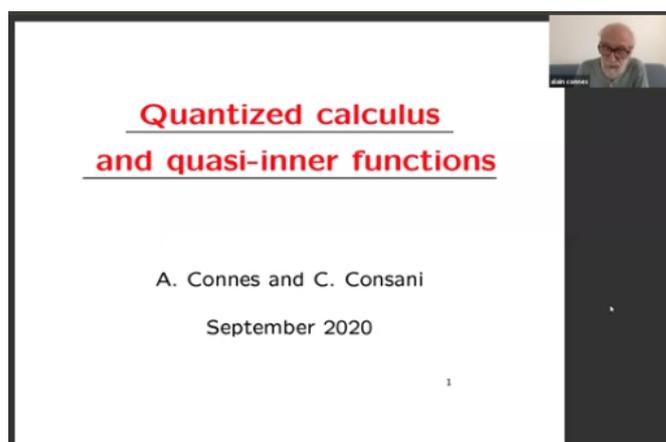


# Calcul quantifié et fonctions quasi-intérieures

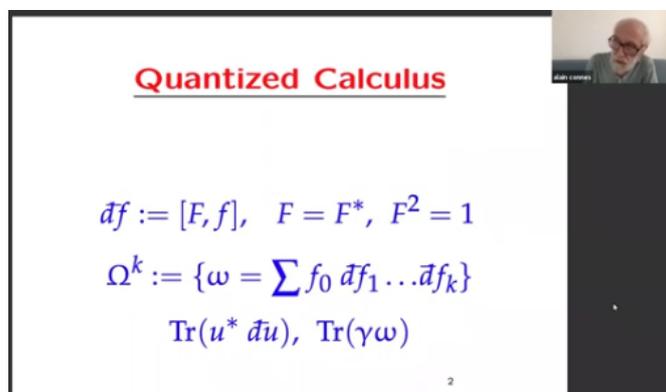
## Alain CONNES

*Introduction par Walter van Suijlekom du séminaire NCG.*

Merci beaucoup, Walter, et en effet, pour moi, c'est un grand plaisir, vraiment, de donner cette conférence inaugurale pour le séminaire, et ce que je vais expliquer est quelque chose qui a à voir avec le calcul quantifié et qui est un travail conjoint avec Katia Consani. Le contenu est un article que nous avons posté sur l'arxiv en août de cette année, mais il traite aussi beaucoup, comme vous le verrez, d'un article précédent que nous avons mis en ligne plus tôt, vers juin de cette année.

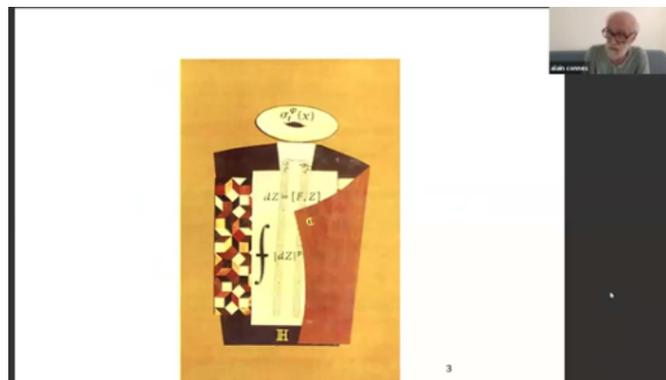


Ce dont je vais discuter, ce sera du lien précis entre le calcul quantifié et la théorie des nombres. Et par rapport au calcul quantifié... je veux vous donner comme une très courte introduction à ce calcul, et l'idée est très très simple. L'idée est la suivante... C'est qu'après tout, il y a un cadre dans lequel le calcul, l'infinitésimal, et beaucoup de choses... ont leur place, et qui vient de la mécanique quantique. Donc le scénario, si vous voulez, la scène, est quantique, dans le sens où vous avez un espace de Hilbert autour, et que tout ce que vous envisagez est en quelque sorte réalisé par des opérateurs dans l'espace de Hilbert.



Cette vidéo peut être visionnée ici <https://www.youtube.com/watch?v=mmbOQ6h1Qk8>.  
Transcription Denise Vella-Chemla, 5.12.2020.

Maintenant, l'équation clé est l'équation qui définit la différentielle. Donc, si vous avez une fonction, pensez-y comme à une fonction mais c'est un opérateur, et vous définissez sa différentielle par le commutateur qui est un opérateur  $F$ . Et cet opérateur  $F$  est remarquablement simple en ce sens qu'il est auto-adjoint, unitaire et de carré 1. C'est donc un opérateur qui est donné comme deux fois une projection moins l'identité. Et le fait qu'il soit de carré 1 vous indique que lorsque vous prenez deux fois la fonction différentielle, vous obtenez 0. Vous pouvez donc discuter avec moi, vous pouvez dire "bien, maintenant, ce que vous dites est faux" sauf que lorsque vous prenez la différentielle 1-forme qui est déjà une différentielle, vous prenez le commutateur gradué. Donc, au lieu de prendre  $F$  commutateur  $F$ , vous prenez  $FT + TF$ . Et si vous faites cela, vous découvrirez que parce que  $F^2$  est 1, le commutateur itéré est 0. Vous pouvez donc définir des formes différentielles. Et les formes différentielles ne sont que les opérateurs qui peuvent être écrits comme des combinaisons de produits de 1-formes et (bien sûr, vous pouvez mettre une fonction devant), mais vous pouvez également mettre cette fonction du côté droit car c'est un bimodule par construction. Maintenant, la beauté de cela est extrêmement simple et dès le début, vous obtenez des formules d'indice. Et la formule d'indice la plus simple est la formule d'indice qui vous donne un nombre d'enroulements d'une fonction sur  $S^1$  comme trace de la différentielle quantifiée de  $u^*$ ,  $u^*$  est le conjugué complexe de cette fonction de module 1, multiplié par la différentielle de  $u$ . Et plus généralement, lorsque vous avez affaire à un espace dont la dimension est paire et non impaire, vous devez utiliser, comme dans la théorie de Kasparov, vous devez utiliser un étalon  $Z_2$ , appelée petit gamma ( $\gamma$ ) et la formule pour l'indice est encore une fois très très simple car vous intégrez la forme différentielle en prenant la notation trace même pour les formes différentielles. Donc tout cela est assez standard et si vous voulez juste... d'abord, laissez-moi vous montrer



quelle était la couverture de mon livre parce que cette image dit que si vous regardez la différentielle  $dZ$  qui est égal à  $F$  commutateur  $Z$  ( $dZ = [F, Z]$ ), c'est écrit juste au niveau du cou du personnage, mais si vous regardez un peu plus bas, ce que vous trouvez, c'est la chose suivante, que vous devez comprendre comme ceci : vous voyez, normalement, quand vous avez une fonction qui par exemple paramètre un ensemble de Julia ou quelque chose comme ça, par le théorème de recouvrement de Riemann parce que l'ensemble de Julia séparera le plan convexe en deux domaines, l'un simplement connexe, vous pourrez donc l'envoyer sur le disque, mais la fonction qui l'envoie sur le disque, qui envoie plutôt l'ensemble de Julia sur le cercle, est une fonction très discontinue, je veux dire que c'est une fonction qui n'est pas du tout différentiable, elle est continue, on ne se préoccupe pas du noyau de l'adjoint (join kernel ?), mais elle est extrêmement irrégulière, donc si vous voulez prendre sa différentielle comme distribution, cela aurait du sens, mais vous n'auriez aucun moyen de prendre

sa valeur absolue et de l'élever à une puissance qui n'est pas un entier, et même un entier ne ferait pas l'affaire. Mais ici, ce que vous pouvez faire, vous pouvez prendre la différentielle quantifiée, l'élever à une puissance qui est un nombre réel, qui est la dimension extérieure de l'ensemble de Julia, et avec mes collaborateurs australiens, Sukochev, Zanin, et leurs collaborateurs, ce que nous avons fait, nous avons pu, ces dernières années, mettre sous une forme rigoureuse ce que j'avais décrit dans mon livre un peu à un niveau heuristique, à savoir le fait que ce type de formule vous donne la mesure conforme sur l'ensemble de Julia ou plus généralement sur la frontière des groupes quasi-fuschiens. Donc je veux dire que ce calcul a beaucoup de pouvoir. En fait, on devrait constamment garder à l'esprit de comparer ce calcul avec le calcul ordinaire et le calcul des distributions et ce que j'expliquerai aujourd'hui, c'est le rôle crucial de ce calcul par rapport à la fonction zeta de Riemann.

**F = Hilbert transform**

$$k(s, t) = \left(\frac{i}{\pi}\right) \frac{f(s) - f(t)}{s - t}$$

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow df = \infty \text{ order}$   
and conformal invariance

Je veux dire, quand vous prenez l'exemple le plus simple de ce calcul, vous regardez les fonctions sur la ligne, donc ce ne sont que des fonctions ordinaires d'un paramètre réel, vous voyez ces fonctions comme des opérateurs, dans  $L^2$  de la droite réelle ( $L^2(\mathbb{R})$ ), et quand on prend leur commutateur avec la transformée de Hilbert, vous découvrez que la différentielle quantifiée n'est plus seulement la différentielle habituelle, la différentielle habituelle dérivé, la dérivée est bien sûr les valeurs diagonales car c'est  $f$  de  $s$  moins  $f$  de  $t$  sur  $s$  moins  $t$  (c'est à dire (*i.e.*  $\frac{f(s)-f(t)}{s-t}$ ) à un facteur de normalisation près, mais ce qui est vraiment important, c'est que la régularité de la fonction régit en fait l'ordre de l'infinitésimal que vous avez sur le côté droit car après tout, la différentielle doit être infinitésimale. Et si la fonction est une fonction de Schwartz, l'espace, c'est un exercice que vous pouvez prouver de plusieurs manières, pour montrer que la différentielle quantifiée de la fonction est un infinitésimal d'ordre infini. L'ordre infini signifie que, si vous voulez, ce qui est assez sympa avec les infinitésimaux, c'est qu'ils ont un ordre. Donc par exemple si vous avez des valeurs propres de l'ordre de  $1/n$  ( $1/n$ ), quand  $n$  tend vers l'infini, alors l'infinitésimal a l'ordre 1. Si vous avez des valeurs propres qui décroissent très très vite, alors l'infinitésimal a un ordre infini et c'est le cas ici. Une autre propriété très cruciale de ce calcul, même dans une dimension, est qu'il est conformément invariant. Par conformément invariant, je veux dire que si je remplace la ligne par le cercle, alors je pourrai obtenir un isomorphisme du calcul, à partir du calcul sur la ligne avec le calcul sur le cercle. Maintenant, vous pouvez discuter avec moi "D'accord, mais comment pouvez-vous relier la ligne avec le cercle ?". Eh bien, la ligne, si vous avez compacté par un seul point, c'est  $\pi^1(\mathbb{R})$ . Et comment le reliez-vous au cercle ? Eh bien, vous le rapportez comme des domaines dans le plan complexe, qui sont équivalents, donc vous voyez la ligne comme la limite du demi-plan supérieur et

vous voyez le cercle comme la limite du disque-unité. Maintenant, les deux choses sont liées par une transformation conforme. Vous avez un peu à faire attention en définissant la transformation sur les vecteurs, pas sur les fonctions, car sur les vecteurs vous voulez que le produit interne de  $L^2(\mathbb{R})$  se transforme en produit interne de  $L^2(S^1)$ . Alors vous devez introduire, vous savez, quelque chose qui ressemble à la racine carrée du dénominateur, quand vous prenez la transformation conforme. Le dénominateur est toujours au carré par construction. Alors vous faites ça et tout fonctionne bien. Et puis, on prouve que si vous êtes en  $S(\mathbb{R})$ , la différentielle est d'ordre infini, et que si vous êtes dans  $S^1$ , et que vous regardez une fonction dans  $\pi^1(\mathbb{R})$ , alors il s'avère que la fonction est lisse car à l'infini, elle se comporte très bien. Alors quand vous la regardez comme une fonction sur  $S^1$ , c'est une fonction lisse et quand vous regardez le calcul sur  $S^1$ , car c'est lié aux structures complexes, ce calcul qui est donné par ce  $f$ ,  $f$  est le double de la projection moins 1 où là, la projection sera la projection sur l'espace de Hardy,  $H^2$  du disque (i.e.  $H^2(D)$ ). Donc en fait c'est très facile alors, très facile, c'est un exercice très facile de prouver que si vous avez une fonction  $\mathbb{C}^\infty$  sur  $S^1$ , sa différentielle quantifiée est d'ordre infini. Il suffit de regarder le coefficient de Fourier qui doit se décomposer très rapidement. Donc, tout cela est très simple et cependant bon, il y a une caractéristique typique du calcul que nous verrons immédiatement qui est que, si vous regardez le calcul ordinaire, les différentielles ordinaires, les fonctions ordinaires, etc., elles ne seraient pas transparentes mais elles sont complètement transparentes avec ce calcul. Et ce que je veux expliquer c'est le fait que nous pouvons gérer la positivité. Nous allons donc avoir une prise en main immédiate de la positivité, de l'indice, si vous voulez, sur la chose que j'expliquais auparavant, la trace de  $U^*VU$  donc nous allons obtenir cette possibilité à cause du fait que lorsqu'on regarde les opérateurs unitaires,

**Triangular unitary**

$$U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} \\ 0 & u_{2,2} \end{pmatrix} \text{ unitary}$$

↕

1.  $u_{1,1}$  is an isometry.
2.  $u_{2,2}$  is a coisometry.

on peut se demander “quand on a une décomposition matricielle deux  $\times$  deux d'un opérateur, qui est typique de ce qui se passe dans un calcul quantifié, que se passe-t-il si la matrice représentant l'unitaire est triangulaire ?” D'accord, je vais donc simplement énoncer un exercice simple que vous pouvez faire dans votre tête, quand je parle, c'est pour caractériser ces matrices  $2 \times 2$  qui forment un opérateur unitaire mais qui sont triangulaires, il y a un zéro à la place 2,1. C'est un exercice très simple de montrer que c'est équivalent à trois choses, la troisième sera sur la page suivante. La première est que  $u_{1,1}$  est une isométrie, donc  $u_{1,1}^*u_{1,1}$  est égal à 1. La seconde est que  $u_{2,2}$  est une co-isométrie. Donc  $u_{2,2}u_{2,2}^*$  est égal à un.

3.  $u_{1,2}$  is a partial isometry  
 from the kernel of  $u_{2,2}$   
 to the cokernel of  $u_{1,1}$ .

Et la troisième est que  $u_{1,2}$ , celui qui est hors de la diagonale, est une isométrie partielle qui va du noyau de  $u_{2,2}$ , rappelez-vous,  $u_{2,2}$  est une co-isométrie donc elle pourrait avoir un noyau, au conoyau de  $u_{1,1}$ , encore une fois,  $u_{1,1}$  est seulement une isométrie donc elle peut ne pas être surjective donc elle doit avoir un conoyau. Alors les conditions sont celles-ci, ce sont des conditions très simples, il est très facile de vérifier cet exercice, mais elles joueront un rôle clé dans ce que nous faisons. Et la raison pour laquelle elles joueront un rôle clé est que quand vous avez un tel unitaire triangulaire, par rapport au  $F$  du calcul quantifié, vous prenez le  $F$ , le  $F$  décompose l'espace de Hilbert en une somme de deux espaces de Hilbert, tout autre opérateur a une décomposition matricielle  $2 \times 2$ , et maintenant vous pouvez demander qu'elle soit triangulaire. Eh bien si c'est le cas,

**Positivity**

$U$  triangular in  $(\mathcal{P}, \mathcal{P})$ ,  $F = 2P - 1$ ,  $f \geq 0$  then

$\text{Tr}(fU^*[F, U]) \leq 0$   
 (since  $UPU^* \leq \mathcal{P}$ )

6

ce que vous trouverez, en deux minutes, vous constaterez que vous avez une positivité pour l'indice, et même une forme de positivité renforcée. La positivité de l'indice sera donc simplement le fait que la trace de  $fU^*[F, U]$  est positive, je préfère la mettre négative comme vous le verrez plus tard. Alors je prends mon  $F$  pour être de la forme  $2P - 1$ , il a un complément que j'appelle  $\mathcal{P}$  ( $\mathcal{P}$  est juste  $1 - P$ ) et maintenant que se passe-t-il ? J'affirme qu'il y a un fait de négativité qui est encore une fois très simple à vérifier qui est que la trace du produit de  $f$  par ce qui donne l'indice, à savoir la dérivée logarithmique de  $U$ , la dérivée logarithmique quantique,  $U^*[F, U]$  sera négative. Ensuite, vous prouvez cela, eh bien, ce n'est pas un problème pour prouver que  $U^*[F, U]$  est négatif. Tout d'abord, vous pouvez voir que  $U^*[F, U]$  est auto-adjoint, car  $F$  est auto-adjoint, et vous conjuguez  $F$  et vous soustrayez, donc c'est auto-adjoint, mais alors ce que vous trouvez, c'est que pour cette projection  $\mathcal{P}$  ce que vous trouvez est que  $UPU^*$  est inférieur à  $\mathcal{P}$ . Donc en jouant, vous trouvez que

cet opérateur dans  $U^*F$  commutateur  $U$  (i.e.  $U^*[F, U]$ ) est négatif. Mais le produit d'un opérateur positif par un opérateur négatif a une trace négative, on le sait. Je veux dire la trace du produit de deux opérateurs positifs est positive. Je veux dire, il faut s'en souvenir parce que c'est non seulement vrai que la trace d'un opérateur *positif* est positive, non, la trace du *produit* de deux opérateurs positifs est positive. Comment le prouvez-vous ? Eh bien, je veux prouver que la trace d' $AB$  est positive,  $A$  et  $B$  sont positifs. Alors qu'est-ce que je fais ? Je prends la racine carrée de  $A$ . J'écris donc la trace de  $AB$  sous forme de trace de racine carrée de  $A$  fois  $B$  fois racine carrée de  $A$ . Et c'est bien sûr positif. Donc ça c'est fait. D'accord ? Donc c'est ce que nous avons, nous avons un type d'indice assez général, qui est un fait général sur les unitaires triangulaires. Et je préfère, comme je l'ai dit, l'écrire comme un fait négatif. D'accord. Maintenant, voici le premier point crucial.

**Weil positivity**

$$RH \iff \sum_v W_v(f * f^*) \leq 0,$$

7

Le premier point crucial est que la conjecture de Riemann RH équivaut également à un état de négativité. Oh, vous pouvez dire positivité si vous aimez jouer, mais... et qu'est-ce que c'est que cette déclaration ? Cette déclaration, il nous a fallu beaucoup de temps pour vraiment non pas comprendre, car comprendre, vous pouvez comprendre une déclaration, c'est une chose très différente de l'avoir absorbée. Alors je veux dire que c'est un fait que l'hypothèse de Riemann, même si c'est une hypothèse qui implique une infinité de nombres premiers, et qui concerne la distribution des nombres premiers, il s'avère qu'elle est équivalente à cette assertion et dans cette assertion, si vous considérez  $f$  comme à support compact, et que ??... , donc  $f$  est une fonction test, je vais bien expliquer ce que c'est, et ainsi de suite, mais le fait clé est que si  $f$  est à un support compact, le nombre de nombres premiers impliqués dans le côté droit est fini, ce qui est étonnant. C'est étonnant parce que l'équivalence de Weil vous dit que même si l'hypothèse de Riemann est quelque chose qui implique une infinité de nombres premiers, en fait, pour la prouver, il suffit de considérer un nombre fini de nombres premiers à la fois. Et c'est un si et seulement si. Cela dit que ce n'est pas une histoire de passage à la limite, vous savez, que vous allez le prouver pour un nombre fini de nombres premiers et ensuite... très bien, d'accord, non, c'est équivalent.

**Explicit Formulas**

$$W_v(h) = \int'_{\mathbb{Q}_v^*} \frac{|w|^{1/2}}{|1-w|} h(w) d^*w$$

$$\tilde{f}(0) - \sum_{\rho \in Z} \tilde{f}(\rho) + \tilde{f}(1) = \sum_v \mathcal{W}_v(f)$$

8

Et que sont ces  $W_v$ , eh bien, ils sont donnés dans ce qu'on appelle les formules explicites qui étaient certainement connues de Riemann. Elles sont appelées formules de Riemann-Weil. Maintenant, en termes modernes, bien sûr, d'accord, vous devez expliquer que ce sont des intégrales sur le groupe multiplicatif des champs  $p$ -adiques  $\mathbb{Q}_p$  qui pour la place archimédienne est juste la ligne des réels et ensuite vous faites une intégrale. Cette intégrale est délicate à calculer, et elle l'est pour la raison suivante: la fonction de test n'a pas besoin de disparaître en le point 1. L'intégrale va donc en quelque sorte diverger en  $w = 1$  et vous devez prendre de façon très précautionneuse une valeur principale. Donc une valeur principale, qu'est-ce que cela signifie, cela signifie que ce que vous faites est que vous soustrayez à  $h$  une fonction de choix qui a en fait la même valeur que  $h$  en 1 et puis vous vous déplacez un peu. Donc ce que j'ai écrit là est l'intégrale prime  $\int'$ , donc je veux dire, dans mon article en 98 j'ai beaucoup évolué là-dessus mais je veux dire d'accord, c'est bien défini, mais vous devez être extrêmement prudent lorsque vous travaillez avec, car si vous prouviez la positivité pour une mauvaise normalisation, vous n'auriez rien fait. Cette équivalence de Weil est basée sur ce qu'on appelle les formules explicites. Et ces formules explicites vous indiquent que si vous prenez la somme des transformées de Fourier (ici c'est une transformée de Mellin mais les deux sont liées) sur les zéros de la fonction zeta de Riemann, vous mettez un signe moins devant, vous ajoutez deux valeurs limites qui sont l'évaluation aux pôles de la fonction zêta de Riemann complète et qu'obtenez-vous, vous obtenez cette somme des contributions locales. Et à partir de là, vous pouvez déduire ce que je disais auparavant, à savoir que RH est équivalente à cette déclaration de négativité.

**Weil positivity**

$$RH \iff \sum_v \mathcal{W}_v(f * f^*) \leq 0,$$

7

D'accord ? Mais maintenant quel est le lien ? Comme je l'ai dit, il y a cette caractéristique remarquablement frappante, par l'équivalence de Weil, qu'il suffit de regarder un nombre fini de

nombre premiers. Et j'ai dit aussi, vous savez, ça il a fallu des années avant que l'on absorbe bien cette déclaration profondément. Et quand elle s'est ancrée plus profondément, je me suis rendu compte que ce que j'avais développé dans mon article en 1998

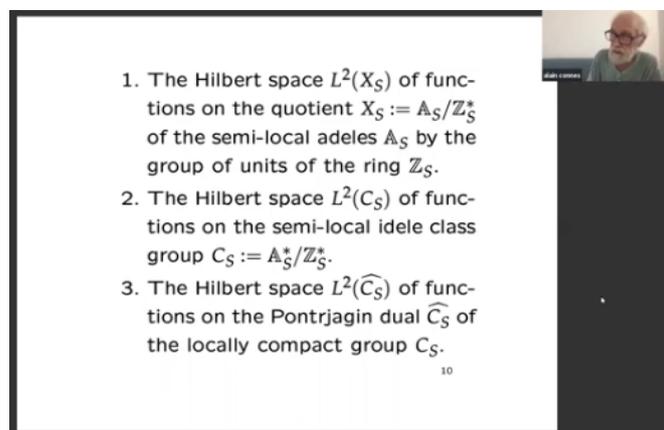
**Semi-local adèle class space**

$$X_S := \left( \prod_{v \in S} \mathbb{Q}_v \right) / \mathbb{Z}_S^*$$

$$\mathbb{Z}_S = \{q \in \mathbb{Q} \mid |q|_v \leq 1, \forall v \notin S\}$$

devrait jouer un rôle. Alors qu'est-ce que j'ai imaginé dans cet article de Selecta en 1998 ? Eh bien, j'avais conçu un espace global qui est l'espace des classes d'adèles et où, c'était bon, on pouvait trouver la réalisation spectrale et ainsi de suite. Cependant, cet espace global avait quelque chose d'extrêmement naturel et délicat. Et cela était dû au fait que lorsque vous regardez les adèles, le produit restreint du champ local sur toutes les places, et quand vous regardez les idèles, c'est la même chose, mais vous ne regardez que les éléments inversibles, puis il s'avère que lorsque vous les regardez tous les deux comme des groupes, vous regardez les adèles comme un groupe additif et les idèles comme un groupe multiplicatif, alors il s'avère que les mesures de Haar pour ces deux groupes sont singulières l'une par rapport à l'autre et cela rend la chose extrêmement délicate et compliquée. Mais cette pathologie si vous voulez, cette difficulté ne se pose pas lorsque vous prenez un produit fini. Et ce produit fini n'est pas l'adèle complet, mais il ne prend qu'un nombre fini de places. J'appelle  $S$  cet ensemble fini des places qui contient le lieu archimédien, et je prends maintenant le produit des champs locaux sur cet ensemble. Et je vais le diviser par ce qui devrait le diviser s'il était infini et je devrais le diviser par les nombres rationnels, les nombres rationnels multiplicatifs, mais je le divise par les éléments inversibles dans un certain anneau qui est associé à l'ensemble  $S$  et pour rendre la chose très concrète, permettez-moi de prendre  $S$  comme constitué de la place archimédienne et du nombre premier 2. Alors quel serait l'anneau  $\mathbb{Z}_S$  ? Eh bien, ce serait l'anneau de tous les nombres rationnels dont le dénominateur est une puissance de 2. Vous voyez, je veux dire, quand vous prenez des nombres rationnels dont le dénominateur est une puissance de 2, vous pouvez les ajouter, vous avez toujours un dénominateur qui est une puissance de 2 et vous pouvez les multiplier. Alors vous obtenez un anneau. Maintenant, dans cet anneau, tous les éléments ne sont pas inversibles, les éléments qui sont inversibles ne sont que les puissances de 2, plus ou moins. Donc, ce fait que je mentionne se généralise, et maintenant nous allons atteindre le cœur de la géométrie non-commutative car lorsque vous divisez le produit de ces champs  $\mathbb{Q}_v$  par le groupe multiplicatif des éléments inversibles de cet anneau  $\mathbb{Z}_S$  (soit  $\mathbb{Z}_S^*$ ), dès que vous avez plus de trois places disons, c'est un espace non-commutatif. Vous pouvez comprendre pourquoi c'est un espace non commutatif, parce que, par exemple, si je divisais  $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_2 \times \mathbb{Q}_3$  par des puissances de 2 et 3, vous verriez que la façon dont ils agissent sur la ligne réelle divise la ligne réelle par des puissances de 2 et 3, et bien sûr, c'est un espace non-commutatif. Mais le fait étonnant est qu'au niveau de la théorie de la mesure, ce n'est pas un espace non-commutatif. En d'autres termes, cet espace  $X_S$ , comme

vous le savez, en géométrie non-commutative, on regarde toujours un espace avec plusieurs paires de lunettes. Et la théorie qui a les verres de lunettes les plus grossiers est la théorie de la mesure. En d'autres termes, ce que nous faisons, c'est que nous prenons notre espace et nous le regardons du point de vue de la théorie de la mesure, ce qui signifie que nous pouvons négliger les ensembles de mesure 0. Lorsque nous faisons cela, il s'avère que l'espace des classes d'adèles semi-local est un espace standard. Pourquoi ? Parce que la mesure est portée par l'idèle. C'est-à-dire que la mesure est portée par les éléments dans le produit des champs locaux qui correspondent à des éléments inversibles, car les autres sont de mesure 0. Vous voyez si l'un des éléments est nul, il n'est pas inversible dans le champ local, alors il sera de mesure 0 pour la mesure de Haar additive. Donc en fait ce que nous trouvons, qui est totalement différent de l'aspect global, c'est que dans l'aspect semi-local, pour la théorie de la mesure, c'est parfait. Donc le fait que ça soit parfait du point de vue de la théorie de la mesure nous permet d'avoir un espace de Hilbert parfait.



Donc l'espace de Hilbert  $L^2$  de cet espace quotient  $X_S$  (i.e.  $L^2(X_S)$ ), car les mesures sont les mêmes, c'est-à-dire qu'elles sont équivalentes, a un sens parfait, et il peut être défini, d'accord, vous pouvez définir le produit interne, comme vous le feriez dans le cas global, mais d'accord, tout va bien, et il s'avère qu'il est canoniquement isomorphe, mais l'isomorphisme n'est pas trivial, à l'espace de Hilbert des fonctions sur le groupe de classes d'idèles semi-local, qui est un groupe multiplicatif, et qui est le quotient des éléments inversibles dans les adèles, qui sont les idèles, divisés par  $\mathbb{Z}_S^*$ . Et enfin, c'est aussi isomorphe à ce que vous obtenez en prenant le groupe  $\widehat{C}_S$  et vous prenez son dual de Pontrjagin. Bien sûr vous savez, il est toujours vrai que lorsque vous prenez  $L^2$  d'un groupe localement compact, il est isomorphe au  $L^2$  de son dual de Pontrjagin. Vous pouvez donc le faire ici. Vous devez garder à l'esprit que vous avez trois espaces de Hilbert. Ils sont tous les trois isomorphes, mais les isomorphismes sont très significatifs et non triviaux. Et chaque fois que vous pensez à l'un d'entre eux, vous devez penser à sa signification. Puis, vous serez surpris par la traduction. Donc, ce qui joue le rôle absolument fondamental se déroule en fait dans le premier. Parce que vous pourriez dire "ok pourquoi considèrent-ils ces trois, euh, comment dire, ces trois incarnations, ces trois avatars du même espace Hilbert ?", eh bien... regardez le premier, qui est le quotient des adèles par  $\mathbb{Z}_S^*$ , il s'avère que la transformée de Fourier

**Fourier**  $\rightarrow$  **unitary in**  $L^2(X_S)$

In  $L^2(\widehat{C}_S)$  Fourier is inversion composed with multiplication by

$$u = \prod u_v$$

$u_v =$  ratio of local factors

11

définit l'unitaire dans cet espace. Quelle est la transformée de Fourier ?

**Semi-local adèle class space**

$$X_S := \left( \prod_{v \in S} \mathbb{Q}_v \right) / \mathbb{Z}_S^*$$

$$\mathbb{Z}_S = \{q \in \mathbb{Q} \mid |q|_v \leq 1, \forall v \notin S\}$$

9

Eh bien la transformée de Fourier, ce que vous faites c'est que vous prenez la transformée de Fourier sur chaque champ local  $\mathbb{Q}_v$  et ensuite, parce que le produit intérieur est en quelque sorte divisé par  $\mathbb{Z}_S^*$ , vous devez prouver, cela nécessite un peu de travail, que la transformée de Fourier passe au quotient. D'accord, vous pouvez le prouver. Mais la transformée de Fourier est vraiment le produit tensoriel de la transformée de Fourier à chaque place, et il est remarquable que cela passe au quotient. Alors ça passe au quotient, et quand ils sont dans le quotient,

1. The Hilbert space  $L^2(X_S)$  of functions on the quotient  $X_S := \mathbb{A}_S / \mathbb{Z}_S^*$  of the semi-local adèles  $\mathbb{A}_S$  by the group of units of the ring  $\mathbb{Z}_S$ .
2. The Hilbert space  $L^2(C_S)$  of functions on the semi-local idele class group  $C_S := \mathbb{A}_S^* / \mathbb{Z}_S^*$ .
3. The Hilbert space  $L^2(\widehat{C}_S)$  of functions on the Pontrjagin dual  $\widehat{C}_S$  of the locally compact group  $C_S$ .

10

alors ce que vous pouvez faire, c'est que maintenant vous pouvez jouer au jeu du passage d'un espace de Hilbert à l'autre et comprendre ce que cela devient. Maintenant je suppose que je n'ai pas besoin de rappeler le travail de Tate sur l'équation fonctionnelle locale. Alors, ce que Tate a

fait, il a montré que vous savez, si vous considérez un champ local, donc n'importe lequel des  $\mathbb{Q}_v$ , cela pourrait être  $\mathbb{R}$ , et si vous considérez la transformée de Fourier dans  $\mathbb{R}$ , pensons à propos de la transformée de Fourier et j'espère pouvoir vous apprendre quelque chose que vous ne savez pas mais c'est très bien connu, que si vous prenez la transformée de Fourier sur la ligne réelle, alors quand vous prenez la transformée de Fourier d'une fonction qui est mise à l'échelle, elle est mise à l'échelle par exemple par  $\varphi$ , d'accord, alors vous obtiendrez la même fonction, comme la transformée de Fourier de la fonction originale, sauf que vous redimensionnez de  $\frac{1}{\varphi}$ . D'accord, il y a un facteur de mise à l'échelle mais laissez-moi ignorer cela. Donc, si vous pensez à cela, vous réfléchirez et vous direz, d'accord, Qu'est-ce que ça veut dire ? Cela signifie que si je compose ma transformée de Fourier avec l'inversion de la variable, donc je remplace la variable  $x$  par  $\frac{1}{x}$ , alors ce qui se passe, c'est qu'après tout, si je redimensionne ma variable qui était à partir de, puis je compose l'inversion avec la transformée de Fourier, je remets à l'échelle par la même quantité. Qu'est-ce que cela dit, pour les algébristes fondamentaux ? Ça dit que le groupe de mise à l'échelle commute avec l'inversion composée à la transformée de Fourier. Mais le groupe de mise à l'échelle, quand vous considérez l'algèbre de von Neumann qu'il engendre, il engendre une algèbre abélienne de von Neumann maximale en  $L^2$ . Donc, si quelque chose commute avec la mise à l'échelle, alors il doit s'agir d'une mise à l'échelle. Eh bien, ça ne doit pas être la mise à l'échelle par un seul élément mais la mise à l'échelle par une convolution de mises à l'échelle. Alors quand on applique ça, on trouve que localement, pour chaque place  $v$ , la transformée de Fourier composée avec l'inversion est en fait donnée par une mise à l'échelle par une certaine fonction, et cette fonction a été étudiée par Tate, et cette fonction est le rapport des facteurs locaux. Alors maintenant, le miracle si vous voulez de l'espace des classes d'adèles semi-local est que la même chose est vraie lorsque vous prenez maintenant le produit fini de ces champs locaux, mais vous divisez par ce groupe, puis ce qui se passe, encore une fois

**Fourier**  $\rightarrow$  unitary in  $L^2(X_S)$

In  $L^2(\widehat{C}_S)$  Fourier is inversion composed with multiplication by

$$u = \prod u_v$$

$u_v =$  ratio of local factors

c'est que la transformée de Fourier composée avec l'inversion est en fait donnée, quand on passe au dual, donnée par une mise à l'échelle mais dans le groupe dual, la mise à l'échelle devient multiplication. C'est donc une multiplication par un produit de termes. D'accord. Alors c'est ce que nous avons. Et sans l'espace des classes d'adèles semi-local, vous obtiendriez un seul  $u_v$  mais vous n'obtenez jamais leur produit. Alors, comment utilisez-vous ce produit ?

**Trace of scaling in  $L^2(X_S)$**

$$\text{Tr}\left(\hat{h}\left(\frac{1}{2}u^*d^*u\right)\right) = \sum_{v \in S} \int'_{\mathbb{Q}_v^*} \frac{|w|^{1/2}}{|1-w|} h(w) d^*w$$

12

Vous utilisez ce produit car maintenant vous pouvez le combiner avec le calcul quantifié, et vous obtenez une formule pour la formule explicite de Weil, qui est maintenant exprimée dans les termes du calcul quantifié. Alors, quelle est cette formule ? Sur la deuxième ligne, vous avez les termes qui interviennent avec ces valeurs principales très précises dans la formule de Weil et ce que vous avez de l'autre côté. Et qu'avez-vous de l'autre côté, vous avez le même type d'expression dont je prétendais que nous avions un contrôle sur leur positivité ou sur leur négativité précédemment, à savoir que c'est une trace de la transformée de Fourier de la fonction  $h$  fois la différentielle quantifiée, ok il y a un facteur de  $\frac{1}{2}$ , ok, très bien, et quel est le  $u^*d^*u$ , c'est exactement l'expression que j'utilisais pour l'indice. Et quel est le  $u$ , eh bien le  $u$  est le 1 que nous avons avant,

**Fourier  $\rightarrow$  unitary in  $L^2(X_S)$**

In  $L^2(\widehat{C}_S)$  Fourier is inversion composed with multiplication by

$$u = \prod u_v$$

$u_v =$  ratio of local factors

11

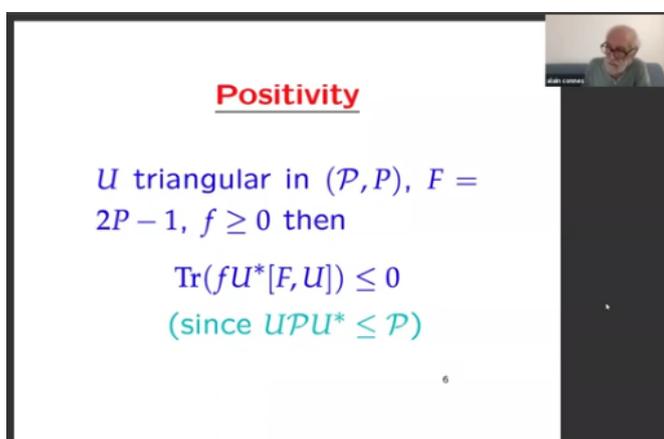
c'est le produit des  $u_v$ .

**Trace of scaling in  $L^2(X_S)$**

$$\text{Tr}\left(\hat{h}\left(\frac{1}{2}u^*d^*u\right)\right) = \sum_{v \in S} \int'_{\mathbb{Q}_v^*} \frac{|w|^{1/2}}{|1-w|} h(w) d^*w$$

12

Maintenant vous savez, c'est bien sûr la formule de trace semi-locale que j'avais prouvée dans mon article en 1998. Mais j'ai toujours été intrigué par le fait que cette formule de trace semi-locale vous donnait une somme sur les places. Pourquoi était-ce déroutant ? C'était déroutant car après tout, vous prenez le produit des  $\mathbb{Q}_v$ , le produit des champs locaux, donc lorsque vous prenez un produit de champs locaux, vous vous attendez à ce que la trace vous donne un produit, pas une somme. Alors pourquoi délivre-t-elle une somme ? Elle délivre une somme car ce  $u^* \bar{d}u$  est comme une dérivée logarithmique, vous voyez,  $u$  est un unitaire et quand vous prenez  $u^* \bar{d}u$ , vous êtes vraiment comme en train de calculer une dérivée logarithmique. Maintenant la dérivée logarithmique d'un produit, bien sûr, il faut faire attention car les choses ne commutent pas, mais c'est bon, je veux dire, vous pouvez jouer, quoi vous trouvez que la trace de ce produit fournit la bonne formule pour Weil mais elle a exactement le même aspect que ce que nous avons rencontré lorsque nous parlions de ces unitaires, à savoir exactement le même aspect que cette trace sur



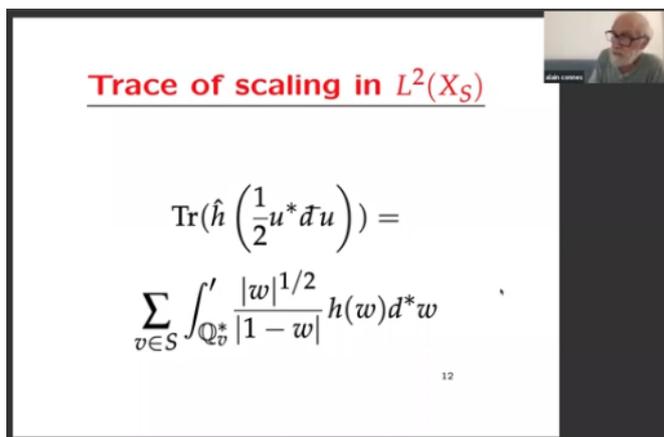
**Positivity**

$U$  triangular in  $(\mathcal{P}, P)$ ,  $F = 2P - 1$ ,  $f \geq 0$  then

$$\text{Tr}(fU^*[F, U]) \leq 0$$

(since  $UPU^* \leq P$ )

$f$  fois  $U^*[f, U]$  qui était négatif. Nous sommes donc très intéressés par cela dans le sens où



**Trace of scaling in  $L^2(X_S)$**

$$\text{Tr}\left(\hat{h}\left(\frac{1}{2}u^* \bar{d}u\right)\right) = \sum_{v \in S} \int_{\mathbb{Q}_v^*} \frac{|w|^{1/2}}{|1-w|} h(w) d^*w$$

cela montre clairement qu'il existe un lien entre la négativité de Weil que nous voulons prouver et la sorte de formules d'indice que nous connaissons très bien, en géométrie non-commutative, et qui, vous savez, entre directement lorsque vous regardez le calcul quantifié. Alors vous savez, on dirait, "d'accord, bien", et c'est en fait ce qu'on aurait dû essayer depuis le tout début. Après tout, ça aurait pu être les unitaires donnés par Tate, parce qu'après tout nous regardons le produit d'unitaires je veux dire, ça pourrait être triangulaire parce que nous devons les regarder un par un, car il est vrai qu'un produit de matrices triangulaires est triangulaire. Alors ok, vous pouvez regarder ce qui se passe

**Inner function**

$U \in L^\infty(S^1)$  is inner

$\Updownarrow$

$U =$  triangular unitary in  
 $L^2(S^1) = H^2(D) \oplus (H^2(D))^\perp$

13

qu'est-ce que cela signifie, que la matrice unitaire est triangulaire pour le calcul quantifié ? Et en fait, ce que vous découvrez, c'est qu'il existe une théorie existante, qui est due à Beurling et Hardy et à plusieurs autres personnes qui vous disent que si vous prenez une fonction qui est dans  $L^2(S^1)$  qui est unitaire, vous trouvez, c'est ce qu'on appelle une fonction intérieure si et seulement si l'unitaire correspondante est triangulaire dans la décomposition de  $L^2(S^1)$  selon le calcul quantifié naturel, et notamment qu'elle a à voir avec l'espace de Hardy pour le disque ( $H^2(D)$ ) et son complément orthogonal ( $(H^2(D))^\perp$ ). Bon alors c'est un exercice simple et je vous recommande de regarder dans le livre de Rudin et de comprendre le lien avec la positivité et tout ça. Tout est transparent quand on pense en ces termes. Alors d'accord, alors bien sûr, vous pouvez dire "OK, je vais essayer de voir,

**Archimedean place**

$u_\infty =$  ratio of archimedean local factors on the critical line :  $z = 1/2 + is$

$$u(s) = \frac{\pi^{-z/2}\Gamma(z/2)}{\pi^{-(1-z)/2}\Gamma((1-z)/2)}$$

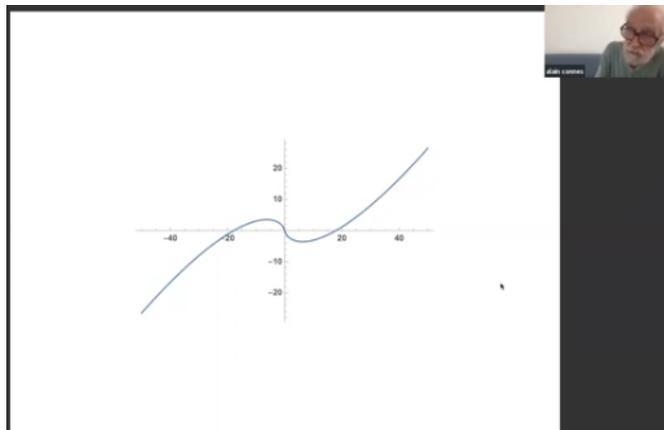
$\theta(s) =$  Riemann-Siegel angular function,

$$u(s) = e^{2i\theta(s)}$$

14

si, à l'endroit archimédien qui est la première chose dont vous avez besoin, s'il est vrai qu'il s'agit d'une fonction intérieure...". Alors, quelle est la fonction ? La fonction est le rapport des facteurs locaux selon Tate, donc ce rapport des facteurs locaux est le suivant. Le facteur local à l' $\infty$  est pi puissance moins  $z$  sur 2 fois gamma de  $z$  sur 2 et il faut diviser par ce que serait son complexe conjugué sur la droite critique, ce qui revient à remplacer  $z$  par  $1 - z$  (i.e.  $u(s) = \frac{\pi^{-z/2}\Gamma(z/2)}{\pi^{-(1-z)/2}\Gamma((1-z)/2)}$ ). Ceci est donc une fonction. Cette fonction au début, vous ne l'affichez que pour la droite critique, mais vous devez voir la droite critique comme une limite du demi-plan, et c'est la limite du demi-plan qui se trouve à sa gauche. Vous pouvez maintenant calculer cette fonction. Cette fonction n'est pas difficile à calculer et elle est donnée par le exponentielle de  $2i\theta s$  où  $e^{2i\theta(s)}$  où  $\theta(s)$  est ce que l'on appelle la fonction angulaire de Riemann-Siegel. Cette fonction angulaire de Riemann-Siegel est très importante car lorsque vous regardez la fonction zeta de Riemann sur la droite critique, ce n'est pas une vraie fonction. Pour en faire une vraie fonction

sans changer son module, il faut la multiplier par l'exponentielle de  $i\theta(s)$  où  $\theta(s)$  est la fonction angulaire de Riemann-Siegel et ici vous obtenez le double à cause de ce que j'ai dit auparavant. Eh bien, il pourrait y avoir un signe, d'accord. Maintenant, ce qui se passe, c'est que lorsque vous regardez cette fonction de Riemann-Siegel, elle a ce graphe,



vous découvrez que cela ne peut pas être une fonction intérieure, la précédente ne peut pas être une fonction intérieure car une fonction intérieure aurait une dérivée toujours du même signe, toujours positive. Donc, quand vous regardez cette fonction, vous découvrez que ce n'est pas le cas, Xian-Jin, vous savez, un très bon mathématicien chinois avait proposé une idée qui était liée à cela mais j'ai trouvé que cela ne pouvait pas fonctionner car cette fonction n'est pas monotone, d'accord, Xian-Jin Li. Alors ce qui s'est passé, c'est qu'alors vous dites "d'accord, c'est dommage, on ne peut pas utiliser ces unitaires triangulaires et tout ça."

**Archimedean place**

$u_\infty =$  ratio of archimedean local factors on the critical line :  $z = 1/2 + is$

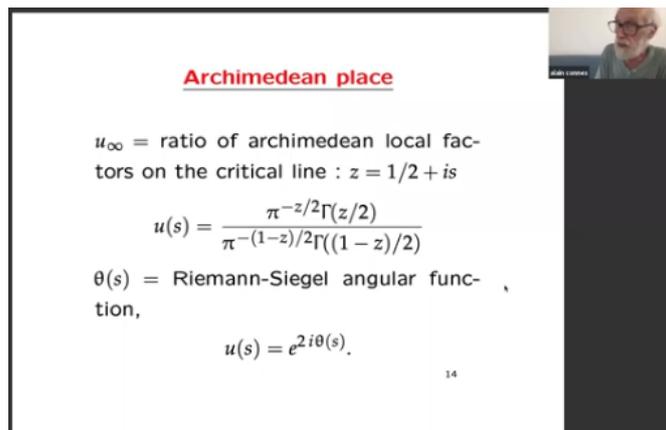
$$u(s) = \frac{\pi^{-z/2}\Gamma(z/2)}{\pi^{-(1-z)/2}\Gamma((1-z)/2)}$$

$\theta(s) =$  Riemann-Siegel angular function,

$$u(s) = e^{2i\theta(s)}.$$

14

Et ce que nous verrons, et c'est le sujet de mon discours aujourd'hui, c'est que heureusement, il existe une belle théorie des



**Archimedean place**

$u_\infty$  = ratio of archimedean local factors on the critical line :  $z = 1/2 + is$

$$u(s) = \frac{\pi^{-z/2} \Gamma(z/2)}{\pi^{-(1-z)/2} \Gamma((1-z)/2)}$$

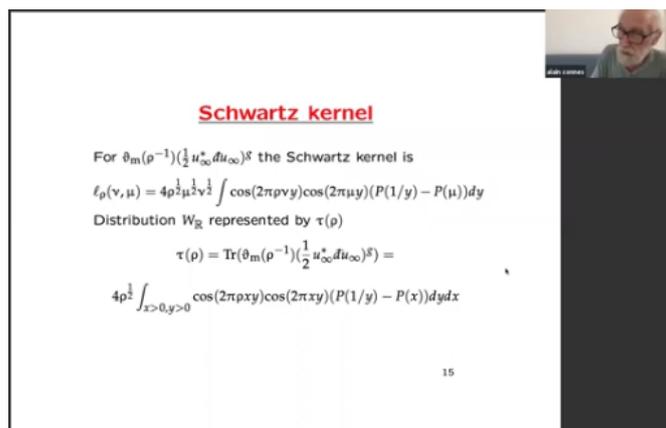
$\theta(s)$  = Riemann-Siegel angular function,

$$u(s) = e^{2i\theta(s)}.$$

14

fonctions quasi-intérieures, et avec cette théorie des fonctions quasi-intérieures, cela réparera le fait que cette fonction n'est pas intérieure. Et j'expliquerai que dans les deux papiers avec Katia en particulier dans l'article de juin, nous avons pu atteindre l'objectif de prouver cette positivité de Weil pour le lieu seul archimédien, ce qui bien sûr est très loin de l'objectif global, ou l'objectif du nombre fini qui suffirait, mais cependant, maintenant, nous avons vraiment la raison fondamentale pour laquelle la positivité de Weil devrait être vérifiée.

Pour montrer comment nous l'avons compris,



**Schwartz kernel**

For  $\theta_m(\rho^{-1})\left(\frac{1}{2}u_\infty^* d u_\infty\right)^g$  the Schwartz kernel is

$$\ell_\rho(\nu, \mu) = 4\rho^{\frac{1}{2}}\mu^{\frac{1}{2}}\nu^{\frac{1}{2}} \int \cos(2\pi\rho\nu y)\cos(2\pi\mu y)(P(1/y) - P(\mu))dy$$

Distribution  $W_{\mathbb{R}}$  represented by  $\tau(\rho)$

$$\tau(\rho) = \text{Tr}(\theta_m(\rho^{-1})\left(\frac{1}{2}u_\infty^* d u_\infty\right)^g) =$$

$$4\rho^{\frac{1}{2}} \int_{x>0, y>0} \cos(2\pi\rho xy)\cos(2\pi xy)(P(1/y) - P(x))dydx$$

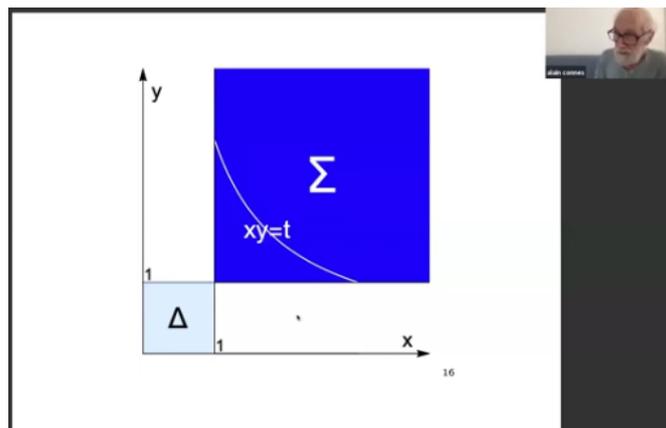
15

ce que nous avons fait dans le premier article, c'est parce que Katia a toujours insisté sur le fait que nous devrions toujours avoir à la fois une compréhension analytique et une compréhension géométrique, et si vous voulez obtenir la signification géométrique du calcul que je faisais en 1998, il faut passer à la géométrie non pas en regardant l'opérateur mais en regardant le noyau de Schwartz de cet opérateur. Donc, quand vous regardez ce qui se passe dans la formule de trace semi-locale, l'opérateur qui entre est l'opérateur, vous n'avez pas à comprendre en détails ce que c'est, c'est cet opérateur ici<sup>1</sup>. Voici la différentielle quantifiée<sup>2</sup>, et voici l'opérateur de mise à l'échelle<sup>3</sup>. Et vous regardez le noyau de Schwartz de cet opérateur, et vous pouvez le calculer. C'est un opérateur très malin. Et quand vous le calculez, ce que vous trouvez, tout d'abord, vous trouvez que vous pouvez re-prouver la formule de trace semi-locale en utilisant cet opérateur, nous sommes ici dans la place archimédienne, mais vous découvrez quelque chose qui est évident sur le plan visuel

<sup>1</sup>entourant  $\frac{1}{2}u_\infty^* d u_\infty$ .

<sup>2</sup>entourant  $\left(\frac{1}{2}u_\infty^* d u_\infty\right)^g$ .

<sup>3</sup>entourant  $\theta_m(\rho^{-1})$ .



car ce qui se passe, c'est que la différentielle quantifiée, quand on fait les choses géométriquement, il est donné par le commutateur avec la projection

**Schwartz kernel**

For  $\partial_m(\rho^{-1})(\frac{1}{2}u_\infty^* du_\infty)^g$  the Schwartz kernel is

$$k_\rho(\nu, \mu) = 4\rho^{\frac{1}{2}}\mu^{\frac{1}{2}}\nu^{\frac{1}{2}} \int \cos(2\pi\rho\nu y)\cos(2\pi\mu y)(P(1/y) - P(\mu))dy$$

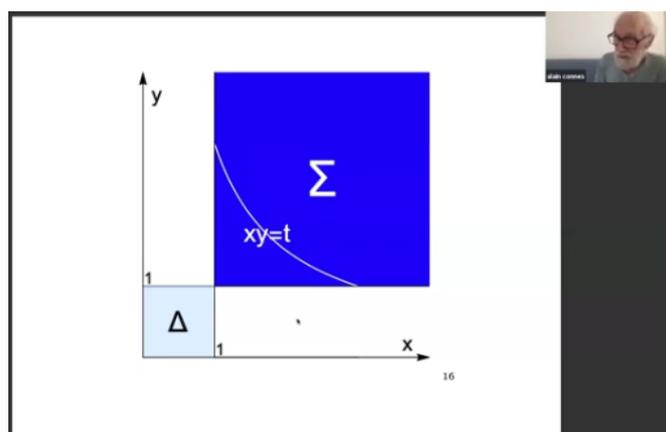
Distribution  $W_g$  represented by  $\tau(\rho)$

$$\tau(\rho) = \text{Tr}(\partial_m(\rho^{-1})(\frac{1}{2}u_\infty^* du_\infty)^g) =$$

$$4\rho^{\frac{1}{2}} \int_{x>0, y>0} \cos(2\pi\rho xy)\cos(2\pi xy)(P(1/y) - P(x))dydx$$

15

mais cette projection<sup>4</sup> n'est plus la transformation de Hilbert ou quelque chose de compliqué comme ça, c'est juste la projection sur les éléments qui sont plus grands que 1 (*il rit*). Donc, quand vous considérez le commutateur et quand vous faites un changement de variables, vous trouvez que



lorsque vous écrivez le commutateur, il ignorera les régions qui ne sont pas dans le petit carré et dans le grand carré. Et quand vous calculez ce qui se passe avec le grand carré, vous constatez que la positivité de Weil ou si vous voulez les choses que vous voulez sont évidentes, là, parce que vous pouvez les écrire en termes de projections et ainsi de suite. Et donc le nouveau sens est le petit

<sup>4</sup>entourant  $P(1/y)$

carré. Alors quand vous voyez ça géométriquement, vous êtes obligé de définir ce que nous appelons l'écart.

**Discrepancy  $\delta(\rho)$**

$$W_\infty := -W_R$$

$$\delta(\rho) := \text{tr} \left( \left( \theta_m(\rho^{-1}) - P\theta_m(\rho^{-1})P \right) \frac{1}{2} (u_\infty^* d u_\infty)^\delta \right)$$

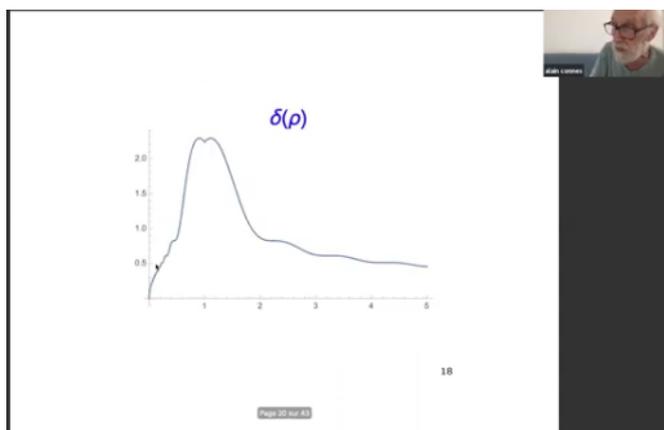
$$L(f) = D(f) + W_\infty(f),$$

$$D(f) := \int f(\rho^{-1}) \delta(\rho) d^* \rho$$

$$\rho > 1 \Rightarrow \delta(\rho) = 2\rho^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\text{Si}(2\pi(1+\rho))}{2\pi(1+\rho)} + \frac{\text{Si}(2\pi(\rho-1))}{2\pi(\rho-1)} \right)$$

17

L'écart est ce qui est dû au petit carré  $\Delta$  et vous pouvez écrire une formule pour cet écart, d'accord, vous n'avez pas à vous perdre dans la formule, mais l'écart est quelque chose qui est vraiment une fonction en fait, ce n'est même pas une distribution, on l'appelle  $\delta(\rho)$  et quand on définit la fonctionnelle qui est donnée par ce  $\delta(\rho)$ , nous avons pu la calculer, cette fonction, et pour  $\rho$  plus grand que 1, elle est donnée par une formule explicite. C'est donc une vraie fonction et le symbole que l'on voit ici<sup>5</sup> est appelé le sinus intégrale. C'est donc l'intégrale de 0 à  $x$  de  $\sin x$  sur  $x$  fois  $dx$  (c'est-à-dire  $\frac{\sin x}{x} dx$ ). Cela a du sens car il se comporte bien en 0 et c'est une fonction connue, vous pouvez l'avoir sur l'ordinateur sans aucun problème. Et quand vous tracez cette fonction parce que cette égalité avec le Si et ainsi de suite n'est vraie que pour  $\rho$  supérieur à 1 mais la fonction est symétrique. Si vous changez  $\rho$  en  $\rho$  inverse (i.e.  $\frac{1}{\rho}$ ), elle ne change pas, et son graphe est de cette forme.

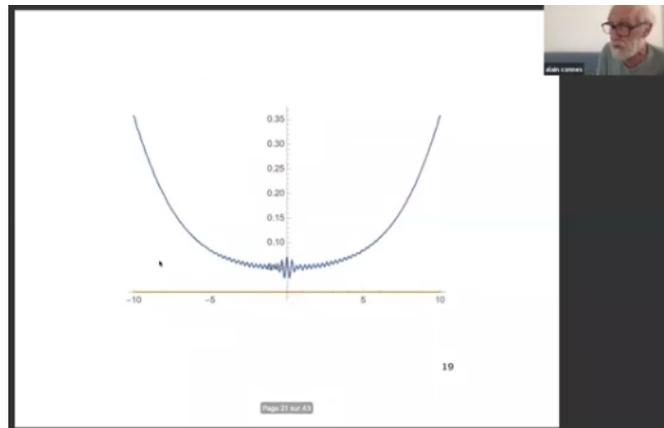


Vous obtenez une fonction qui a ce graphe. Et il s'avère que cette image particulière de ce graphe qui a cette singularité ici<sup>6</sup> jouera un rôle plus tard. Mais une fois que vous avez cette fonction, vous pouvez vous dire "oh mon Dieu !". Maintenant, ce qui se passe, c'est que théoriquement, nous pouvons prouver que si nous ajoutons la distribution de Weil à la place archimédienne, cette nouvelle distribution, ce nouveau  $D(f)$  devrait être positif. Bien. Que signifie être positif ? être positif signifie que lorsque vous passez à la transformée de Fourier, la transformée de Fourier est

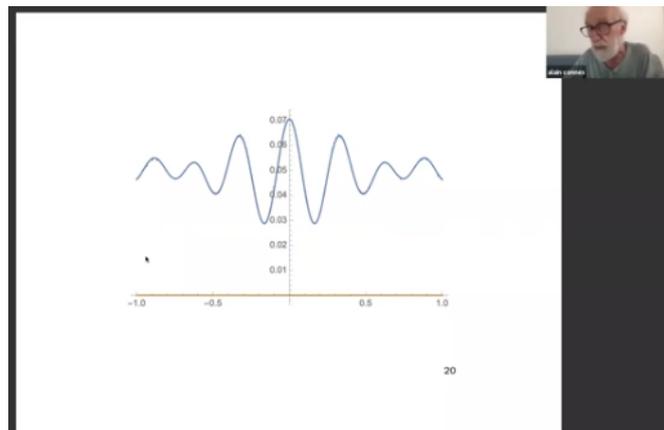
<sup>5</sup>dernière ligne, page 17.

<sup>6</sup>montrant une singularité pour  $x = 1$ .

une transformée positive, c'est tout ce que cela signifie. Alors ce que nous avons fait... Nous avons utilisé l'ordinateur ; avec l'ordinateur, nous avons calculé la transformée de Fourier de cette fonction  $\delta(\rho)$ , d'accord. Et nous avons essayé de voir si dans ce que nous avons obtenu, la dérivée de la fonction angulaire de Riemann-Siegel serait positive. Et voici le graphe que nous avons obtenu.

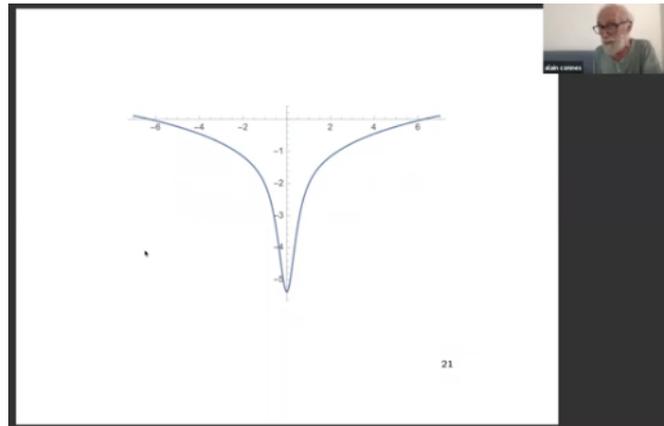


Quand vous voyez ce graphique, je l'ai appelé quelque chose comme les portes de l'enfer, ça, vous savez parce que regardez la valeur qui est ici<sup>7</sup>, c'est une très petite valeur, et elle doit être supérieure à 0. Et quand vous regardez, quand vous faites un zoom, pour voir ce qui se passe près de 0, c'est ce que vous voyez.

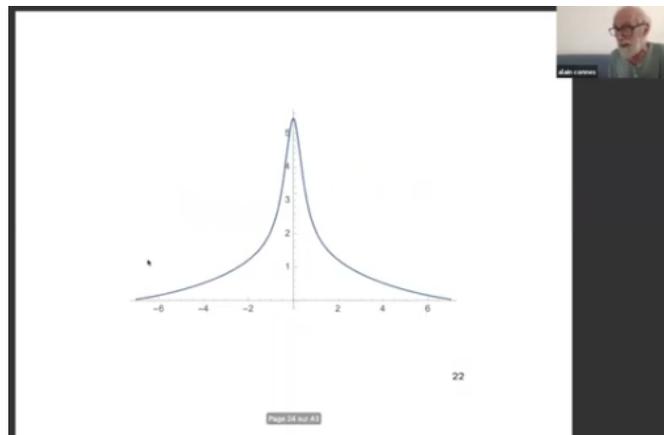


Vous voyez donc que la somme de ces deux choses, la somme de la dérivée de la fonction de Riemann-Siegel (deux fois la dérivée), plus cette fonction est en fait positive, mais il y a mieux pour ressentir ce qui se passe, vous prenez l'opposée de la fonction Riemann-Siegel, cela vous donne ce graphe

<sup>7</sup> montrant la valeur sur l'axe des  $y$ .



c'est un graphe qui est exactement comme ça. Et maintenant, quand vous regardez la transformée de Fourier de l'écart de cette fonction  $\delta(\rho)$ , c'est le graphe que vous voyez:



alors, (*rires*) cela signifie que ce graphique est presque... qu'il compense exactement la négativité de l'autre. Alors bien sûr, il faut prouver théoriquement que la somme est positive et ainsi de suite, c'est fait, pas de problème, et ensuite il faut contrôler cette fonction  $\delta(\rho)$ .

**$\delta(\rho)$  and quantum cell**

$\mathcal{P}$  cutoff projection  $\Lambda = 1$

$$\rho \geq 1 \Rightarrow \delta(\rho) =$$

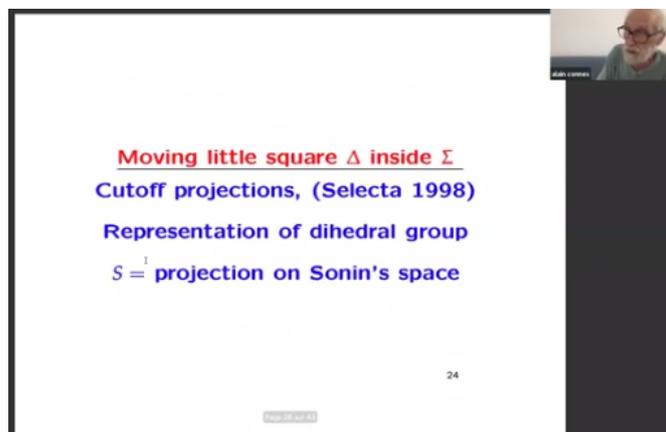
$$= \text{tr} \left( \vartheta_m(\rho^{-1}) \widehat{\mathcal{P}} \mathcal{P} \right)$$

23

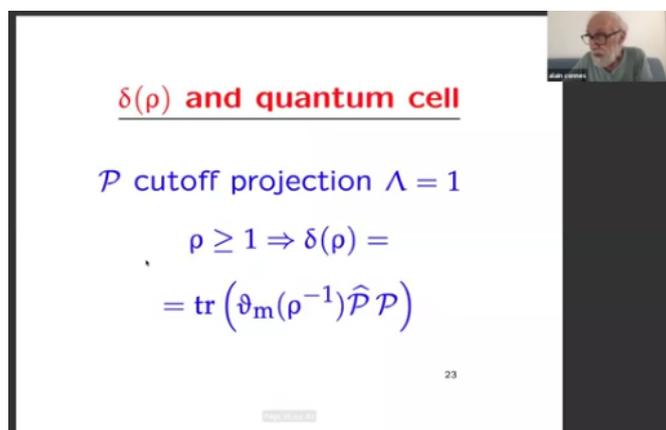
Or, ce que nous avons prouvé dans l'article de juin avec Katia, c'est que lorsque nous avons examiné cette fonction  $\delta(\rho)$ , c'est en fait lié à la cellule quantique, à savoir à quelque chose que j'avais défini dans mon article en 98 qui est la projection de coupure pour la valeur de la coupure qui est 1. Et donc pour  $\rho$  plus grand que 1, ce  $\delta(\rho)$ , cet écart, n'est en fait que la trace du rapport d'échelle

multiplié par  $\widehat{\mathcal{P}}\mathcal{P}$  où  $\mathcal{P}$  est la projection sur cette projection de coupure, et  $\widehat{\mathcal{P}}$  est la transformée de Fourier. D'accord.

Donc, si vous voulez, il y a tout un travail qui est fait, ce que nous avons fait dans ce papier, c'est la chose suivante, c'est-à-dire que lorsque vous avez une paire de projections, dans l'espace de Hilbert, eh bien, vous savez, vous vous sentez très bien. Parce qu'une paire de projections, c'est la même chose qu'une représentation du groupe diédral,



et les représentations des groupes diédraux, elles sont juste données... les représentations irréductibles sont données par un angle. Et de plus, pour ces projections de coupure dans l'article Selecta, j'avais utilisé la théorie qui était connue, qui est la théorie due à Slepian et à plusieurs autres personnes, qui vous permet de calculer cet angle, et de calculer les valeurs propres, ainsi cela vous permet de comprendre la situation. Mais dans la situation, il y a quelque chose d'étonnant qui se passe, c'est que lorsque vous regardez les projections  $\mathcal{P}$  et  $\widehat{\mathcal{P}}$ ,



dans  $L^2(\mathbb{R})$  prenons donc des fonctions paires, donc  $\mathcal{P}$  est une projection sur des fonctions qui ont un support entre -1 et 1, et  $\widehat{\mathcal{P}}$  est la transformée de Fourier, maintenant il s'avère que ce n'est pas vrai que  $\mathcal{P}$  et  $\widehat{\mathcal{P}}$  génèrent tout l'espace de Hilbert. Il existe un sous-espace orthogonal à la fois à  $\mathcal{P}$  et à  $\widehat{\mathcal{P}}$ . Ce sous-espace est bien connu, on l'appelle l'espace de Sonin et cet espace de Sonin est formé des  $\ell^2$ -fonctions qui s'annulent identiquement sur  $[-1, 1]$  et dont la transformée de Fourier s'annule aussi identiquement sur  $[-1, 1]$ . Et il est de dimension infinie. D'accord. Alors vous regardez, vous regardez, et que trouvez-vous ?

**Sonin space = kernel  $(U_\infty)_{22}$**

$S(1,1) \subset L^2(\mathbb{R})_{\text{ev}}$  be Sonin's space of even functions, which, together with their Fourier transform, vanish identically in the interval  $[-1,1]$ .

The image  $(\mathcal{F}_\mu \circ w)(S(1,1))$  of Sonin's space is the kernel of the operator  $(1 - \mathcal{P})U_\infty(1 - \mathcal{P}) = (U_\infty)_{22}$ .

25

Vous trouvez qu'en fait, cet espace de Sonin était déjà parfaitement là dans la décomposition de ce facteur local  $U_\infty$  dans le découpage du calcul quantifié, c'est-à-dire qu'il s'avère que cet espace de Sonin est juste le noyau du  $(U_\infty)_{22}$ . Je vous rappelle donc que si nous avions eu un opérateur triangulaire, le noyau de  $(U_\infty)_{22}$  aurait été une clé<sup>8</sup>, car  $(U_\infty)_{22}$  aurait été une co-isométrie et son noyau ici, il s'avère que c'est un simple exercice de démontrer que c'est exactement l'espace de Sonin.

**Strong form of Weil positivity**

Let  $g \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$  have support in the interval  $[2^{-1/2}, 2^{1/2}]$  and Fourier transform vanishing at  $\frac{1}{2}$  and 0. Then, with  $W_\infty := -W_{\mathbb{R}}$  one has

$$W_\infty(g * g^*) \geq \text{Tr}(\vartheta(g) S \vartheta(g)^*).$$

26

Et ce que nous avons prouvé avec Katia dans l'article de juin, c'est qu'il existe en fait une forme beaucoup plus forte de la positivité de Weil qui vous dit que lorsque vous prenez la fonctionnelle de Weil, que vous voulez prouver comme étant positive, et lorsque vous l'évaluez sur les éléments positifs  $g * g^*$ , alors elle s'avère être plus grande que, je veux dire dans certaines conditions aux limites, que la trace de  $\theta(g) \times$  l'espace de Sonin  $\times \theta(g)^*$ . Et bien sûr, le côté droit est évidemment positif. Mais la morale de l'histoire est que la racine de la positivité de Weil est donnée par l'espace de Sonin.

Je ne veux pas passer trop de temps car il m'en reste peu mais vous voyez, ce qui se passe, c'est que la preuve de cette inégalité est très très impliquée là-dedans dans le sens où la première chose que vous faites est

---

<sup>8</sup>?

1. Discretize the group  $\mathbb{R}_+^*$  by approximating it with  $q^{\mathbb{Z}}$ , where  $q \rightarrow 1^+$ .

2. Identify the approximating operator  $K_q$  used in 1. as a Toeplitz matrix and compute numerically its eigenvalues.

3. Apply the general theory of Toeplitz matrices to rewrite  $K_q$  in canonical form.

4. Guess a formula for the operator  $K$  independently of  $q$ , by comparing its approximate behavior for different values of  $q \rightarrow 1^+$ .

5. Construct a finite rank operator  $T$  that provides a good approximation of  $K$  on  $L^2(\sqrt{t}, d^*p)$  for  $I = [\frac{1}{2}, 2]$ .

6. Compute the spectrum of  $T$  and identify the single eigenvector which, after conditioning, makes the functional  $E \circ Q$  negative.

27

que vous utilisez la paire de projections pour déplacer le petit carré  $\Delta$  - et vous pouvez écrire une formule pour cet écart - dans le grand carré. Et puis vous trouvez que ce qui reste, c'est l'espace de Sonin. Et puis, quand vous travaillez avec ce qui reste, vous devez prouver l'inégalité, et pour prouver l'inégalité, ce que vous faites, c'est que vous utilisez une technique qui a beaucoup de sens conceptuel, c'est-à-dire que vous remplacez  $\mathbb{R}^*$ , d'abord en le discrétisant, en le remplaçant par  $q^{\mathbb{Z}}$ , et vous laissez  $q$  tendre vers  $1^+$ . Vous savez que c'est l'histoire de  $\mathbb{F}_q$  tendant vers  $\mathbb{F}_1$  et ainsi de suite. Mais alors, ce que vous découvrez, c'est que vous pouvez approximer l'opérateur que vous ne connaissez pas par un opérateur approximant qui dépend de  $q$  mais qui se trouve être une matrice de Toeplitz. Maintenant, par un heureux hasard, à l'époque où nous faisons ça avec Katia, je collaborais avec Walter, vous savez, sur la généralisation de la géométrie non-commutative à un modèle beaucoup plus large de l'espace d'opérateurs et tout ça, et nous devons nous focaliser en particulier sur les matrices de Toeplitz. J'ai donc appris la théorie des matrices de Toeplitz juste à ce moment-là, et il s'est avéré que cette théorie des matrices de Toeplitz était une sorte de théorie prêt-à-porter à appliquer dans notre cas avec Katia qui est que nous avons pu grâce à cette théorie générale des matrices de Toeplitz deviner à partir du cas de  $q$  tendant vers 1 quelle était la forme fermée d'un opérateur qui serait en fait effectivement de rang fini et qui serait une parfaite approximation de l'opérateur  $K$ . Je devrais dire aussi d'aussi loin que la puissance du calcul quantifié est concernée que le rôle de  $\Delta$  est un peu comme une différence infinitésimale entre Weil et quelque chose dont nous savons que c'est positif. Donc l'idée que les opérateurs compacts et les infinitésimaux jouent ici un rôle crucial car vous dites "bon d'accord, vous savez, si ce petit écart et ainsi de suite était nul, nous aurions terminé" ; nous n'avons pas fini mais nous avons affaire à quelque chose de compact. Alors d'accord, je ne veux pas trop entrer dans les détails mais alors ce que nous avons découvert si vous voulez

**Theory of Toeplitz matrices**

$T$  self-adjoint with simple largest eigenvalue  $\lambda_{\max}$ , then all zeros of polynomial with coeffs from eigenvector are of modulus 1 and

$$\lambda_{\max} \text{Id} - T = \lambda_{\max} \sum d(j)e(j)$$

28

Oui, je devrais dire un mot sur ces matrices de Toeplitz qui devrait vous en dire long, c'est que (*riant un peu*), il existe une sorte de version bébé de RH pour les matrices de Toeplitz qui est la suivante. Si vous prenez une matrice de Toeplitz auto-adjointe, et si vous prenez sa plus grande valeur propre, eh bien, supposons qu'elle est isolée, alors, il s'avère qu'il existe un polynôme associé au vecteur qui représente cette plus grande valeur propre. Et (*riant un peu*), c'est un théorème général un peu étonnant que tous les zéros de ce polynôme sont de module 1. C'est donc un fait que nous avons utilisé, dans notre travail avec Katia, pour approximer, pour trouver une limite lorsque  $q$  tend vers 1, et ainsi de suite.

Mais si vous voulez, la chose principale

**Quasi-Inner function**

$U \in L^\infty(S^1)$  is quasi-inner

$\Updownarrow$

$U =$  triangular unitary in  
the Calkin algebra for  
 $L^2(S^1) = H^2(D) \oplus (H^2(D))^\perp$

29

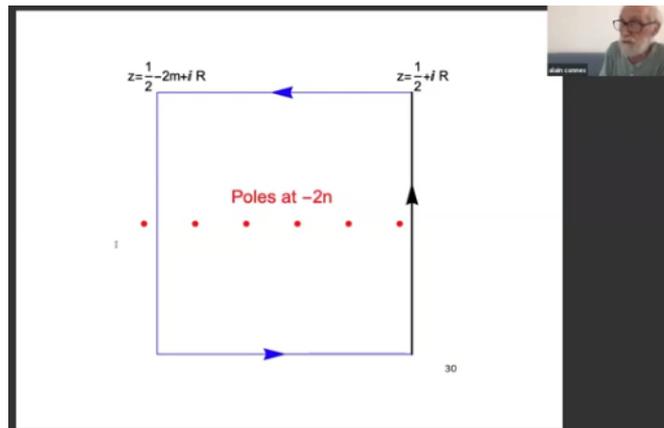
que nous avons découverte peut être encapsulée dans une définition générale. Ce que nous avons constaté, c'est qu'en fait même si cet unitaire  $U_\infty$  n'est pas une fonction intérieure, c'est une fonction quasi-intérieure au sens suivant, au sens où quand on regarde la matrice correspondante, la matrice unitaire, elle n'est pas triangulaire, mais lorsque vous regardez dans l'algèbre de Calkin, elle devient triangulaire. Maintenant (*riant*) je veux dire, si vous connaissez les opérateurs, cela signifie que l'opérateur de Haenkel correspondant est compact. Cela équivaut à dire ça. Maintenant (*rires*) bien sûr, cette fonction ne pouvait pas être intérieure, et elle ne pouvait pas être intérieure, parce qu'elle est définie par cette formule

**Theorem**

$$\rho_\infty(z) := \frac{\pi^{-z/2} \Gamma(z/2)}{\pi^{-(1-z)/2} \Gamma((1-z)/2)}$$

is quasi-inner relative to the left half-plane  $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \leq \frac{1}{2}\}$  with boundary the critical line  $\Re(z) = \frac{1}{2}$ .

et quand vous regardez cette formule, cette fonction a de nombreux pôles à l'endroit où elle devrait être holomorphe.



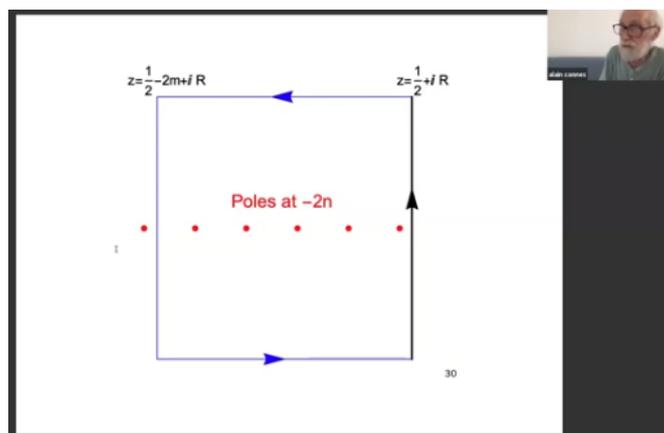
Cela ne peut donc pas être une fonction intérieure. Elle n'est pas holomorphe. Mais si vous travaillez dessus, si vous travaillez suffisamment sur elle, alors vous découvrez que vous pouvez utiliser la formule de Cauchy si vous voulez calculer les coefficients de Fourier négatifs qui devraient normalement être nuls si elle était intérieure. Alors vous faites ça. Vous utilisez la formule de Cauchy pour calculer ces coefficients de Fourier, et à l'aide de cette formule de Cauchy, ce que vous trouvez c'est qu'il y a une belle expression, une expression fermée, pour la partie qui devrait être nulle si la fonction était intérieure.

The off diagonal part  $(1 - \mathcal{P})\rho_{\infty}\mathcal{P}$  for the function  $\rho_{\infty}$  is the infinitesimal in  $L^2(S^1)$

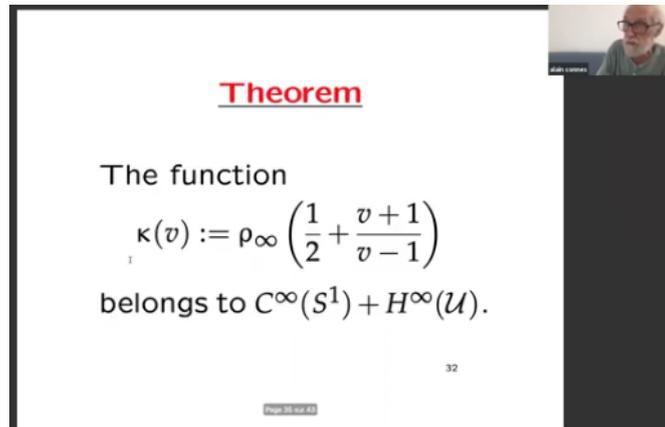
$$(1 - \mathcal{P})\kappa\mathcal{P} = \sum_N (-1)^{n+1} \frac{2\pi^{2n+\frac{1}{2}}}{(4n+1)\Gamma(n+1)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} |\xi_n\rangle\langle\eta_n|$$

using the unit vectors  $\xi_n := \xi_{x_n}/\|\xi_{x_n}\|$  and  $\eta_n := \eta_{x_n}/\|\eta_{x_n}\|$ , for  $x_n := 1 - \frac{4}{4n+3}$ .

Et regardez cette formule pour cet opérateur, je veux dire. Donc, l'opérateur est  $(1 - \mathcal{P})\kappa\mathcal{P}$  ( $\kappa$  c'est parce que j'ai changé la variable). Mais regardez la somme que je veux dire. Sur le côté droit, vous avez un opérateur de rang 1, qui est le Dirac bra et ket si vous voulez,  $\xi_n$  et  $\eta_n$  qui sont tous deux des vecteurs unitaires mais regardez le coefficient.



Le coefficient tend vers 0 à une vitesse fantastique, car c'est comme 1 sur  $\Gamma$  fois  $\Gamma$  (i.e.  $\frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\frac{1}{2})}$ ). D'accord, c'est un produit de deux fonctions gamma. Donc, cela ne vous dit pas seulement que c'est un infinitésimal, je veux dire, ça aurait pu être un infinitésimal décroissant comme une exponentielle, non, c'est un infinitésimal de décroissance incroyablement plus rapide, c'est microscopique, presque rien, d'accord. Alors maintenant la question qui se pose et j'arrive à la fin, la question qui se pose est "Que se passe-t-il...?" (en mettant une autre diapositive)



**Theorem**

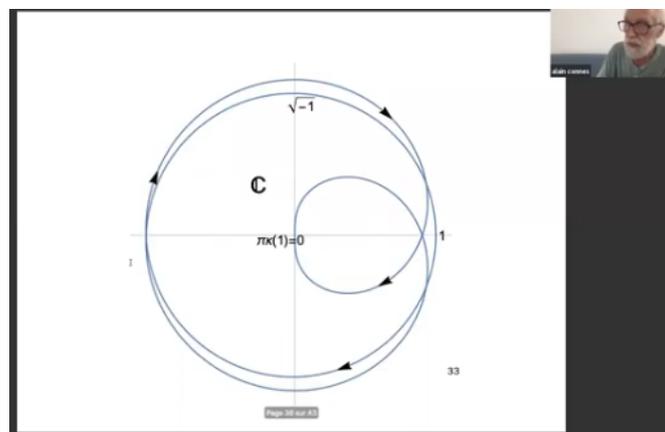
The function

$$\kappa(v) := \rho_\infty \left( \frac{1}{2} + \frac{v+1}{v-1} \right)$$

belongs to  $C^\infty(S^1) + H^\infty(\mathcal{U})$ .

32

En passant, je veux juste mentionner qu'il existe des théories générales sur les opérateurs de Haenkel et etc., et nous sommes capables de décomposer cette fonction comme une somme d'une fonction lisse et d'une fonction holomorphe. C'est bon, c'est connu de tout le monde, et ok, elle a une certaine forme.



The diagram shows the complex plane with a horizontal real axis and a vertical imaginary axis. Two circles are drawn: a larger one centered at the origin and a smaller one centered on the real axis. The origin is labeled  $\mathbb{C}$ . The point  $\pi\kappa(1)=0$  is marked on the real axis. The number 1 is marked on both the real and imaginary axes. The number  $\sqrt{-1}$  is marked on the imaginary axis. Arrows on the circles indicate a counter-clockwise direction. The number 33 is in the bottom right corner.

Mais la question évidente est "d'accord, tout ce que vous avez fait, c'est seulement pour la place archimédienne. Et alors que se passe-t-il dans le cas semi-local ?".

**Semi-local case**

Is the angle operator between the projections  $\mathcal{P}$  and  $\widehat{\mathcal{P}}$  compact ?

Is the analogue of Sonin's space

$$\{f \in L^2(X_S) \mid f(x) = 0 \ \& \ \mathbb{E}_\alpha f(x) = 0 \quad \forall x, |x| < 1\}$$

infinite dimensional ?

34

Et il y a deux questions évidentes. La première question, bien sûr, les projections  $\mathcal{P}$  et  $\widehat{\mathcal{P}}$ , elles continuent à exister. La première question est “est-il toujours vrai que l’opérateur d’angle entre les projections  $\mathcal{P}$  et  $\widehat{\mathcal{P}}$  soit compact ?” car si c’est vrai, vous pourrez imiter la méthode qui a été utilisée dans le cas archimédien. Et deuxième question, eh bien, il y a un analogue évident à l’espace de Sonin, c’est-à-dire que vous pouvez prendre des fonctions dans  $L^2(X_S)$  qui disparaissent dans l’intervalle unité, eh bien l’intervalle unité est un petit peu plus délicat à définir, il faut utiliser le module, et les fonctions dont les transformées de Fourier y disparaissent également, et c’est vrai que cet espace est de dimension infinie. Là, il n’y a que deux questions, là, devant nous. Et ce que nous avons prouvé avec Katia...

Au fait, les facteurs locaux pour les nombres premiers sont beaucoup plus simples que les facteurs locaux à la place archimédienne. Ils sont donnés par cette formule,

**Theorem**

The product of ratios of local factors

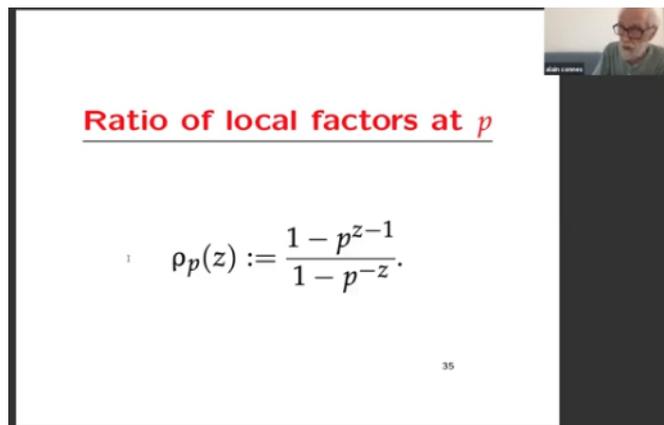
$$\rho_S = \rho_\infty \prod \rho_p$$

is a quasi-inner function relative to

$$\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \leq \frac{1}{2}\}$$

36

et le théorème que nous avons prouvé avec Katia, nous avons prouvé que si vous prenez un facteur local

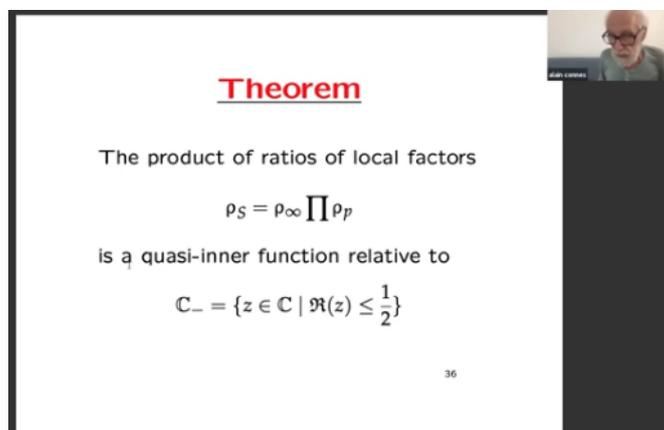


**Ratio of local factors at  $p$**

$$\rho_p(z) := \frac{1 - p^{z-1}}{1 - p^{-z}}.$$

35

à un premier, il n'est pas vrai que cette fonction soit quasi-intérieure. Alors c'est un point, quand vous voyez ça, vous vous dites "Oh mon Dieu, ils vont tout gâcher", non, ils ne le font pas, car quand vous prenez leur produit,



**Theorem**

The product of ratios of local factors

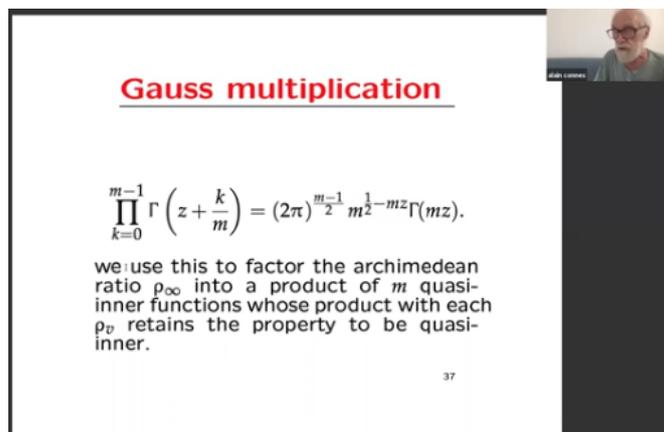
$$\rho_S = \rho_\infty \prod \rho_p$$

is a quasi-inner function relative to

$$\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \leq \frac{1}{2}\}$$

36

par les facteurs locaux à l'infini, donc si vous prenez le produit des facteurs locaux à l'infini par un nombre fini (de facteurs locaux) du rapport des facteurs locaux aux places finies, alors c'est une fonction quasi-intérieure. Et la manière dont on l'a prouvé est très rusée, car la non-commutativité de l'espace entre en jeu et le fait qu'elle entre en jeu advient dès que vous avez plusieurs nombres premiers. Si vous avez un seul nombre premier, pas de problème. Mais quand vous avez deux nombres premiers, ce qui se passe, c'est que lorsque vous regardez les pôles, le fait que les puissances de 2 peuvent être très proches des puissances de 3 (vous savez  $2^{19} \approx 3^{12}$ ), cela entre pour tout gâcher quand vous essayez de faire la somme sur les pôles. Donc, la manière dont nous avons prouvé ce théorème, nous avons utilisé le théorème de multiplication de Gauss



**Gauss multiplication**

$$\prod_{k=0}^{m-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{m}\right) = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} m^{\frac{1}{2} - mz} \Gamma(mz).$$

we use this to factor the archimedean ratio  $\rho_\infty$  into a product of  $m$  quasi-inner functions whose product with each  $\rho_v$  retains the property to be quasi-inner.

37

pour factoriser le rapport archimédien  $\rho_\infty$  en un produit de  $m$  fonctions quasi-intérieures qui ont à peu près le même goût que ce que vous obtenez pour  $\rho_\infty$  et ensuite, nous distribuons ces fonctions quasi-intérieures à chacun des nombres premiers et parce que le produit des fonctions quasi-intérieures est encore une fonction quasi-intérieure, nous obtenons le résultat.

**Theorem**

Semi-local Sonin's space is simply the kernel of the diagonal part  $u(S)_{22}$  for the quasi-inner function

$$u(S) = \prod_{v \in S} \rho_v$$

38

Donc je finirai avec deux assertions. La première assertion est que, vous savez, comme je le disais, il y a la définition de l'espace de Sonin semi-local, mais il s'avère (*riant*) que l'espace de Sonin semi-local est simplement le noyau de la partie 2, 2 de la fonction quasi-intérieure qui est définie par ce produit. Rappelez-vous que si l'unitaire était triangulaire, alors la partie 2, 2 aurait été une co-isométrie. Donc maintenant, c'est seulement quasiment cela, si vous voulez, comme ça, mais vous pouvez tout de même regarder ce  $u(S)_{22}$ . Il s'avère être l'analogue de l'espace de Sonin semi-local. Mais maintenant la question qui émerge est "okay, c'est bien, cet espace est-il de dimension infinie ?" Cela n'est pas évident du tout. Si l'unitaire était triangulaire, oui, mais il est seulement triangulaire dans l'algèbre de Calkin, et donc est-il vrai que ce noyau de ce  $u(S)_{22}$  est de dimension infinie ? Je finirai donc là-dessus. C'est ce que nous avons trouvé cet été et il s'avère que c'est une fonction remarquable qui va vers l'espace de Sonin, définie comme ci-dessus dans une colimite, dans un système inductif

**Inductive system of infinite dimensional spaces**

The kernels of the  $u(S)_{22}$  form an inductive system of infinite dimensional spaces.

Injective linear map  $S(u(S)) \rightarrow S(u(S'))$

$$D(S, S') = \prod_{p \in S' \setminus S} (1 - p^{-z})$$

39

et la fonction linéaire injective qui va lorsque vous augmentez l'ensemble des places, par exemple, si vous avez un premier, il y a une sorte de fonction complètement évidente (*presque en riant*) qui s'avère envoyer l'espace de Sonin pour  $S$  vers l'espace de Sonin pour  $S$  augmenté ( $S'$ ). Et cette fonction est simplement une multiplication par le produit des  $(1 - p^{-z})$ . Ce ne sont pas les facteurs

locaux, ce sont les espaces de Hilbert pour les facteurs locaux, pour les éléments qui n'appartiennent pas à  $S$  mais qui appartiennent à  $S'$ . Donc, si vous voulez, maintenant, nous sommes dans la situation avec Katia dans laquelle notre tâche est de pouvoir faire, pour le cas semi-local, ce que nous avons fait pour le cas local. Nous ne disons pas, vous savez, c'est faisable, ce sera certainement difficile, mais d'une manière ou d'une autre, nous avons les ingrédients analytiques prêts pour cela et ce que nous projetons de faire, c'est de mettre en action la partie géométrique, la partie géométrique qui était si précieuse dans le cas de la place archimédienne, car elle nous a donné la petite place, et la grande place, et elle nous a donné si vous voulez la compréhension de l'écart et le contrôle de l'écart, et ainsi de suite. Mais j'espère que je vous ai donné un avant-goût du fait que vous savez, le calcul quantifié, même si on pourrait essayer de le réduire au calcul, non, c'est beaucoup plus puissant, et il y a un lien incroyablement ténu entre ce calcul et le problème de Weil, simplement parce que la formule de l'équation fonctionnelle de Weil peut être si simplement et directement exprimée en termes de calcul quantifié.

Okay, je m'arrêterai ici.

*(Applaudissements virtuels).*