n-1 \\ \delta_n(x^0 \otimes \dots \otimes x^n) &= x^n x^0 \otimes x^1 \otimes \dots \otimes x^{n-1} \\ \sigma_j(x^0 \otimes \dots \otimes x^n) &= x^0 \otimes \dots \otimes x^j \otimes 1 \otimes x^{j+1} \otimes \dots \otimes x^n, \quad 0 \leq j \leq n \\ \tau_n(x^0 \otimes \dots \otimes x^n) &= x^n \otimes x^0 \otimes \dots \otimes x^{n-1}.\end{aligned}$$

Ces opérations satisfont la forme contravariante des relations ci-dessus. Ceci montre que toute algèbre A donne canoniquement lieu à un Λ -module¹⁶ A^\natural et donne un foncteur covariant naturel de la catégorie des algèbres vers la catégorie abélienne des Λ -modules. Cela donne [15] une interprétation des groupes de cohomologie cyclique $HC^n(A)$ comme foncteurs Ext^n de sorte que

$$HC^n(A) = \text{Ext}^n(A^\natural, \mathbb{C}^\natural).$$

Toutes les propriétés générales de la cohomologie cyclique telles que la suite exacte longue la rapportant à la cohomologie de Hochschild sont partagées par les Ext des Λ -modules généraux et peuvent être attribuées à l'égalité de l'espace classifiant $B\Lambda$ de la petite catégorie Λ avec l'espace classifiant BS^1 du groupe de Lie compact uni-dimensionnel S^1 . On a [12],

$$(27) \quad B\Lambda = BS^1 = P_\infty(\mathbb{C})$$

¹⁶La petite catégorie Λ étant canoniquement isomorphe à son contraire il n'y a pas de réelle différence entre foncteurs covariants et contravariants.

3.6. Symétries.

Il est difficile de surestimer la puissance de l'idée de symétrie en mathématiques. Dans de nombreux cas, elle permet de contourner des calculs compliqués en devinant la réponse à partir de ses propriétés d'invariance. C'est précisément dans la capacité de contourner les calculs que réside la puissance des mathématiques modernes inaugurées par les travaux d'Abel et de Galois. Écoutons Galois :

“Sauter à pieds joints sur ces calculs, grouper les opérations, les classer suivant leurs difficultés et non leurs formes, telle est suivant moi, la mission des géomètres futurs.”

Abel et Galois ont analysé les symétries des fonctions des racines des équations polynomiales et Galois a trouvé qu'une fonction des racines est une expression “rationnelle” si et seulement si elle est invariante par un groupe spécifique G des permutations naturellement associées à l'équation et à la notion de ce qui est considéré comme étant “rationnel”. Une telle notion définit un corps K contenant le corps \mathbb{Q} des nombres rationnels toujours présents en caractéristique zéro. Il exhibe d'abord une fonction rationnelle¹⁷

$$V(a, b, \dots, z)$$

des n racines distinctes (a, b, \dots, z) d'une équation de degré donné n , qui affecte $n!$ différentes valeurs selon toutes les permutations des racines, i.e. qui casse la symétrie de façon “maximale”. Il montre alors qu'il existe des fonctions “rationnelles” $\alpha(V), \beta(V), \dots$ de V qui redonne les racines (a, b, \dots, z) . Son groupe G est obtenu en décomposant en facteurs irréductibles sur le corps K le polynôme (sur K) de degré $n!$ dont V est une racine. Utiliser les fonctions rationnelles ci-dessus

$$\alpha(V_j), \beta(V_j), \dots$$

appliquées aux autres racines V_j du facteur irréductible qui admet V comme racine donne le groupe désiré de permutations¹⁸ des n racines (a, b, \dots, z) .

Cette procédure a toutes les caractéristiques des mathématiques **fondamentales** :

- elle contourne les calculs compliqués.
- elle se concentre sur la propriété clé de la solution.
- elle a un pouvoir déconcertant : elle permet la création d'un nouveau concept.

En géométrie non-commutative, les symétries sont codées par des algèbres de Hopf qui ne doivent pas nécessairement être commutatives ou co-commutatives. Outre les groupes quantiques qui jouent en géométrie non-commutative un rôle analogue à celui des groupes de Lie en géométrie différentielle classique, certaines algèbres naturelles de Hopf de dimension infinie ni commutatives ni co-commutatives sont apparues naturellement dans la géométrie transverse des feuilletages. On a d'abord découvert au début des années quatre-vingt que la classe de Godbillon-Vey ou des classes plus générales de Gelfand-Fuchs apparaissait en fait dans la cohomologie cyclique des algèbres de feuilletage et permettait de mettre en relation des hypothèses de géométrie différentielle pure avec les invariants les plus fins de l'algèbre de von-Neumann

¹⁷que l'on peut prendre sous forme linéaire à coefficients dans \mathbb{Q} .

¹⁸La racine $V_1 = V$ donne la permutation d'identité.

d'un feuilletage tel que son flux de poids [13].

La construction d'un triplet spectral associé à la géométrie transverse d'un feuilletage arbitraire a pris beaucoup de temps et a été réalisée dans [25]. Le calcul compliqué de la formule d'indice local pour un tel triplet spectral a nécessité de développer d'abord l'analogie de la cohomologie de l'algèbre de Lie dans le contexte des algèbres de Hopf qui ne sont pas tenues d'être commutatives ou co-commutatives. Ceci a été fait dans [26] et la cohomologie cyclique correspondante des algèbres de Hopf joue en général le même rôle que la théorie classique des classes caractéristiques pour les groupes de Lie. Cela nous a permis d'exprimer la formule de l'indice local pour la géométrie transverse des feuilletages en termes de classes de Gelfand-Fuchs. De plus, elle transite par la catégorie ci-dessus des Λ -modules qui semble jouer un rôle plutôt "universel" dans les constructions cohomologiques. La théorie a été étendue récemment au cadre beaucoup plus large des modules anti de Yetter-Drinfeld [42].

4. LES ENTRÉES DE LA THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

La profondeur des concepts mathématiques qui viennent directement de la physique a été qualifiée en ces termes par Hadamard :

"Non pas cette nouveauté éphémère qui peut trop souvent influencer le mathématicien livré à lui-même, mais cette nouveauté infiniment féconde qui jaillit de la nature des choses.

Il est en effet assez difficile pour un mathématicien de ne pas être attiré par le mystère apparent qui sous-tend la renormalisation, une technique combinatoire imaginée par des physiciens purs et durs à partir de 1947, pour se débarrasser des "divergences" indésirables qui tourmentaient les calculs de la théorie quantique des champs lorsqu'ils ont essayé d'aller au-delà de l'approximation "au niveau de l'arbre", une approximation qui avait tant de succès entre les mains de Dirac avec son calcul des coefficients A et B d'Einstein pour l'interaction de la matière avec le rayonnement.

Comme on le sait, la technique de renormalisation, lorsqu'elle est combinée avec le modèle standard lagrangien de la physique, est si efficace qu'elle prédit les résultats (tels que le moment anormal de l'électron) avec une précision déconcertante¹⁹. Il y a donc clairement "quelque chose qui va bien" et il est crucial d'essayer de comprendre quoi.

Comme nous l'expliquerons ci-dessous, la géométrie non-commutative a son mot à dire à la fois sur le modèle standard de la physique des particules et sur la renormalisation. Dans ce dernier cas, cela vient de mes travaux communs avec D. Kreimer [22] et avec M. Marcolli [33].

4.1. Le modèle standard.

Une leçon claire de la relativité générale est que la "gravité" est codée par la géométrie de l'espace-temps, tandis que la courbure joue un rôle fondamental à travers la fonctionnelle d'action (13). La gravité n'est pas la seule "force fondamentale" et les trois autres (faible, électromagnétique et forte) se combinent en une action "matière" supplémentaire correspondant aux cinq types de termes du modèle standard lagrangien. Ainsi l'action complète est de la forme

¹⁹de l'épaisseur d'un cheveu sur la distance Paris-New York.

$$(28) \quad S = S_E + S_G + S_{GH} + S_H + S_{Gf} + S_{Hf}$$

où S_E est l'action de Hilbert-Einstein (13), S_G est l'auto-interaction Yang-Mills des bosons de jauge, S_H est l'auto-interaction quartique des bosons de Higgs, S_{GH} est le couplage minimal des bosons de jauge avec les bosons de Higgs, etc...

La géométrie de Minkowski de l'espace-temps a été déduite de la partie de Maxwell du lagrangien de la physique et notre but est d'incorporer dans le modèle de la géométrie de l'espace-temps les modifications qui correspondent aux termes supplémentaires des forces faibles et fortes. Nous n'aborderons pas le problème important de la relation entre les cadres euclidien et de Minkowski et travaillerons uniquement dans la signature euclidienne.

Notre point de départ est la fonctionnelle d'action (28) que nous considérons comme la meilleure approximation de la "physique jusqu'au TEV". Nous pouvons commencer à comprendre quelque chose en regardant le groupe de symétrie de cette fonctionnelle. Si nous avons affaire à la gravité pure, c'est-à-dire à la seule théorie d'Einstein, le groupe de symétrie de la fonctionnelle serait simplement le groupe des difféomorphismes de la variété usuelle de l'espace-temps, mais à cause de la contribution du modèle standard, les théories de jauge introduisent un autre grand groupe de symétrie, à savoir le groupe des applications²⁰ de la variété vers le petit groupe de jauge, ce qui amène à des énergies qui couvrent, à notre connaissance, un domaine jusqu'à quelques centaines de GeV, c'est le groupe $U_1 \times SU_2 \times SU_3$. Le groupe de symétrie G de la fonctionnelle complète S (28) n'est pas le produit du groupe de difféomorphismes par le groupe des transformations de jauge de seconde espèce, mais c'est leur produit semi-direct. Les transformations de jauge et les difféomorphismes se mélangent de la même manière que les translations et les transformations de Lorentz se rejoignent dans le groupe de Poincaré.

À ce stade, on peut se poser deux questions très simples :

- Existe-t-il un espace X tel que $\text{Diff}(X)$ coïncide avec le groupe de symétrie G ?
- Existe-t-il une fonction d'action simple qui reproduit la fonction d'action (28) lorsqu'elle est appliquée à X ?

En d'autres termes, nous demandons de géométriser complètement le modèle effectif de l'espace-temps en tant que gravité pure de l'espace. Bien sûr nous ne croyons pas que le modèle standard couplé à la gravité soit le "dernier mot" mais nous pensons qu'il est crucial de rester dans la géométrie pure même au niveau "effectif" pour avoir une meilleure idée de la structure de l'espace-temps basée sur des preuves expérimentales.

Maintenant, si nous cherchons X parmi les variétés ordinaires, nous n'avons aucune chance de trouver une solution puisque par un résultat de Mather et Thurston, le groupe de difféomorphismes d'une variété (connexe) est un groupe simple. Un groupe simple n'a pas de sous-groupe normal non trivial et ne peut pas être un produit semi-direct de manière non triviale.

Cette obstruction disparaît dans le monde non-commutatif, où tout variant du groupe d'automorphismes $\text{Aut}^+(\mathcal{A})$ contiendra automatiquement un sous-groupe normal non trivial $\text{Int}^+(\mathcal{A})$ d'automorphismes in-

²⁰appelées transformations de jauge de seconde espèce.

térieurs, à savoir ceux de la forme

$$\text{Ad}_u(x) = uxu^*$$

Il s'avère que, modulo une discussion soignée de la levée des éléments de $\text{Aut}^+(\mathcal{A})$, il y a une algèbre non-commutative très naturelle \mathcal{A} dont la symétrie est le groupe ci-dessus G [56] [57]. Le groupe des automorphismes intérieurs correspond au groupe des transformations de jauge et le quotient par les symétries internes correspond aux difféomorphismes. Il est réconfortant que le vocabulaire de la physique soit le même que celui des mathématiques. En physique on parle de symétries *internes* et en mathématiques d'automorphismes intérieurs.

L'espace correspondant est un produit $X = M \times F$ d'une variété ordinaire M par un espace fini non-commutatif F . L'algèbre \mathcal{A}_F décrivant l'espace fini F est la somme directe des algèbres \mathbb{C} , \mathbb{H} (les quaternions), et $M_3(\mathbb{C})$ des matrices complexes 3×3 .

Les fermions du modèle standard et les paramètres de Yukawa (masse des fermions et matrice de mélange de Kobayashi Maskawa) déterminent la géométrie spectrale de l'espace fini de la manière suivante. L'espace de Hilbert est de dimension finie et admet comme base l'ensemble des fermions élémentaires. Par exemple pour la première génération de quarks, cet ensemble est (avec des étiquettes "couleur" appropriées),

$$(29) \quad u_L, u_R, d_L, d_R, \bar{u}_L, \bar{u}_R, \bar{d}_L, \bar{d}_R.$$

L'algèbre \mathcal{A}_F admet une représentation naturelle dans \mathcal{H}_F (voir [17]) et la matrice de couplage de Yukawa Y détermine l'opérateur D .

La structure détaillée de Y (et en particulier le fait que la couleur n'est pas brisée) permet de vérifier les propriétés algébriques de base de la géométrie non-commutative. Parmi celles-ci, une propriété importante est la condition "d'ordre un" qui signifie que pour une structure réelle appropriée J donnée par une involution anti-linéaire sur l'espace de Hilbert, les relations de commutation suivantes sont vérifiées,

$$(30) \quad [a, b^\circ] = 0, [D, a], b^\circ = 0, \quad \forall a, b \in \mathcal{A}, \quad b^\circ = Jb^*J^{-1}.$$

Maintenant, de même que les difféomorphismes de X admettent des perturbations internes, les métriques (données par l'inverse de l'élément de longueur D) admettent des perturbations internes. Celles-ci proviennent immédiatement de la tentative de transfert d'une métrique donnée sur une algèbre \mathcal{A} vers une algèbre $\mathcal{B} = \text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ avec un \mathcal{A} -module projectif fini à droite équivalente à \mathcal{E} selon l'équivalence de Morita. En effet, alors que l'espace de Hilbert $\mathcal{E} \otimes \mathcal{H}$ est facile à définir en utilisant une structure hermitienne sur \mathcal{E} , l'extension de l'opérateur D à $\mathcal{E} \otimes \mathcal{H}$ nécessite le choix d'une "connexion" i.e. d'une application linéaire vérifiant la règle de Leibniz

$$(31) \quad \nabla : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes \Omega^1, \quad \nabla(\xi a) = \nabla(\xi)a + \xi[D, a],$$

où Ω^1 est le \mathcal{A} -bimodule des combinaisons linéaires d'opérateurs sur \mathcal{H} de la forme $a[D, b]$ pour $a, b \in \mathcal{A}$.

L'extension de D to $\mathcal{E} \otimes \mathcal{H}$ est alors simplement donnée par

$$(32) \quad \bar{D}(\xi \otimes \eta) = \nabla(\xi)\eta + \xi \otimes D\eta.$$

Les “perturbations internes” de la métrique proviennent alors de l’évidente auto-équivalence de Morita de \mathcal{A} avec elle-même donnée par le module à droite \mathcal{A} , et celles qui préservent la structure réelle J sont alors de la forme,

$$(33) \quad D \rightarrow D + A + JAJ^{-1}, \quad \forall A = A^* \in \Omega^1.$$

Quand on calcule les perturbations internes de la géométrie produit $M \times F$ où M est une variété de spin riemannienne 4-dimensionnelle, on trouve les bosons de jauge du modèle standard γ, W^\pm, Z , les huit gluons et les champs de Higgs φ avec des nombres quantiques précis.

Il s’avère que la deuxième des questions ci-dessus, à savoir trouver un principe d’action simple qui reproduit la fonctionnelle d’action (28) admet également une réponse remarquablement agréable. Pour le comprendre, il faut d’abord réfléchir un peu à la notion d’observable” en gravitation. L’invariance par difféomorphisme de la théorie prive l’idée de “point spécifique” de toute signification intrinsèque et seules des grandeurs telles que “diamètre” etc... qui peuvent être définies de façon invariante par rapport aux difféomorphismes sont “observables”. Il est facile de vérifier qu’il en est ainsi pour toutes les propriétés spectrales de l’opérateur de Dirac. Ainsi une forme assez forte d’invariance de difféomorphisme est obtenue en imposant que la fonctionnelle d’action soit “spectrale”, c’est-à-dire entièrement déduite du spectre de l’opérateur D définissant la métrique. Le spectre de D est analysé par la fonction de comptage,

$$(34) \quad N(\Lambda) = \# \text{ valeurs propres de } D \text{ dans } [-\Lambda, \Lambda].$$

Cette fonction en escalier $N(\Lambda)$ est la superposition de deux termes.

$$(35) \quad N(\Lambda) = \langle N(\Lambda) \rangle + N_{\text{osc}}(\Lambda).$$

où la “partie moyenne” est donnée comme une somme étiquetée par le “spectre de dimension” S de l’espace non-commutatif X considéré comme,

$$(36) \quad \langle N(\Lambda) \rangle = S_\Lambda(D) = \sum_{k \in S} \frac{\Lambda^k}{k} \int |ds|^k + \zeta_D(0),$$

où $\zeta_D(s) = \text{Trace}(|D|^{-s})$ et les différents termes $\int |ds|^k$ sont donnés comme résidus de $\zeta_D(s)$ aux éléments $k \in S$ du spectre de dimension. La partie oscillante $N_{\text{osc}}(\Lambda)$ est la même que pour une matrice aléatoire et n’est pas pertinente ici.

Le calcul détaillé de la fonctionnelle d’action spectrale $S_\Lambda(D)$ dans le cas des perturbations internes de l’espace ci-dessus $X = M \times F$ est assez complexe et nous renvoyons à ([4]) et ([46]) pour les détails précis. L’action de Hilbert-Einstein fonctionnelle pour la métrique riemannienne, l’action de Yang-Mills pour les potentiels vectoriels, l’auto-interaction et le couplage minimal pour le champ de Higgs apparaissent tous avec les signes corrects pour donner les quatre premiers termes “bosoniques”

$$(37) \quad S_{\text{bos}} = S_E + S_G + S_{GH} + S_H$$

tandis que les deux derniers termes “fermioniques” dans (28) sont simplement donnés dès le début comme

$$(38) \quad S_{\text{fer}} = S_{Gf} + S_{Hf} = \langle f, D f \rangle.$$

Par exemple, pour voir pourquoi l'action de Hilbert-Einstein apparaît, on peut vérifier le calcul suivant du volume bidimensionnel (i.e. l'"aire") d'une variété riemannienne compacte à quatre dimensions M_4 (cf. [45]),

$$(39) \quad \int d s^2 = -\frac{1}{24\pi^2} \int_{M_4} r \sqrt{g} d^4 x$$

qu'il convient de comparer à (13). Notons que ce résultat permet de retrouver la pleine connaissance de la courbure scalaire puisque l'on obtient en fait pour toute fonction sur la variété M_4 l'égalité,

$$(40) \quad \int f d s^2 = -\frac{1}{24\pi^2} \int_{M_4} r f \sqrt{g} d^4 x$$

Deux autres termes apparaissent en plus au-dessus de $S_{\text{bos}} = S_E + S_G + S_{GH} + S_H$ dans le calcul de $\langle N(\Lambda) \rangle$ pour les perturbations intérieures de l'espace ci-dessus $X = M \times F$, ce sont

- le terme "cosmologique" $\Lambda^4 \int d s^4$ où $\int d s^4$ est une constante universelle multipliée par le volume riemannien,
- les termes de gravité de Weyl faisant intervenir la courbure de Weyl et les termes topologiques.

La prochaine étape naturelle est d'essayer de donner un sens à une intégrale fonctionnelle "euclidienne" de la forme

$$(41) \quad \langle \sigma \rangle = \mathcal{N} \int \sigma(D, f) e^{-S_\Lambda(D) - \langle f, D f \rangle} D[D] D[f]$$

où \mathcal{N} est un facteur de normalisation, $\sigma(D, f)$ est une observable spectrale, c'est-à-dire une fonction unitairement covariante de l'opérateur auto-adjoint D et d'un vecteur f , $f \in \mathcal{H}$. La première difficulté est d'écrire la contrainte sur l'opérateur hermitien aléatoire D en affirmant qu'il s'agit de l'inverse de l'élément de longueur pour une géométrie appropriée. C'est là que l'algèbre \mathcal{A} qui fait partie du triplet spectral doit entrer en scène. Son rôle est de permettre d'écrire une équation de nature cohomologique définissant la classe fondamentale d'homologie de l'espace géométrique i.e. un 4-cocycle de Hochschild²¹ $c = \sum a_0 d a_1 \dots d a_4$. La contrainte de base de type "Heisenberg" est alors

$$(42) \quad a_0 [D, a_1] \dots [D, a_4] = \gamma_5$$

En fixant la forme volumique (comme la classe de Hochschild de c), cela fige le degré de liberté "de Weyl" qui est le seul à avoir un mauvais signe dans l'intégrale fonctionnelle euclidienne qui n'est plus effectuée qu'entre "métriques" avec une forme de volume fixée. Notons que les a_j sont des "générateurs" de l'algèbre \mathcal{A} dont le seul rôle est de fournir le 4-cocycle de Hochschild de base c de sorte que l'équation remplie par les a_j vus comme opérateurs dans \mathcal{H} est l'annulation de la frontière de Hochschild de c . On a commencé dans [27], [28], [29] la recherche de solutions des équations ci-dessus et des analogues en dimension inférieure.

²¹si on travaille en dimension 4.

4.2. Renormalisation.

Bien sûr, l'obstacle fondamental dans le traitement des intégrales fonctionnelles se produisant dans la théorie quantique des champs est que les expressions obtenues à partir de l'expansion perturbative des intégrales fonctionnelles les plus simples sont généralement divergentes et nécessitent une "renormalisation". Il n'y a rien de "non physique" à cela, puisque les divergences viennent de la nature même de la théorie quantique des champs, et la suppression des divergences vient naturellement du point de vue de la physique qui enseigne à distinguer les grandeurs mesurées expérimentalement comme les masses, les charges etc... des données dépouillées (non expérimentales) dans les équations mathématiques.

Les subtilités de la technique de renormalisation étaient cependant suffisamment combinatoires pour empêcher une compréhension mathématique conceptuelle aisée. Cet état de fait a radicalement changé ces dernières années grâce aux étapes suivantes réalisées dans ma collaboration avec D. Kreimer :

- La découverte d'une algèbre de Hopf sous-jacente à la méthode de renormalisation BPHZ [48] [21];
- L'analyse du groupe²² $\text{Difg}(\mathcal{T})$ des difféomorphismes d'une théorie quantique des champs donnée \mathcal{T} [21] ;
- La découverte de l'identité entre la décomposition de Birkhoff des lacets en groupes de Lie pro-unipotents et la combinatoire du schéma de soustraction minimale en régularisation dimensionnelle [22] ;
- La construction pour les théories sans masse d'une action de $\text{Difg}(\mathcal{T})$ par les difféomorphismes formels des constantes de couplage de la théorie [22].

À la suite des développements ci-dessus, on peut exprimer le processus de renormalisation dans les termes conceptuels suivants, en prenant pour théorie une théorie sans masse \mathcal{T} avec une seule constante de couplage sans dimension g . Soit $g_{\text{eff}}(z)$ la constante de couplage effective non renormalisée en dimension $D - z$, vue comme une séquence de puissances formelles en g et une fonction de la variable complexe z . Dénotons alors par

$$(43) \quad g_{\text{eff}}(z) = g_{\text{eff}_+}(z)(g_{\text{eff}_-}(z))^{-1}$$

la décomposition de Birkhoff de cette boucle dans le groupe des difféomorphismes formels, with g_+ regular at $z = 0$ and g_- regular outside $z = 0$ and normalized to be 1 at ∞ . Alors la boucle $g_{\text{eff}_-}(z)$ est la constante de couplage nue et $g_{\text{eff}_+(0)}$ est le couplage effectif renormalisé.

4.3. Symétries.

La décomposition de Birkhoff (c'est-à-dire une décomposition telle que (43)) joue un rôle clé dans le traitement du problème de Riemann-Hilbert, c'est-à-dire pour trouver une équation différentielle avec des singularités données et des monodromies données. Ainsi, le rôle de la décomposition de Birkhoff dans la

²²et de son algèbre de Lie.

compréhension conceptuelle ci-dessus de la combinatoire de la procédure de soustraction dans la renormalisation a suggéré une relation potentielle entre la renormalisation et la correspondance de Riemann-Hilbert. Cette dernière est un thème très large en mathématiques impliquant la classification de données “géométriques” telles que les équations différentielles et les connexions plates sur des fibrés vectoriels en termes de données “théoriques de représentation” impliquant des variations sur l’idée de monodromie. Ces variations interviennent davantage dans le cas singulier “irrégulier” comme dans les travaux de Martinet-Ramis [51].

La correspondance de Riemann-Hilbert sous-jacente à la renormalisation a été dévoilée dans mon travail conjoint avec M. Marcolli [33]. Le côté “géométrique” de la correspondance est donné par des connexions plates “équisingulières” sur des fibrés vectoriels sur un espace de base B qui est décrit à la fois en termes mathématiques et en termes physiques.

En termes “mathématiques”, B est l’espace total d’un fibré \mathbb{G}_m -principal ²³ sur un disque infinitésimal Δ in \mathbb{C} . La connexion est \mathbb{G}_m -invariante et singulière sur la “fibre spéciale” sur $0 \in \Delta$. La propriété clé “d’équisingularité” est que les pull backs de la connexion sous les sections du faisceau B qui prennent la même valeur en $0 \in \Delta$ ont tous les mêmes singularités en 0 .

En termes “physiques”, la base Δ est l’espace des dimensions complexifié autour de $D \in \mathbb{C}$, la dimension où l’on voudrait faire de la physique. Les fibres du fibré \mathbb{G}_m -principal correspondent à la normalisation de l’intégrale en dimension complexe telle qu’utilisée par les physiciens dans la régularisation dimensionnelle (Dim. Reg.). L’entrée de la physique que les contre-termes sont indépendants du choix supplémentaire d’une unité de masse se traduit par la notion d’équisingularité pour la connexion naturellement fournie par les calculs de la théorie quantique des champs.

Le côté “théorique des représentations” de notre correspondance de Riemann-Hilbert est d’abord défini de manière abstraite et sans ambiguïté comme le schéma de groupe affine qui classe les connexions plates équisingulières sur des fibrés vectoriels de dimension finie. Ce que nous montrons [33], c’est qu’en travaillant avec des séries formelles de Laurent sur \mathbb{Q} , les données des fibrés vectoriels plats équisinguliers définissent une catégorie tannakienne dont les propriétés rappellent une catégorie de motifs de Tate mixtes. Cette catégorie est équivalente à la catégorie des représentations de dimension finie d’un schéma en groupe affine unique U^* et notre résultat principal est la détermination explicite du “groupe de Galois motivique” U^* , qui est déterminé de manière unique et universel par rapport à l’ensemble des théories physiques. Le groupe de renormalisation peut être identifié canoniquement avec un sous-groupe à un paramètre de U^* .

En tant que schéma de groupe algébrique, U^* est un produit semi-direct par le groupe multiplicatif \mathbb{G}_m d’un schéma de groupe pro-unipotent dont l’algèbre de Lie est engendrée librement par un générateur à chaque degré entier positif. En particulier, U^* non canoniquement isomorphe à $G_{\mathcal{M}_T}(\mathcal{O})$ i.e. est le groupe de Galois motivique ([40], [36]) du schéma $S_4 = \text{Spec}(\mathcal{O})$ d’entiers 4-cyclotomiques.

Nous montrons qu’il existe un cadre singulier universel dans lequel, en utilisant la régularisation dimensionnelle et le schéma de soustraction minimale, toutes les divergences disparaissent. Lorsqu’ils sont calculés comme des intégrales itérées, les coefficients du repère singulier universel sont certains nombres rationnels qui sont les mêmes que les coefficients “mystérieux” dans la formule d’indice local [25] de la

²³où \mathbb{G}_m désigne ici le groupe multiplicatif \mathbb{C}^* .

géométrie non-commutative de la section 3.4. Cela suggère des relations plus profondes entre l'utilisation du groupe de renormalisation dans le cas de multiplicités plus élevées dans le spectre de dimension dans la preuve de la formule de l'indice local [25] et la théorie des anomalies dans les théories quantiques chirales des champs.

Ce travail réalise l'espoir formulé dans [23] de relier concrètement le groupe de renormalisation à un groupe de Galois et confirme une suggestion qu'a faite Cartier dans [3], qui est que dans la théorie de Connes-Kreimer de la renormalisation perturbative, on devrait trouver un "groupe de Galois cosmique" caché, structure étroitement liée au groupe de Grothendieck-Teichmüller.

L'ensemble de ces faits indique que les divergences de la théorie quantique des champs, loin d'être simplement des nuisances indésirables, sont un signe clair de la présence de symétries d'origine géométrique totalement inattendues. Cela montre, en particulier, qu'il faut essayer de comprendre comment le repère singulier universel "renormalise" la géométrie de l'espace-temps à l'aide du schéma de soustraction minimale Dim-Reg et des contre-termes universels. L'étape suivante consiste à combiner cette compréhension avec les discussions ci-dessus du modèle standard et l'appliquer à l'action spectrale considérée comme une théorie quantique des champs très spécifique dictée par des preuves expérimentales.

Références

- [1] M.F. ATIYAH, Global theory of elliptic operators, *Proc. Internat. Conf. on Functional Analysis and Related Topics* (Tokyo, 1969), University of Tokyo press, Tokyo (1970), 21-30.
- [2] L.G. BROWN, R.G. DOUGLAS, P.A. FILLMORE, Extensions of C^* -algebras and K-homology, *Ann. of Math.* 2, **105** (1977), 265-324.
- [3] P. CARTIER, *A mad day's work : from Grothendieck to Connes and Kontsevich. The evolution of concepts of space and symmetry*, in "Les relations entre les mathématiques et la physique théorique", 23-42, Inst. Hautes Études Sci., Bures-sur-Yvette, 1998. (English translation in *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 38 (2001), no. 4, 389-408).
- [4] A. CHAMSEDDINE, A. CONNES, Universal formulas for non-commutative geometry actions, *Phys. Rev. Letters* **77** 24 (1996), 4868-4871.
- [5] A. CONNES, Groupe modulaire d'une algèbre de von Neumann. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 274 (1972), 1923-1926.
- [6] A. CONNES, Une classification des facteurs de type III, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, **6**, n. 4 (1973), 133-252.
- [7] A. CONNES, Classification of injective factors, *Ann. of Math.*, **104**, n. 2 (1976), 73-115.
- [8] A. CONNES, The von Neumann algebra of a foliation. Mathematical problems in theoretical physics (Proc. Internat. Conf., Univ. Rome, Rome, 1977), pp. 145-151, *Lecture Notes in Phys.*, 80, Springer, Berlin-New York, 1978.
- [9] A. CONNES, C^* -algèbres et géométrie différentielle. *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A-B* **290** (1980).
- [10] A. CONNES, *Spectral sequence and homology of currents for operator algebras*, Math. Forschungsinst. Oberwolfach Tagungsber., 41/81 Funktionalanalysis und C^* -Algebren, 27-9/3-10 (1981).
- [11] A. CONNES, Non-commutative differential geometry. Part I : The Chern character in K-homology, *Preprint IHES (M/82/53)*, 1982 ; Part II : de Rham homology and non-commutative algebra, *Preprint IHES (M/83/19)*, 1983. Non-commutative differential geometry, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* **62** (1985), 257-360.

- [12] A. CONNES, Cohomologie cyclique et foncteur Ext^n . *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser.I Math* **296** (1983).
- [13] A. CONNES, Cyclic cohomology and the transverse fundamental class of a foliation, *Geometric methods in operator algebras*, (Kyoto, 1983), pp. 52-144, *Pitman Res. Notes in Math.* **123** Longman, Harlow (1986).
- [14] A. CONNES, M. KAROUBI, Caractère multiplicatif d'un module de Fredholm. *K-Theory* **2** (1988), no. 3, 431-463.
- [15] A. CONNES *Non-commutative geometry*, Academic Press (1994).
- [16] A. CONNES, Gravity coupled with matter and foundation of non-commutative geometry, *Commun. Math. Phys.* **182** (1996), 155-176.
- [17] A. CONNES, Non-commutative geometry and reality, *Journal of Math. Physics* **36** n.11 (1995).
- [18] A. CONNES, M. RIEFFEL, Yang-Mills for non-commutative two tori, *Operator algebras and mathematical physics*, (Iowa City, Iowa, 1985), pp. 237-266 ; *Contemp. Math. Oper. Algebra Math. Phys.* **62**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
- [19] A. CONNES, Trace formula in Non-commutative Geometry and the zeros of the Riemann zeta function, *Selecta Mathematica* New Ser. 5 (1999) 29-106.
- [20] A. CONNES, M. DOUGLAS, A. SCHWARZ, Non-commutative geometry and Matrix theory : compactification on tori, *J. High Energy Physics*, **2** (1998).
- [21] A. CONNES, D. KREIMER, Hopf algebras, Renormalization and Non-commutative Geometry, *Commun. Math. Phys.* **199**, 203 (1998) ; hep-th/9808042.
- [22] A. CONNES, D. KREIMER, Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem I : the Hopf algebra structure of graphs and the main theorem. hep-th/9912092. Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem II : The β function, diffeomorphisms and the renormalization group. hep-th/0003188.
- [23] A. CONNES, *Symétries Galoisiennes et Renormalisation*, in "Poincaré Seminar 2002 : Vacuum Energy-Renormalization", Progress in Mathematical Physics, V. 30, Birkhauser 2003.
- [24] A. CONNES, H. MOSCOVICI, Cyclic cohomology, the Novikov conjecture and hyperbolic groups, *Topology* **29** (1990), 345-388.
- [25] A. CONNES, H. MOSCOVICI, The local index formula in non-commutative geometry, *GAFA*, **5** (1995), 174-243.
- [26] A. CONNES, H. MOSCOVICI, Hopf Algebras, Cyclic Cohomology and the Transverse Index Theorem, *Commun. Math. Phys* **198**, (1998) 199-246.
- [27] A. CONNES, G. LANDI, Non-commutative manifolds, the instanton algebra and isospectral deformations, math.QA/0011194.
- [28] A. CONNES, M. DUBOIS-VIOLETTE, Non-commutative finite-dimensional manifolds, I. spherical manifolds and related examples, Math QA/0107070.
- [29] A. CONNES, M. DUBOIS-VIOLETTE, *Moduli space and structure of non-commutative 3-spheres*, preprint arXiv math.QA/0308275.
- [30] A. CONNES, H. MOSCOVICI, Modular Hecke Algebras and their Hopf Symmetry (2003), Math QA/0301089. Rankin-Cohen Brackets and the Hopf Algebra of Transverse Geometry (2003), Math QA/0304316.
- [31] A. CONNES, M. MARCOLLI, The Quantum Statistical Mechanics of \mathbb{Q} -Lattices (2004), Math NT/0404128.

- [32] A. CONNES, K. CONSANI, M. MARCOLLI, Lefschetz formula and local factors of L-functions.
- [33] A. CONNES, M. MARCOLLI, Renormalization and motivic Galois theory (2004), Math NT/0409306.
- [34] C. CONSANI, M. MARCOLLI, Non-commutative geometry, dynamics, and infinity-adic Arakelov geometry, math.AG/0205306. To appear in *Selecta*.
- [35] L. DABROWSKI, A. SITARZ, Dirac Operator on the Standard Podleś Quantum Sphere, Banach Center Publication, math.QA/0209048.
- [36] P. DELIGNE, A.B. GONCHAROV, *Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte*, preprint, math.NT/0302267.
- [37] C. DENINGER, Local L -factors of motives and regularised determinants, *Invent. Math.*, **107** (1992), 135-150.
- [38] J. DIXMIER, Existence de traces non normales, *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A-B* **262** (1966).
- [39] H. FREUDENTHAL, *Lincos*, North Holland (1960).
- [40] A. GONCHAROV, *Multiple polylogarithms and mixed Tate motives*, preprint, math.AG/0103059.
- [41] A. GROTHENDIECK, Récoltes et semailles.
- [42] P.M. HAJAC, M. KHALKHALI, B. RANGIPOUR, Y. SOMMERHAEUSER, Hopf-cyclic homology and cohomology with coefficients. math.KT/0306288.
- [43] N. HIGSON, The local index formula in non-commutative geometry, Trieste Lecture Notes available at [http://www.math.psu.edu/higson/Research Papers.html](http://www.math.psu.edu/higson/Research%20Papers.html).
- [44] G.G. KASPAROV, The operator K -functor and extensions of C^* -algebras, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* **44** (1980), 571-636 ; *Math. USSR Izv.* **16** (1981), 513-572.
- [45] D. KASTLER, The Dirac operator and gravitation, *Commun. Math. Phys.* **166** (1995), 633-643.
- [46] D. KASTLER, Non-commutative geometry and fundamental physical interactions : The lagrangian level. *Journal. Math. Phys.* **41** (2000), 3867-3891.
- [47] U. KRAEHMER, Dirac Operators on Quantum Flag Manifolds. math.QA/0305071.
- [48] D. KREIMER, *On the Hopf algebra structure of perturbative Quantum Field Theory*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998), no. 2, 303-334.
- [49] S. MACLANE, I. MOERDIJK, *Sheaves in Geometry and Logic*, Springer Verlag (1992).
- [50] Y.I. MANIN, M. MARCOLLI, *Continued fractions, modular symbols, and non-commutative geometry*, *Selecta Mathematica (New Series)* Vol.8 N.3 (2002).
- [51] J. MARTINET, J.P. RAMIS, *Elementary acceleration and multisummability*, *I. Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol.54 (1991) 331-401.
- [52] R. MEYER, *On a representation of the idele class group related to primes and zeros of L-functions*, preprint arXiv math.NT/0311468.
- [53] J. MILNOR, D. STASHEFF, Characteristic classes, *Ann. of Math. Stud.* **76**, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1974).

- [54] M.A. RIEFFEL, Morita equivalence for C^* -algebras and W^* -algebras, *J. Pure Appl. Algebra* **5** (1974), 51-96.
- [55] B. RIEMANN, *Mathematical Werke*, Dover, New York (1953).
- [56] T. SCHUCKER, Spin group and almost commutative geometry. hep-th/0007047.
- [57] T. SCHUCKER, Forces from Connes' Geometry. hep-th/0111236.
- [58] I.M. SINGER, Future extensions of index theory and elliptic operators, *Ann. of Math. Studies* **70** (1971), 171-185.
- [59] D. SULLIVAN, Geometric periodicity and the invariants of manifolds, *Lecture Notes in Math.* **197**, Springer (1971).
- [60] M. WODZICKI, Non-commutative residue, Part I. Fundamentals K-theory, arithmetic and geometry, *Lecture Notes in Math.*, 1289, Springer-Berlin (1987).