C. R. Acad. Sc. Paris, t. 273 (15 novembre 1971) Série A - 900

Analyse fonctionnelle

Un nouvel invariant pour les algèbres de von Neumann.

Note[1] de M. **Alain Connes**, présentée par M. Gaston Julia.

À toute algèbre de von Neumann M de genre dénombrable, nous associons un invariant $S(M)$, sous-ensemble fermé de R_+, défini comme intersection des spectres des opérateurs modulaires associés par la théorie de Tomita aux états normaux et fidèles sur M.
Si M est semi-finie, $S(M) \subset \{0, 1\}$.
Si M_λ désigne les facteurs étudiés par Powers, avec $0 < \lambda < 1/2$ nous montrons que $S(M_\lambda) = \{u^n, n \in Z\}$, $u = (1-2\lambda)/(1+2\lambda)$, ce qui donne une nouvelle démonstration du non-isomorphisme des M_λ.

M désigne une algèbre de von Neumann dans l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, α un vecteur totalisateur et séparateur pour M ; M' le commutant de M.

L'opérateur qui à $x\alpha$, où $x \in M$ associe $x^*\alpha$ (resp. qui à $y\alpha$, $y \in M'$ associe $y^*\alpha$) est préfermé [3] ; nous notons S_α (resp. F_α) sa fermeture, $S_\alpha = J_\alpha \Delta_\alpha^{1/2}$ la décomposition de S_α étudiée dans [3], $\Delta_\alpha = F_\alpha S_\alpha$ est un opérateur positif.

Soit φ un état normal et fidèle sur M, soit $\mathfrak{H}_\varphi, \Pi_\varphi, \xi_\varphi$ la construction de Gelfand-Segal relative à φ ; nous notons Δ_φ l'opérateur modulaire relatif au triplet $\mathfrak{H}_\varphi, \Pi_\varphi(M), \xi_\varphi$.

Soit M une algèbre de von Neumann de genre dénombrable, nous posons $S(M) = \bigcap$ Spectre Δ_φ, φ état normal et fidèle. $S(M)$ est un fermé de R_+, et $t \neq 0, t \in S(M)$ entraîne $t^{-1} \in S(M)$, car $J_\varphi \Delta_\varphi J_\varphi = \Delta_\varphi^{-1}$; de plus, $S(M_1 \times M_2) = S(M_1) \cup S(M_2)$, où $M_1 \times M_2$ désigne un produit d'algèbres de von Neumann.

Théorème 1. *Soit M une algèbre de von Neumann opérant dans $\mathfrak{H}$, si l'ensemble $\mathfrak{G}$ des vecteurs totalisateurs et séparateurs de norme un est non vide, l'ensemble $S(M)$ est l'ensemble des $t \geq 0$, tels que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\alpha \in \mathfrak{G}$, il existe $x \in M, y \in M'$ tels que $\|x\,\alpha\| = 1, \|t^{1/2}\,x\,\alpha - y\,\alpha\| < \varepsilon, \|x^*\,\alpha - t^{1/2}\,y^*\,\alpha\| < \varepsilon$.*

Il résulte des lemmes suivants :
Lemme 2. *Soit φ normal fidèle sur M, il existe $\alpha \in \mathfrak{G}$, et U isométrie de $\mathfrak{H}_\varphi$ sur $\mathfrak{H}$ tels que $U\xi_\varphi = \alpha, U\Delta_\varphi U^{-1} = \Delta_\alpha$.*

[1] Séance du 3 novembre 1971.

Comme $\mathfrak{G}$ est non vide, l'isomorphisme Π_φ est spatial [1], ainsi $\Pi_\varphi(x) = U^{-1}x\,U$, posons $\alpha = U\xi_\varphi$; on vérifie que $US_\varphi U^{-1}$ est la fermeture de l'opérateur

$$\{\beta, U^{-1}\beta = \Pi_\varphi(x)\xi_\varphi \ \text{ pour un } \ x \in M, US_\varphi U^{-1}\beta = U\Pi_\varphi(x^*)\xi_\varphi\},$$

d'où $S_\alpha = US_\varphi U^{-1}$ et $\Delta_\alpha = U\Delta_\varphi U^{-1}$.

Lemme 3. *Soit* $t \geq 0, \varepsilon > 0, \alpha \in \mathfrak{G}$ *:*
(a) Distance$(t^{1/2}, \text{Spectre } \Delta_\alpha^{1/2}) < \varepsilon$ *si et seulement s'il existe* $x \in M$,

$$\|x\ \alpha\| = 1, \qquad \left\|\left(\Delta_\alpha^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right) x\ \alpha\right\| < \varepsilon\ \ ;$$

(b) $x \in M, \|(\Delta_\alpha^{1/2} - t^{1/2})x\alpha\| < \varepsilon$ *entraîne l'existence de* $y \in M'$ *tel que*

$$\|t^{\frac{1}{2}}x\ \alpha - y\ \alpha\| < \varepsilon, \qquad \|x^*\alpha - t^{\frac{1}{2}}y^*\alpha\| < \varepsilon\ \ ;$$

(c) $x \in M, y \in M', \|t^{1/2}x\ \alpha - y\ \alpha\| < \varepsilon, \|x^*\alpha - t^{1/2}y^*\alpha\| < \varepsilon$ *entraîne*

$$\left\|(\Delta_\alpha^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})x\ \alpha\right\| < 2\ \varepsilon$$

(a) Résulte de la densité de $M\alpha$ dans le domaine de $\Delta_\alpha^{1/2}$.

(b) Soit $y = J_\alpha x^* J_\alpha$; on a $y \in M', y\ \alpha = \Delta^{1/2}x\ \alpha$; de plus,

$$\left\|x^*\alpha - t^{\frac{1}{2}}y^*\alpha\right\| = \left\|J_\alpha(x^*\alpha - t^{\frac{1}{2}}y^*\alpha)\right\| \quad \text{et} \quad J_\alpha y^*\alpha = x\alpha.$$

(c) Soit $\beta = x\ \alpha, \gamma = \Delta_\alpha^{-1/2}\,y\,\alpha$; γ et β sont dans le domaine de $\Delta_\alpha^{1/2}$ et $\|t^{1/2}\beta - \Delta_\alpha^{1/2}\gamma\| < \varepsilon, \|\Delta_\alpha^{1/2}\beta - t^{1/2}\gamma\| < \varepsilon$, soit, comme $\Delta_\alpha^{1/2}(t^{1/2} + \Delta_\alpha^{1/2})^{-1}$ et $t^{1/2}(t^{1/2} + \Delta_\alpha^{1/2})^{-1}$ sont des contractions

$$\|t(t^{\frac{1}{2}} + \Delta_\alpha^{\frac{1}{2}})^{-1}\beta - t^{\frac{1}{2}}\Delta_\alpha^{\frac{1}{2}}(t^{\frac{1}{2}} + \Delta_\alpha^{\frac{1}{2}})^{-1}\gamma\| < \varepsilon,$$
$$\|\Delta_\alpha^{\frac{1}{2}}(t^{\frac{1}{2}} + \Delta_\alpha^{\frac{1}{2}})^{-1}\beta - t^{\frac{1}{2}}\Delta_\alpha^{\frac{1}{2}}(t^{\frac{1}{2}} + \Delta_\alpha^{\frac{1}{2}})^{-1}\gamma\| < \varepsilon.$$

La conclusion résulte de $(\Delta_\alpha^{1/2} - t^{1/2}) = (\Delta_\alpha - t)(\Delta_\alpha^{1/2} + t^{1/2})^{-1}$.

Dans la suite, $\mathfrak{M}$ désigne l'algèbre des matrices d'ordre 2, H l'espace de Hilbert obtenu en posant

$$(\alpha, \beta) = \text{Trace } \beta^*\ \alpha \quad \text{pour} \quad \alpha \in \mathfrak{M}, \quad \beta \in \mathfrak{M}.$$

On pose

$$\eta = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2} + \lambda\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}, \quad \text{où} \quad 0 < \lambda < \frac{1}{2}\ \ ; \ \ \text{on a} \ \ \|\eta\| = 1.$$

$\mathfrak{H}$ désigne l'espace de Hilbert produit tensoriel d'une infinité dénombrable de couples $(H, \eta)_n$, $n \in N$.

L'on note Π_n (resp. Π'_n) la représentation (resp. antireprésentation) de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{H}$ qui à x associe $\Pi_n(x)$ [resp. $\Pi'_n(x)$] telle que

$$\Pi_n(x)(\alpha_1 \otimes ... \otimes \alpha_{n-1} \otimes \alpha_n \otimes \alpha_{n+1} \otimes ...) = \alpha_1 \otimes ... \otimes \alpha_{n-1} \otimes x\alpha_n \otimes \alpha_{n+1} \otimes ...$$

(resp. $\alpha_n\, x$ au lieu de $x\, \alpha_n$).

M_λ désigne l'algèbre de von Neumann engendrée par les $\Pi_n(\mathfrak{M})$.

Théorème 4. *(a) Si M est de genre dénombrable, semi-finie, alors $S(M) \subset \{0, 1\}$.*
(b) $S(M_\lambda) = \{u^n, n \in Z\}, u = (1 - 2\lambda)/(1 + 2\lambda)$.

(a) Soit τ une trace normale fidèle semi-finie sur $M, \mathfrak{H}_\tau$ l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt, Π (resp. Π') la représentation (resp. antireprésentation) de M dans $\mathfrak{H}_\tau$ par multiplication à gauche (resp. à droite).

Soit $h \in \mathfrak{H}_\tau$ positif, non singulier, Δ_h l'opérateur modulaire relatif à $(\mathfrak{H}_\tau, \Pi(M), h)$.

Lemme 5. *Soit $\nu \in R$, alors $\Delta_h^{i\nu} = \Pi(h^{2i\nu})\Pi'(h^{-2i\nu})$.*

D'après [3], le groupe modulaire σ_ν est

$$\sigma_\nu(x) = h^{2i\nu} x\ h^{-2i\nu}, \quad \text{d'où} \quad \Delta_h^{i\nu} xh = h^{2i\nu} xhh^{-2i\nu}.$$

Comme $\Pi(M)$ et $\Pi'(M)$ commutent l'on a Spectre $\Delta_h^{1/2}$ inclus dans (Spectre h).(Spectre h^{-1}).

L'assertion (a) résulte de l'existence de h_1 (resp. h_2) positif non singulier, élément de $\mathfrak{H}_\tau$ dont le spectre ne contient que des $(1/2)^k, k \in N$ [resp. des $(1/3)^k, k \in N$].

(b) Soit δ l'opérateur modulaire relatif au triplet $(H, \mathfrak{M}, \eta)$; soit

$$z = \begin{bmatrix} 0 & (\frac{1}{2} + \lambda)^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

on a $\|z\,\eta\| = 1$, $u^{1/2}\, z\, \eta = \eta\, z$ et $u^{1/2}\, \eta\, z^* = z^*\, \eta$; d'après les lemmes 3, 5, Spectre $\delta = \{u, 1, u^{-1}\}$.

Lemme 6. *Le vecteur $\alpha_0 = \eta \otimes \eta \otimes ... \otimes \eta \otimes ...$ est séparateur et totalisateur pour M_λ dans $\mathfrak{H}$,* Spectre$\Delta_{\alpha_0} = \{u^n, n \in Z\}$.

L'espace vectoriel E engendré par les vecteurs de la forme

$$x_1\,\eta\otimes ...\otimes x_n\,\eta\otimes\eta\otimes ...\ (\text{resp. } \eta\,y_1\otimes ...\otimes\eta\,y_n\otimes\eta\otimes ...),$$

où $x_i\in\mathfrak{M}$ (resp. $y_j\in\mathfrak{M}$) est dense dans $\mathfrak{H}$.

S_{α_0} (resp. F_{α_0}) est une extension de l'opérateur qui à l'élément ci-dessus de E associe $x_1^*\,\eta\otimes...\otimes x_n^*\,\eta\otimes\eta\otimes...$ (resp. $\eta\,y_j^*$) ; ainsi $\Delta_{\alpha_0}=F_{\alpha_0}S_{\alpha_0}$ est une extension de l'opérateur produit tensoriel algébrique de δ, noté $\otimes\,\delta$, qui a un sens car $\delta(\eta)=\eta$.

Comme $(1+\Delta_{\alpha_0})E=E$ est dense dans $\mathfrak{H}$, Δ_{α_0} est la fermeture de $\otimes\,\delta$, d'où la conclusion.

Lemme 7. *Soit $k\in N,\varepsilon>0,\alpha\in\mathfrak{H},\ \|\alpha\|=1$; il existe $x\in M_\lambda, y\in M'_\lambda$ tels que*

$$\|x\alpha\|>1-\varepsilon\ ;\quad\text{et}\quad\left\|u^{\frac{k}{2}}x\alpha-y\alpha\right\|<\varepsilon,\quad\left\|x^*\alpha-u^{\frac{k}{2}}y^*\alpha\right\|<\varepsilon.$$

Soit E_n le sous-espace de $\mathfrak{H}$ engendré par les vecteurs

$$\alpha_1\otimes...\otimes\alpha_n\otimes\eta\otimes...,\qquad\text{où } \alpha_i\in H\qquad(i=1,2,...,n)\ ;$$

comme $E=\bigcup\limits_1^\infty E_n$ il existe $n\in N$ et $\alpha'\in E_n$ tels que

$$\|\alpha'\|=1\qquad\text{et}\qquad\|\alpha'-\alpha\|<\varepsilon\ 2^{-\frac{k}{2}}\left(u^{\frac{k}{2}}+1\right)^{-1}.$$

Soit $x=\Pi_{n+1}(z)...\Pi_{n+k}(z), y=\Pi'_{n+1}(z)...\Pi'_{n+k}(z)$; on a

$$u^{\frac{k}{2}}x\ \alpha'=y\ \alpha',\qquad x^*\alpha'=u^{\frac{k}{2}}y^*\alpha',\qquad\text{donc}\quad\|x\alpha\|>1-\varepsilon,$$

$$\left\|u^{\frac{k}{2}}x\ \alpha-y\ \alpha\right\|<\varepsilon,\quad\left\|u^{\frac{k}{2}}y^*\alpha-x^*\alpha\right\|<\varepsilon,$$

car

$$|x|\le|z|^k\qquad\text{et}\qquad|z|=\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)^{-\frac{1}{2}}\le2^{\frac{1}{2}}.$$

Référence

[1] J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, Gauthier-Villars, Paris, 2e édition, 1969.

[2] J. T. Schwartz, *Recent progress in the structure theory of factors* (Proceedings of a Symposium, Ed. by C. O. Wilde, New York, Academic Press, 1970).

[3] M. Takesaki, *Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications*, Springer, Berlin, Lecture Notes in Mathematics, no 128.

1, avenue Mathilde,
95-Saint-Gratien,
Val-d'Oise.