ANALYSE FONCTIONNELLE. - *Flots des poids sur les facteurs de type III.*

Note [1] de MM. **Alain Connes** et **M. Takesaki**,
transmise par M. Laurent Schwartz.

L'étude des poids à centralisateur proprement infini conduit à associer à tout facteur une action ergodique de R_+^* sur un espace mesurable. Aux ensembles mesurables correspondent les classes de poids à équivalence unitaire près. L'action de R_+^* correspond à l'opération $\varphi \to \lambda\varphi, \lambda > 0$. Si M n'est pas de type III_0, le flot est transitif et égal à R_+^* agissant sur $R_+^*/R_+^* \cap S(M)$. Sinon le sous-groupe virtuel $S_V(M)$ de R_+^* "noyau" de l'action de R_+^* généralise $S(M)$ et est relié aux descriptions connues des facteurs de type III_0.

La définition du flot des poids de M est fonctorielle, ce qui permet d'associer à M un homomorphisme γ_M de $\operatorname{Aut} M$ dans le groupe des automorphismes du flot. Quand M est un facteur de Krieger, cela permet de calculer entièrement $\operatorname{Out}_0 M = \operatorname{Aut} M/\overline{\operatorname{Int} M}$. L'homomorphisme modulaire δ_M se prolonge au groupe dual $S_V(M)^\wedge$ de $S_V(M)$ et permet d'obtenir $\operatorname{Out} M$ comme extension de $S_V(M)^\wedge$ par un groupe d'automorphismes d'une algèbre de von Neumann de type II_∞.

1. Comparaison des poids de multiplicité infinie. Un poids de multiplicité infinie sur une algèbre de von Neumann M est par définition un poids normal fidèle semi-fini φ dont le centralisateur M_φ est proprement infini.

Définition 1. *Soient φ_1, φ_2 des poids de multiplicité infinie sur M ; on écrit :*

(a) $\varphi_1 \sim \varphi_2$ quand il existe un unitaire $u \in M$ tel que $\varphi_1(x) = \varphi_2(uxu^*), \forall x \in M_+$.

(b) $\varphi_1 \prec \varphi_2$ quand il existe une isométrie $w \in M, ww^* \in M_{\varphi_2}$ avec $\varphi_1(x) = \varphi_2(wxw^*)$, $\forall x \in M_+$.

On montre que $\sim$ est la relation d'équivalence correspondant à la relation de préordre $\prec$.

Théorème 2. *Soit M un facteur proprement infini de genre dénombrable. Il existe alors un couple unique (p_M, P_M) tel que :*

(a) *P_M soit une algèbre de von Neumann abélienne ;*

(b) *p_M soit une surjection de l'ensemble des poids de multiplicité infinie de M sur l'ensemble des projecteurs non nuls de genre dénombrable de P_M ;*

(c) on ait $(p_M(\varphi_1) \leq (p_M(\varphi_2)) \iff (\varphi_1 \prec \varphi_2)$, *pour tous* φ_1, φ_2.

[1]Séance du 11 février 1974.

Théorème 3. *Soit M un facteur à prédual séparable, proprement infini et (p_M, P_M) comme dans le théorème 2 :*

(a) *Pour tout $\lambda > 0$, il existe un automorphisme unique Z_λ tel que $Z_\lambda p_M(\varphi) = p_M(\lambda\varphi), \forall\varphi$ de multiplicité infinie.*

(b) *Il existe un projecteur unique $d_M \neq 0$, de genre dénombrable tel que $Z_\lambda d_M = d_M, \forall\lambda > 0$.*

On montre que d_M est le plus grand projecteur d de P_M tel que l'application $\lambda \to Z_\lambda x$ soit continue fortement pour tout $x \in (P_M)_d$.

Définition 4. *Soit M une algèbre de von Neumann proprement infinie à prédual séparable. On appelle poids dominant sur M tout poids φ de multiplicité infinie tel que $\varphi \sim \lambda\varphi, \forall\lambda > 0$.*

Le théorème 3 montre l'existence et l'unicité (modulo $\sim$) du poids dominant.

Définition 5. *Soit M un facteur proprement infini à prédual séparable, on appelle flot des poids de M la restriction à l'algèbre de von Neumann $(P_M)_{d_M}$ de l'action Z de R_+^* sur P_M.*

L'action Z ainsi restreinte est continue et ergodique. Dans la terminologie de G. Mackey [2], à toute action ergodique d'un groupe localement compact G correspond un sous-groupe virtuel de G, noyau de cette action. Nous notons $S_V(M)$ le sous-groupe virtuel de R_+^* associé au flot des poids de M.

Théorème 6. *Soit M comme dans le théorème 5, on a*

$$\begin{aligned}(M \text{ n'est pas de type } \mathrm{III}_0) &\iff (S_V(M) = S(M) \cap R_+^*) \\ &\iff (S_V(M) \text{ est un sous groupe ordinaire de } R_+^*).\end{aligned}$$

Ainsi $S_V(M)$ coïncide avec $S(M) \cap R_+^*$ sauf dans le cas III_0 où il apparaît comme le spectre modulaire virtuel de M.

Théorème 7. *Soient N une algèbre de von Neumann, τ une trace normale fidèle semi-finie sur N, G un groupe localement compact, U un homomorphisme continu de G dans $\mathrm{Aut}\, N$ tel que l'action $\overline{U}$ correspondante de G sur le centre de N soit libre et ergodique.*

Soient H le sous-groupe virtuel de G associé à l'action $\overline{U}$ et ρ l'homomorphisme de H dans R_+^* correspondant au cocycle

$$s \to \rho_s = \frac{d\ \tau\ U_s}{d\tau} \Delta(s),$$

où Δ est la fonction modulaire de G.

Alors le produit croisé de N par G via U est un facteur M tel que $S_V(M) = \overline{\rho(H)}$ au sens de [2], p. 194.

Corollaire 8. *Soient M un facteur de type* III *à prédual séparable, N une algèbre de von Neumann de type* II_∞, *τ une trace normale fidèle semi-finie sur N, et $s \to \theta_s$, un groupe à un paramètre d'automorphismes de N tels que $\tau \circ \theta_s = e^{-s}\tau, \forall s \in R$ et que M soit le produit croisé de N par R via θ [cf. [3]].*

Alors le flot des poids de M est la restriction au centre de N de l'action $\lambda \to \theta_{-\mathrm{Log}\ \lambda}, \lambda \in R_+^*$.

Corollaire 9. *Soient M un facteur de type* III_0, *N une algèbre de von Neumann de type* II_∞, *τ une trace normale fidèle semi-finie sur N et $\theta \in \mathrm{Aut}\, N$ tel que $\tau \circ \theta = \tau(\rho\ .), \rho \geq \lambda_0 > 1$ et que M soit produit croisé de N par θ [cf. [1]].*

Alors le flot des poids de M est le flot construit sur la restriction de θ au centre de N, sous la fonction ρ.

Corollaire 10. *Soient G un groupe virtuel principal [[2], p. 204] et Δ la fonction modulaire sur G [homomorphisme de G dans R_+^* défini dans [2], p.198]. Soit M le facteur engendré par la représentation régulière de G, alors :*

$$S_V(M) = \overline{\Delta(G)}.$$

De plus les algèbres N des descriptions [1] et [3] de M comme produit croisé se calculent à partir de la représentation régulière du noyau [au sens de [2], p.196] de Δ.

Corollaire 11. *Soient M_1 et M_2 deux facteurs proprement infinis à prédual séparable alors :*

$$S_V(M_1 \otimes M_2) = \overline{S_V(M_1) S_V(M_2)}.$$

En particulier $S(M_1 \otimes M_2) \supset \overline{S(M_1) S(M_2)}$.

2. Régularisation des poids de multiplicité infinie. Ce procédé permet de relier tout poids de multiplicité infinie aux poids ψ tels que $p_M(\psi) \leq d_M$.

Théorème 12. *Soient M, p_M, P_M, d_M comme dans le théorème 3. Pour tout poids φ de multiplicité infinie et tout $\varepsilon > 0$ il existe $h \in M_\varphi$, $1-\varepsilon \leq h \leq 1+\varepsilon$ tel que $p_M(\psi) \leq d_M$ où $\psi = \varphi(h\ .)$.*

Il en résulte que si M est de type III_λ, $\lambda \neq 0$ et si φ_1 et φ_2 sont deux poids de multiplicités infinies, il existe un unitaire $u \in M$ tel que $u\,\mathscr{M}_{\varphi_1} u^* = \mathscr{M}_{\varphi_2}$ où $\mathscr{M}_{\varphi_j}$ désigne le domaine de φ_j.

3. Homomorphisme fondamental pour les facteurs de type III. Soient M, p_M, d_M, Z, comme dans le théorème 3. Pour tout $\alpha \in \operatorname{Aut} M$ il existe un $\bar{\alpha} \in \operatorname{Aut} P_M$ unique tel que $p_M(\varphi \circ \alpha^{-1}) = \bar{\alpha}\, p_M(\varphi)$ pour tout φ de multiplicité infinie.

Définition 13. *L'homomorphisme fondamental* γ_M *est l'homomorphisme qui à tout* $\alpha \in \operatorname{Aut} M$ *associe la restriction* $\gamma_M(\alpha)$ *de* $\bar{\alpha}$ *à* $(P_M)_{d_M}$.

Comme $\gamma_M(\alpha)$ commute avec $Z_\lambda, \forall \lambda \in R_+^*$ l'image de γ_M est contenue dans le groupe des automorphismes du flot de M. Ce groupe est égal à $R_+^*/S(M) \cap R_+^*$ dès que $S_V(M) = S(M) \cap R_+^*$.

On montre, quand M est de type II_∞ que la définition ci-dessus coïncide avec [1], p. 224.

Théorème 14. *Soient* M *et* γ_M *comme ci-dessus :*

(a) *L'homomorphisme* γ_M *est continu quand on munit* Aut M *de la topologie de la convergence simple normique dans* M_* *et* Aut *(flot des poids de* M*) de la convergence simple forte.*

(b) *On a* $\gamma_M(\alpha) = 1, \forall \alpha \in \overline{\operatorname{Int} M}$.

Il en résulte que γ_M définit par passage au quotient un homomorphisme de $\operatorname{Out}_0 M = \operatorname{Aut} M / \overline{\operatorname{Int} M}$ dans Aut (flot des poids de M).

Théorème 15. *Soit* M *un facteur de Krieger* [2]*, continu et infini. Alors* γ_M *définit par passage au quotient un isomorphisme de* $\operatorname{Out}_0 M$ *sur* Aut *(flot des poids de* M*).*

4. Prolongement de l'homomorphisme modulaire. Soient M un facteur de type III, N, τ et $(\theta_s)_{s \in R}$ comme dans le corollaire 8 ci-dessus. Soit $S_V(M)^\wedge$ le groupe des homomorphismes de $S_V(M)$ dans $T_1 = \{z \in C, |z| = 1\}$. En identifiant (corollaire 8) le flot des poids de M au flot $\lambda \to \theta_{-\operatorname{Log} \lambda}$/Centre de N on peut associer à tout élément c de $S_V(M)^\wedge$ une classe de 1-cocycles : tout c^0 dans cette classe est une application de R_+^* dans les unitaires du centre de N avec $c^0_{\lambda_1} \theta_{-\operatorname{Log} \lambda_1}(c^0_{\lambda_2}) = c^0_{\lambda_1 \lambda_2}$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 > 0$. Pour tout $s \in R$, soit U_s l'unitaire du produit croisé M de N par R canoniquement associé. Il existe alors un automorphisme $\alpha = \alpha_{c_0}$ unique de M tel que $\alpha(x) = x, \forall x \in N$ et $\alpha(U_s) = c^0_{e^{-s}} U_s, \forall s \in R$.

[2]i.e. M est produit croisé d'une algèbre de von Neumann abélienne par un automorphisme.

Théorème 16. *Soient* $M, N, \tau, (\theta_s)_{s\in R}$ *comme ci-dessus.*

(a) *Pour tout* $c \in S_V(M)^\wedge$, *la classe* $\overline{\delta}_M(c)$ *de* α_{c_0} *dans* $\operatorname{Out} M = \operatorname{Aut} M/\operatorname{Int} M$ *ne dépend ni du choix du représentant* c_0 *de* c *ni du choix de* N, τ, θ *vérifiant les conditions du corollaire 8.*

(b) *L'application* $\overline{\delta}_M$ *est un homomorphisme injectif de* $S_V(M)^\wedge$ *dans* $\operatorname{Out} M$ *et* $\overline{\delta}_M(\overline{t}) = \delta_M(t), \forall t \in R$ *où l'application* $t \to \overline{t}$ *est la transposée de l'injection canonique de* $S_V(M)$ *dans* R_+^*.

(c) *On a* $\gamma_M \circ \overline{\delta}_M = 1$.

(d) *L'image de* $\overline{\delta}_M$ *est un sous-groupe normal de* $\operatorname{Out} M$ *et l'action de tout* $\alpha \in \operatorname{Out} M$ *sur cette image est déterminée par* $\gamma_M(\alpha)$.

Cette extension $\overline{\delta}$ de l'homomorphisme modulaire permet d'étendre aux facteurs de type III la suite exacte de [1], p.225.

Théorème 17. *Soient* $M, N, \tau, (\theta_s)_{s\in R}$ *comme ci-dessus.*

(a) *Le commutant relatif de* N *dans* M *est égal au centre de* N.

(b) *Pour tout* $\alpha \in \operatorname{Out} M$ *il existe* $\alpha_0 \in \operatorname{Aut} M$ *dans la classe de* α *tel que* $\alpha_0(N) = N$ *et que la restriction de* α_0 *à* N *préserve* τ.

(c) *Dans (b) l'image* $\delta'(\alpha)$ *dans* $\operatorname{Out} N$ *de la restriction de* α_0 *à* N *ne dépend pas du choix de* α_0.

(d) *La suite suivante est exacte :*

$$1 \to S_V(M)^\wedge \xrightarrow{\overline{\delta}} \operatorname{Out} M \xrightarrow{\delta'} \operatorname{Out}_{\tau,\theta}(N) \to 1;$$

où

$$\operatorname{Out}_{\tau,\theta}(N) = \{\beta \in \operatorname{Out} N, \tau \circ \beta = \tau, \varepsilon_N(\theta_s)\beta = \beta\varepsilon_N(\theta_s), \forall s \in R\}.$$

(e) *Quand on identifie le flot des poids de* M *à la restriction au centre de* N *de l'action* $\lambda \to \theta_{-\operatorname{Log}\lambda}$ *on obtient pour tout* $\alpha \in \operatorname{Aut} M$,

$$\gamma_M(\alpha) = \textit{ restriction de } \delta'(\alpha) \textit{ au centre de } N.$$

Pour tout facteur de type III_0, on a alors :

$$\operatorname{Int} M \subset \operatorname{Image} \overline{\delta_M} \subset \overline{\operatorname{Int} M} \subset \operatorname{Noyau} \gamma_M \subset \operatorname{Aut} M.$$

Références

[1] A. Connes, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4^{e} série, 6, fasc. 2, 1973, p. 133-252.

[2] G. W. Mackey, *Math. Ann.*, 166, 1966, p. 187-207.

[3] M. Takesaki, *Acta. Math.*, 131, 1973, p. 249-310.

Centre de Physique théorique,
C. N. R. S.,
31, chemin Joseph-Aiguier,
13274 Marseille-Cedex 02.