ANALYSE FONCTIONNELLE. - C^*-ALGÈBRES ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Note [1] de **Alain Connes**, Correspondant de l'Académie.

Nous définissons l'analogue des notions de connexion, courbure et classes de Chern pour les C^* systèmes dynamiques (A, G, α), où G est un groupe de Lie. Nous appliquons le théorème de l'indice correspondant au calcul de l'indice d'opérateurs de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ de la forme $\sum A_{ij}\nabla_1^i\nabla_2^j$. où A_{ij} est un opérateur aux différences finies, ∇_1 est la dérivation, $\nabla_1 f = f' \forall f \in \mathscr{S}$ et $(\nabla_2 f)(s) = sf(s), \forall f \in \mathscr{S}$.

We introduce the analogue of the notions of connection, curvature and Chern classes for C^* dynamical systems (A, G, α), where G is a Lie group. We apply the corresponding index theorem to the computation of the index of operators in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ of the form $\sum A_{ij}\nabla_1^i\nabla_2^j$ where A_{ij} is a finite difference operator, ∇_1 ordinary differentiation: $\nabla_1 f = f' \forall f \in \mathscr{S}$ et $(\nabla_2 f)(s) = sf(s), \forall f \in \mathscr{S}$.

INTRODUCTION. - La théorie des C^* algèbres constitue une généralisation de la topologie des espaces localement compacts. Une grande partie de la théorie a été occupée par l'analogue de l'étude des mesures de Radon. Parmi les invariants de la topologie algébrique, c'est la K théorie qui s'adapte le mieux au cadre des C^* algèbres. L'étude de l'analogue d'une structure différentielle sur l'espace localement compact X a été proposée dans [6] comme l'étude des dérivations d'une C^* algèbre A. Dans cette Note nous développons les notions de base de topologie différentielle dans le cas particulier où la structure différentielle est obtenue par l'action d'un groupe de Lie G, par automorphismes, sur A. Généralisant les notions de connexion sur un fibré, courbure et classes de Chern, nous construisons, étant donnée une trace G-invariante τ, un morphisme ch, de $K_0(A)$ dans $H^*_{\mathbb{R}}(G)$, (cohomologie des formes différentielles invariantes à gauche sur G). Nous généralisons ensuite le théorème de l'indice. Toute cette étude est motivée par un exemple simple, celui de la C^* algèbre A_θ, de la rotation irrationnelle d'angle θ. Celle-ci est loin d'être commutative, étant simple et non de type I, et Pimsner et Voiculescu ont calculé $K(A_\theta)$ [3]. Nous munissons d'abord A_θ de la structure différentielle provenant de l'action évidente du groupe compact $T^2, T = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$, puis nous montrons que l'espace des sections de classe C^∞ du fibré de dimension θ sur A_θ s'identifie avec l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, sur lequel A_θ agit par des opérateurs aux différences finies. Les opérateurs

$$D_1 f = \frac{d}{dt} \qquad \text{et} \qquad D_2 f = \frac{2\pi i t}{\theta} f,$$

définissent alors une connexion (de courbure constante $1/\theta$) et le théorème de l'indice permet de calculer l'indice (à valeurs entières) d'opérateurs polynômes en D_1, D_2 à coefficients opérateurs aux différences finies.

Soit (A, G, α) un C^* système dynamique, où G est un groupe de Lie. On dit que $x \in A$ est de classe C^∞ ssi l'application $g \mapsto \alpha_g(x)$ de G dans l'espace normé A est de classe C^∞. L'algèbre involutive $A^\infty = \{x \in A, x \text{ de classe } C^\infty\}$ est dense en norme dans A.

Soit Ξ^∞ un module (nous l'écrirons comme module à droite) projectif de type fini sur A^∞ ; $\Xi^0 = \Xi^\infty \otimes_{A^\infty}$ est alors un module projectif de type fini sur A.

LEMME 1. - *Pour tout module projectif de type fini Ξ sur A, il existe un module projectif de type fini Ξ^∞ sur A^∞, unique à isomorphisme près, tel que Ξ soit isomorphe à $\Xi^\infty \otimes_{A^\infty} A$.*

Dans la suite, Ξ^∞ désigne un module projectif de type fini sur A^∞. On appelle structure hermitienne sur Ξ^∞ la donnée d'une forme hermitienne positive $\langle \xi, \eta \rangle \in A^\infty, \forall \xi, \eta \in \Xi^\infty$ telle

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 290, n°13 (31 mars 1980) - Série A - 599

[1] Remise le 24 mars 1980.

que

$$\langle \xi, x, \eta, y\rangle = y^* \langle \xi, \eta\rangle\, x, \qquad \forall \xi, \eta \in \Xi^\infty, \qquad \forall x, y \in A^\infty.$$

Pour $n \in \mathbb{N}, \Xi^\infty \otimes \mathbb{C}^n$ est un module projectif de type fini sur $M_n(A^\infty) = A^\infty \otimes M_n(\mathbb{C})$, cela permet, en remplaçant A par $M_n(A) = A \otimes M_n(\mathbb{C})$ (et l'action de G par $\alpha \otimes id$) de supposer l'existence d'un orthoprojecteur $e \in A^\infty$ et d'un isomorphisme F du module eA^∞ sur Ξ^∞. On munit alors Ξ^∞ de la structure hermitienne suivante :

$$\langle \xi, \eta\rangle = F^{-1}(\eta) * F^{-1}(\xi) \in A^\infty.$$

Soit δ la représentation de Lie G dans l'algèbre de Lie des dérivations de A^∞ avec

$$\delta_X(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\alpha_{g_t}(x) - x), \qquad \text{où } \dot{g}_0 = X, \qquad x \in A^\infty.$$

Définition 2. - *Soit Ξ^∞ un module projectif de type fini sur A^∞, on appelle connexion (sur Ξ^∞) toute application linéaire ∇ de Ξ^∞ dans $\Xi^\infty \otimes (\mathrm{Lie}\ G)^*$ telle que, pour tout $X \in \mathrm{Lie}\ G$ et $\xi \in \Xi^\infty, x \in A^\infty$ on ait*

$$\nabla_X(\xi.x) = \nabla_x(\xi).x + \xi.\delta_X(x).$$

Nous dirons que ∇ est compatible avec la structure hermitienne ssi :

$$\langle \nabla_X \xi, \xi'\rangle + \langle \xi, \nabla_X \xi'\rangle = \delta_x \langle \xi, \xi'\rangle, \qquad \forall \xi, \xi' \in \Xi^\infty, \qquad \forall X \in \mathrm{Lie}\ G.$$

Tout module projectif de type fini, Ξ^∞, sur A^∞ possède une connexion ; sur le module eA^∞ la formule suivante définit la *connexion grassmannienne* :

$$\nabla^0_X(\xi) = e\delta_X(\xi) \in eA^\infty, \qquad \forall \xi \in eA^\infty, \qquad \forall X \in \mathrm{Lie}\ G.$$

Cette connexion est compatible avec la structure hermitienne

$$\langle \xi, \eta\rangle = \eta^* \xi \in A^\infty, \qquad \forall \xi, \eta \in eA^\infty.$$

A la représentation δ de Lie G dans l'algèbre de Lie des dérivations de A^∞ correspond le complexe $\Omega = A^\infty \otimes \Lambda(\mathrm{Lie}\ G)^*$ des formes différentielles invariantes à gauche sur G à coefficients dans A^∞. On munit Ω de la structure d'algèbre (nous noterons encore $\omega_1 \wedge \omega_2$ le produit de ω_1 par ω_2, on n'a plus, bien entendu, l'égalité $\omega_2 \wedge \omega_1 = (-1)^{i\omega_1 i\omega_2}(\omega_1 \wedge \omega_2)$ produit tensoriel de A^∞ par l'algèbre extérieure de $(\mathrm{Lie}\ G)^*_{\mathbb{C}}$ et de la différentiation extérieure d telle que :

1° pour $a \in A^\infty$ et $X \in \mathrm{Lie}\ G$ on ait $\langle X, da\rangle = \delta_X(a)$;

2° $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2, \forall \omega_1 \in \Omega^p, \forall \omega_2 \in \Omega$;

3° $d^2\omega = 0, \forall \omega \in \Omega$.

Comme $A^\infty \subset \Omega$, Ω est un bimodule sur A^∞.

Toute connexion sur eA^∞ est de la forme $\nabla_X(\xi) = \nabla^0_X(\xi) + \theta_X \xi, \forall \xi \in eA^\infty, X \in \mathrm{Lie}\ G$, où la forme $\theta \in e\Omega^1 e$ est uniquement déterminée par ∇, on a $\theta^*_X = -\theta_X, \forall X \in \mathrm{Lie}\ G$ ssi ∇ est compatible avec la structure hermitienne de eA^∞.

Définition 3. - *Soit ∇ une connexion sur le module projectif de type fini Ξ^∞ (sur A^∞), on appelle courbure de ∇ l'élément Θ de $\mathrm{End}_{A^\infty}(\Xi^\infty) \otimes \Lambda^2(\mathrm{Lie}\ G)^*$ défini par*

$$\Theta(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]} \in \mathrm{End}_{A^\infty}(\Xi^\infty), \qquad \forall X, Y \in \mathrm{Lie}\ G.$$

Identifions $\mathrm{End}(eA^\infty)$ avec $eA^\infty e \subset A^\infty$, la courbure Θ_0 de la connexion grassmannienne est alors la 2-forme $e(de \wedge de) \in \Omega^2$, celle de $\nabla = \nabla^0 + \theta\wedge$ est égale à $\Theta_0 + e(d\theta + \theta \wedge \theta)e \in \Omega^2$.

Lemme 4. - *Avec les notations ci-dessus, on a*

$$e(d\Theta)e = \Theta \wedge \theta - \theta \wedge \Theta.$$

Soit maintenant τ une trace finie, G-invariante, sur A. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une unique application k-linéaire de $\Omega \times \underset{k \text{ fois}}{\ldots} \times \Omega$ dans $\Lambda(\text{Lie } G)^*_{\mathbb{C}}$ telle que.

$$\tau^k(a_1 \otimes \omega_1, \ldots, a_k \otimes \omega_k) = \tau(a_1 a_2 \ldots a_k)\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k.$$

Proposition 5. - *Avec les notations ci-dessus, la forme différentielle invariante sur G égale à $\tau^k(\Theta, \ldots, \Theta) \in \Lambda^{2k}(\text{Lie } G)^*_{\mathbb{C}}$ est fermée et sa classe de cohomologie ne dépend que du module projectif de type fini $\Xi^\infty = eA^\infty$ sur A^∞.*

Notons $H^*_{\mathbb{R}}(G)$ l'anneau de cohomologie des formes différentielles invariantes (à gauche) sur G, pour e comme ci-dessus, posons

$$\text{Ch}_\tau(e) = \text{classe de} \sum \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^k \frac{1}{k!} \tau^k(\Theta, \ldots, \Theta) \in H^*_{\mathbb{R}}(G).$$

On construit ainsi un morphisme ch_τ du groupe $K_0(A)$ dans $H^*_{\mathbb{R}}(G)$. En remplaçant (A, G, α) par $(A \otimes C(S^1), G \times \mathbb{R}, \alpha')$, où $\alpha'_{g,s}(x \otimes f) = \alpha_g(x) \otimes f_s$ et $f_s(t) = f(t-s), \forall t \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on prolonge ch_τ en un morphisme de $K(A) = K_0(A) \oplus K_1(A)$ dans $H^*_{\mathbb{R}}(G)$.

Cas particuliers. - (a) Soit $(\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}}$ un groupe à un paramètre d'automorphismes de A, δ la dérivation correspondante alors pour $U \in A$, inversible de classe C^∞ on a $ch_\tau([U]) = (1/2i\pi)\tau(\delta(U)U^{-1})$. (La non-trivialité de cette expression était connue, cf. [4].)

(b) Soient $(\alpha_{t_1,t_2})_{t_1,t_2 \in \mathbb{R}}$ un groupe à deux paramètres d'automorphismes de A, δ_1, δ_2 les dérivations correspondantes de A et $\varepsilon^1, \varepsilon^2$ la base canonique de $(\text{Lie } G)^*$, où $G = \mathbb{R}^2$. Pour tout orthoprojecteur e de A on a $ch_\tau(e) = \tau(e) + c_1(e)\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \in H^*_{\mathbb{R}}(G) = \Lambda(\text{Lie } G)^*$, où $c_1(e)$ se calcule pour e de classe C^∞ par la formule

$$c_1(e) = \frac{1}{2i\pi}\tau(e(\delta_1(e)\delta_2(e) - \delta_2(e)\delta_1(e))).$$

En particulier $c_1(e) = 0$ si e est équivalent à un projecteur fixé par un sous-groupe à un paramètre.

Passons à un exemple précis, soient $\in [0,1] \backslash \mathbb{Q}$ et A_θ la C^*-algèbre engendrée par deux unitaires U_1, U_2 tels que $U_1 U_2 = \lambda U_2 U_1, \lambda = \exp(i2\pi\theta)$. Le théorème de Pimsner et Voiculescu [3] détermine $K_0(A_\theta) = \mathbb{Z}^2$ et montre que l'unique trace τ [avec $\tau(1) = 1$] sur A_θ définit un isomorphisme de $K_0(A_\theta)$ sur $\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. De plus la construction de Powers et Rieffel [5] exhibe un projecteur $e \in A_\theta$, avec $\tau(e) = \theta$; si ρ désigne l'isomorphisme de $C(S^1), S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans A_θ, qui à la fonction $t \mapsto \exp(i2\pi t)$ associe U_1, on a $e_0 = \rho(g)U_2 + \rho(f) + (\rho(g)U_2)^*$, les conditions sur $f, g \in C(S^1)$ sont satisfaites si $f(s) = 1, \forall s \in [1-\theta, \theta], f(s) = 1 - f(s-\theta), \forall s \in [\theta, 1]$ et $g(s) = 0$ si $s \in [0, \theta], g(s) = (f(s) - f^2(s))^{1/2}$ si $s \in [\theta, 1]$.

Munissons A_θ de l'action du groupe $\mathbb{T}^2$, où $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ telle que $\alpha_{z_1,z_2}(U_j) = z_j U_j, j = 1, 2$ les dérivations correspondantes vérifient $\delta_k(U_k) = 2\pi i U_k, \delta_j(U_k) = 0$ si $j \neq k$. L'algèbre A^∞_θ est l'espace des suites à décroissance rapide $(s_{n,m})_{n,m \in \mathbb{Z}^2}$, l'élément associé de A_θ étant $\sum s_{n,m} U_1^n U_2^m$. Pour f et g de classe C^∞, on a $e_0 \in A^\infty_\theta$ et le calcul montre que $c_1(e_0) = -6 \int g^2 f' dt = 6 \int_0^1 (\lambda - \lambda^2) d\lambda = 1$. On en déduit que si $e \in A_\theta$ est un projecteur tel que $\tau(e) = |p - q\theta|$, on a

$$c_1(e) = \pm q.$$

Cet exemple montre la non-trivialité de c_1, la propriété d'intégralité $c_1 \in \mathbb{Z}$ sera expliquée plus loin (th. 11), notons la réalisation concrète suivante du module projectif de type fini $\Xi^{\infty}_{p,q}$ de dimension $|p - q\theta|$ sur A^{∞}_{θ}.

Soit $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ l'espace de Schwartz de $\mathbb{R}$, considérons $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^q$ comme espace de sections du fibré trivial $\mathbb{C}^q$ sur $\mathbb{R}*$, de sorte que $\xi(s) \in \mathbb{C}^q, \forall \xi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^q, s \in \mathbb{R}$. Soient W_1, W_2 deux unitaires dans $\mathbb{C}^q$ tels que $W_1 W_2 = \exp(i2\pi/q) W_2 W_1$. On fait de $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^q$ un A^{∞}_{θ}-module en posant :

$$\begin{aligned} (\xi, U_1)(s) &= W_1 \xi(s - \varepsilon), \qquad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \text{où } \varepsilon = \frac{p}{q} - \theta, \\ (\xi, U_2)(s) &= \exp(i2\pi s) W_2^p \xi(s), \qquad \forall s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Théorème 7. - Le A^{∞}_{θ} module ainsi défini est projectif de type fini, de dimension $|p - q\theta|$, les égalités

$$(\nabla_1 \xi)(s) = \frac{d}{ds}\xi(s) \qquad \text{et} \qquad (\nabla_2 \xi)(s) = \frac{2\pi i s}{\varepsilon}\xi(s)$$

définissent une connexion de courbure constante égale à $1/(\theta - p/q)$.

On obtient ainsi un autre moyen pour le calcul de c_1, en effet l'intégrale de la courbure est $|p - q\theta|/(\theta - (p/q)) = \pm q$.

Dans l'exemple de A_θ étudié ci-dessus, la C^*-algèbre est loin d'être triviale (elle n'est pas de type I), la structure différentielle provenant des dérivations δ_1, δ_2 est cependant aussi régulière que celle d'une variété compacte de classe C^{∞}, en particulier :

1° avec $\Delta = \delta_1^2 + \delta_2^2$ l'opérateur $(1 - \Delta)^{-1}$ de A_θ dans A_θ est un opérateur compact (au sens usuel);

2° l'espace A^{∞}_{θ} est un espace nucléaire (au sens de Grothendieck).

Pour préciser ces faits et leur rattacher l'intégralité du coefficient c_1, remarquons que (cf. [2]) le produit croisé de A_θ par l'action définie ci-dessus du groupe $\mathbb{T}2$ est la C^*-algebre élémentaire k des opérateurs compacts dans l'espace de Hilbert, puis revenons au cadre général d'un C^* système dynamique (A, G, α), avec pour but l'étude d'opérateurs différentiels elliptiques de la forme (avec $G = \mathbb{R}^n$) $D = \sum\limits_{|\alpha| \le k} a_j \delta^j$ où $j = (j_1, \ldots, j_n), a_j \in A^{\infty}$ et où pour tout $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}_n, \sigma(\xi) = i^k \sum\limits_{|j|=k} a_j \xi^j$ est *inversible* dans A.

Calcul pseudo-différentiel et C^* systèmes dynamiques. - Pour simplifier supposons que $G = \mathbb{R}^n$, soient B le produit croisé $B = A \times_\alpha \mathbb{R}^n, A \subset M(B)$ l'isomorphisme canonique de A sur une sous-algèbre de l'algèbre $M(B)$ des multiplicateurs de B et $s \to V$, la représentation unitaire canonique de $\mathbb{R}^n$ dans $M(B)$ avec $V_s x V_s^* = \alpha_s(x), \forall x \in A$.

Munissons l'algèbre involutive A^{∞} de la famille de semi-normes: $p_i(a) = \|\delta_1^{i_1} \ldots \delta_n^{i_n} a\|$, où $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$ et soit $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, A^{\infty})$ l'espace de Schwartz correspondant : l'application $s \to a(s)$ de $\mathbb{R}^n$ dans A^{∞} est dans $\mathscr{S}$ ssi pour tous multi-indices i, j la fonction $p_i((\partial/\partial s)^j a(s))$ est à décroissance rapide.

La C^*-algèbre $B = A \times_\alpha \mathbb{R}^n$ est la fermeture normique de l'algèbre involutive

$$\sum = \left\{ \int a(s) V_s ds, a \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, A^{\infty}) \right\}.$$

Nous construisons maintenant des multiplicateurs de B de la forme $\int a(s) V_s ds$, où a est une distribution à valeurs dans A^{∞} de support singulier contenu dans $\{0\} \subset \mathbb{R}^n$.

Définition 8. - *Soient $m \in \mathbb{Z}, \mathbb{R}_n = (\mathbb{R}^n)^\wedge$ le dual de $\mathbb{R}^n$, et ρ une application de classe C^∞ de $\mathbb{R}_n$ dans A^∞. Nous dirons que ρ est un symbole d'ordre $m, \rho \in S^m$ ssi :*

1° *pour tous multi-indices i, j, il existe $C_{ij} < \infty$ tel que*

$$p_i\left(\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^j \rho(\xi)\right) \leq C_{ij}(1+|\xi|)^{m-|j|};$$

2° *il existe $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}_n\backslash\{0\}, A^\infty)$* tel que quand $\lambda \to \infty$ on ait $\lambda^{-m}\rho(\lambda\xi) \to \sigma(\xi)$ [pour la topologie de $C^\infty(\mathbb{R}\backslash\{0\}, A^\infty)$].

Soient $\rho \in S^m$ et $\hat{\rho}$ sa transformée de Fourier au sens des distributions [par hypothèse $\rho \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}_n, A^\infty)$], c'est une distribution à valeurs dans A^∞ donnée par l'intégrale oscillante

$$\hat{\rho}(s) = \int \rho(\xi)e^{-is.\xi}d\xi.$$

Son support singulier est contenu dans $\{0\} \subset \mathbb{R}^n$. De plus $\hat{\rho} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n, A^\infty)$ ssi ρ est d'ordre $-\infty$.

Proposition 9. - *(a) Pour tout $\rho \in S^m$ l'égalité $P_\rho = \displaystyle\int \hat{\rho}(s)V_s ds$ définit un multiplicateur P_ρ de l'algèbre involutive $\sum$.*
(b) Soient $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}, \rho_j \in S^{m_j}, j = 1, 2$. Il existe alors $\rho \in S^{m_1+m_2}$ tel que $P_\rho = P_{\rho_1}P_{\rho_2}$.
(c) Si $\rho \in S^0$, P_ρ se prolonge en un multiplicateur de $B = A \times_\alpha \mathbb{R}^n$.
(d) La fermeture normique $\mathscr{E}$ de *$\{P_\rho, \rho \in S^0\}$ est une sous C^*-algèbre de $M(B)$.*
(e) Soient S_{n-1} l'espace des demi-droites $\mathbb{R}^+\xi, \xi \in \mathbb{R}_n\backslash\{0\}$ et $P \in \mathscr{E}$, il existe alors $\sigma(P) \in A \otimes C(S^{n-1})$ tel que

$$\sigma(P)(\mathbb{R}_+\ \xi) = \lim_{\tau\to\infty} \hat{\alpha}_{\tau\xi}(P)$$

(f) La suite $0 \to A \times_\alpha \mathbb{R}^n \xrightarrow{j} \mathscr{E} \xrightarrow{T} A \otimes C(S^{n-1}) \to 0$ est exacte.

Dans (e) on utilise la convergence simple normique des multiplicateurs (considérés comme opérateurs dans B), et $\hat{\alpha}$ désigne l'action duale. Dans (f), j est l'inclusion canonique de B dans $M(B)$ et σ le symbole principal défini dans (e).

A la suite exacte (f) correspond une suite exacte à six termes invoquant $K(B)$, $K(\mathscr{E})$ et $K(A \otimes C(S^{n-1}))$. Dans le cas particulier où $G = \mathbb{R}^n$ traité ci-dessus, on peut expliciter l'indice, i.e. la flèche de $K_1(A\otimes C(S^{n-1}))$ dans $K_0(B)$. On dispose en effet de l'isomorphisme de Thom φ_A, de $K(A)$ sur $K(B) = K(A \times_\alpha \mathbb{R}^n)$, défini par récurrence sur n en itérant l'isomorphisme décrit dans [1].

Soient O un point de S^{n-1} et λ le générateur canonique de K $(S^{n-1}\backslash\{O\})$, Ψ_A l'isomorphisme correspondant de $K(A)$ avec $K(A \otimes C_O(S^{n-1}\backslash\{O\}))$.

Théorème. 10 (théorème de l'indice pour les flots). - On a

$$\mathrm{Indice\ P} \ = \ \varphi_\mathrm{A} \circ \Psi_\mathrm{A}^{-1}(\tau(\mathrm{P})), \qquad \forall\ \mathrm{P} \in \mathscr{E},$$

$\sigma(P)$ inversible.

D'une part ce théorème précise le théorème de l'indice pour les feuilletages mesurés dans le cas des flots, en calculant en effet l'indice à valeurs dans $K_0(C^*(V, \mathscr{F}))$ et non pas seulement la composition avec la trace. En particulier, il montre que l'image, par la trace, du groupe $K_0(C^*(V, \mathscr{F}))$ est égale à l'image, par le cycle $[C]$ de Ruelle et Sullivan, du sous-groupe de $H^*(V, \mathbb{R})$ image de $K(V)$ par le caractère de Chern Ch. Ainsi, si $H^n(V, \mathbb{R}) = 0$, cette image est nulle (cf. [1] pour une application dans le cas $n = 1$).

D'autre part, si τ est une trace finie α-invariante sur A et $\hat{\tau}$ désigne la trace duale, le théorème 10 permet de calculer $\hat{\tau} \circ \mathrm{Ind}$. Pour D elliptique, on définit $\mathrm{ch}_\tau(\sigma_D)$ comme dans le cas classique en composant l'application ch, définie plus haut avec Ψ_A^{-1}, on a alors :

THÉORÈME 11. - *On a* $\hat{\tau} \circ \mathrm{Indice}\ D = \langle \mathrm{ch}, (\sigma_D), v \rangle$, *où* $v = \varepsilon_1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon_n$ *désigne l'unique élément de la base canonique de* $\Lambda^n \mathbb{R}^n$.

Le théorème 11 reste valable quand on remplace $\mathbb{R}^n$ par un groupe de Lie G, en particulier prenons $A = A_\theta$, $G = \mathbb{T}^2$ agissant sur A_θ, comme ci-dessus, alors $A_\theta \times \mathbb{T}^2$ est isomorphe à la C^*-algèbre élémentaire k, la trace duale $\hat{\tau}$ étant la trace usuelle sur k ce qui démontre l'intégralité de $\hat{\tau} \circ \mathrm{Ind}$, comme dans le cas des variétés compactes usuelles.

Considérons $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ comme le A_θ^∞-module $\Xi_{(0,1)}$ décrit dans le théorème 7, alors $\mathrm{End}(S(\mathbb{R}))$ est l'algèbre des opérateurs aux différences de la forme $(\Delta F)(s) = \sum \varphi_n(s) F(s-n)$, où les φ_n sont des fonctions C^∞ périodiques de période θ et où la suite φ_n est à décroissance rapide, ainsi $\mathrm{End}(\mathscr{S}(\mathbb{R}))$ est isomorphe à $A_{\theta'}^\infty$, où $\theta' = 1/\theta - E(1/\theta)$. Prenant par exemple f et g périodiques de période 1 vérifiant les conditions ci-dessus relativement à $\theta', h(s) = g(s\theta), k(s) = 1 - 2f(s\theta)$, l'indice de l'opérateur

$$P : (PF)(s) = h(s)F'(s-1) + h(s+1)F'(s+1) + k(s)F'(s) + sF(s)$$

est égal à $1 + E(1/\theta)$, d'où l'existence de solutions de l'équations $PF = 0, F \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), F \neq 0$.

Remarque. - Soient V une variété compacte de dimension n de classe C^∞, Ψ un difféomorphisme de V et A la C^*-algèbre produit croisé de $C(V)$ par l'automorphisme $\Psi^*, \Psi^* f = f \circ \Psi$. Soit ΛV le complexe des formes différentielles de classe C^∞ sur V. On peut définir, essentiellement en faisant le produit croisé de ΛV par l'action de Ψ, un complexe $\Omega = \sum\limits_0^{n+1} \Omega^k, \Omega^0$ est une sous-algèbre involutive dense dans A, ayant des propriétés analogues au complexe $\Omega = A^\infty \times \Lambda$ (Lie G) ci-dessus. La structure différentielle ainsi définie ne correspond en général pas à des dérivations de A.

Références

[1] A. CONNES, An Analogue of the Thom Isomorphism for Cross Products of a C^*- Algebra by an Action of R, Preprint, I.H.E.S.

[2] D. OLESEN, G. PEDERSEN, M. TAKESAKI, Ergodic Actions of Compact Abelian Groups, Preprint, Copenhague.

[3] M. PIMSNER, D. VOICULESCU, Exact Sequences for K Groups and Ext Groups of Certain Cross Products C^*-Algebras, Preprint, I.N.C.R.E.S.T.

[4] O. BRATTELI, G. A. ELLIOTT, R. HERMAN, On the Possible Temperature of a Dynamical System, Preprint.

[5] M. RIEFFEL, Irrational Rotation C^*- Algebras, Short comm. I.C.M., 1978.

[6] S. SAKAI, Derivations in Operator Algebras, Preprint.

Pavillon 2, Résidence l'Ormaille, 91440 Bures-sur-Yvette.