Conférence d'Alain Connes "Espace et symétries : de Galois au monde quantique", séance publique de l'Académie des Sciences, Conférence dans le cadre des défis scientifiques du xix^{e} siècle - Le 21 mars 2006.[1]

Edouard Brézin : Mesdames, messieurs, chers consoeurs, chers confrères, la série des conférences Défis scientifiques du 21e siècle nous permet cet après-midi d'accueillir Alain Connes. Sa conférence avait été programmée l'an passé mais un jour où l'électricité manquait et donc, nous avons attendu quelques mois avant de l'entendre sur le sujet qu'il a choisi (avec de l'électricité) qui s'appelle espace et symétrie de Galois au monde quantique. Chers confrères, vous avez peut-être remarqué parmi nous de jeunes visages, je les vois à droite, là-bas.

C'est une classe de première du lycée français de San Francisco qui a souhaité profiter d'un voyage à Paris pour rencontrer des scientifiques. Donc, c'est pour eux que je préciserai que Alain Connes est un mathématicien algébriste et géomètre, qu'il est le fondateur, en particulier, de la géométrie non-commutative, que ses travaux lui ont valu la plus haute distinction des mathématiques qui s'appelle la médaille Fields en 1982 et que vous permettrez au physicien que je suis de dire combien je me réjouis que son inspiration soit souvent venue de la physique. Cette conférence est retransmise sur le site internet de l'Académie grâce à une collaboration avec le Centre de communication scientifique directe de l'IN2P3 à Lyon et à ce propos je voudrais vous lire un courrier électronique qui a été adressé à Madame Meier, la responsable de notre Direction d'information scientifique et de la communication, qu'elle a reçu ce message il y a quelques jours, et je trouve qu'il justifie les efforts que nous faisons et que fait le CCSD pour retransmettre les conférences.

L'interlocuteur de Madame Meier lui écrit je tiens à vous dire merci pour la vidéo-conférence du professeur Denis Duboule que je viens de suivre, votre académie est formidable pour permettre cette transmission ad libitum en particulier aux médecins retraité que je suis dans un petit village Vosgien, Romont 88700. Je suis âgé de 70 ans, vous me donnez de magnifiques moments d'enseignement rompant ma solitude. Voilà qui justifie nos efforts. Alain Connes, la parole est à toi.

Alain Connes : Ok, donc, c'est assez difficile en mathématiques, si vous voulez, c'est pratiquement impossible heureusement, de prédire ce qui va se passer parce que, si vous voulez, les mathématiques justement évoluent vraiment par surprise, c'est à dire qu'essayer de justement, même de formuler des problèmes etc., ce serait une erreur. Par contre, ce que je vais essayer de faire, c'est de montrer en particulier pour les jeunes du lycée de San Francisco à quel point c'est un domaine ouvert, et pour cela, j'ai choisi si vous voulez deux espaces, qui sont assez faciles à expliquer de manière naïve, qui sont beaucoup plus difficiles à comprendre de manière sophistiquée. Et malgré tous les progrès qu'on a fait au XXe siècle, on peut dire, si vous voulez, que ces espaces on ne les comprend toujours pas. Donc les espaces en question, c'est l'espace-temps qui est vraiment à l'origine si vous voulez de l'idée même de géométrie, d'un côté donc, et bien sûr relié à la physique, mais faire une séparation, si vous voulez arbitraire, entre les mathématiques et la physique serait une erreur. Et l'autre, ça peut vous surprendre si vous voulez, c'est l'ensemble des nombres premiers. Je commencerai par l'ensemble des nombres premiers parce que j'essaierai de vous convaincre, à quel point

[1] Cette vidéo n'étant plus visionnable sur le site de l'Académie des Sciences à cette page https://www.academie-sciences.fr/archivage$_{s}ite/video/vdefi210306.htm$, on la retrouve là https://webcast.in2p3.fr/player/4ee6119165828, et je l'ai stockée là : http://denise.vella.chemla.free.fr/alain-connes-et-galois.mp4.

justement, c'est la géométrie de cet espace qui reste encore mystérieuse. Donc heureusement en mathématiques, on a des tests très très simples pour savoir si on comprend ou pas. Et si on regarde l'ensemble des nombres premiers, donc bon, vous pouvez dire "je comprends" (j'espère que vous savez ce que c'est qu'un nombre premier, c'est un nombre qui n'est pas divisé par d'autres nombres que 1 et lui-même). Donc voilà la liste des premiers nombres premiers, là, qui sont là, et alors la quantité qui intéresse les mathématiciens, c'est une quantité qui va varier avec n, qui va croître avec n, on sait qu'elle tend vers l'infini depuis Euclide c'est le nombre de nombres premiers qui sont plus petits ou égaux à un entier n. Alors vous entendrez des gens vous dire "oui, alors ce qui va pas avec cette quantité, mon prof. me l'avait dit lorsque j'étais en seconde, il m'avait dit il n'y a pas de formule qui donne cette fonction en fonction de n. Alors ça c'est complètement faux, il y a une formule, elle est due à un mathématicien français qui s'appelle Laurent, ça date d'environ 1850, et vous pouvez l'utiliser sur l'ordinateur, et l'ordinateur il va utilise,r c'est une formule qui est valable pour n plus grand que 5. On suppose qu'on sait calculer jusqu'à 5 la fonction π de n d'accord ? Bon. Alors vous pouvez l'utiliser etc., par contre, c'est pas une formule qui va vous donner des informations sur le comportement à l'infini, si vous voulez, de cette fonction $\pi(n)$.

Alors ce comportement à l'infini de la fonction $\pi(n)$, la manière dont elle se comporte, il avait été deviné par Gauss qui l'avait rappelée à un astronome, Encke, lorsqu'on la lui avait demandée. Donc il l'avait devinée vers le début du XIXe siècle qu'en fait si vous voulez, cette fonction $\pi(x)$, d'accord, eh bien, elle était, en fait, très très bien approximée par ce qu'on appelle le logarithme intégral, donc le logarithme intégral, c'est intégral de 0 à x de du sur log de u

$$\mathrm{Li(x)} = \int_0^{\mathrm{x}} \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{log(u)}}.$$

Oh ! Si vous êtes mathématicien, vous pouvez avoir quelques frayeurs lorsque u vaut 1 dans l'intégrale, mais ça s'arrange bien. Et le terme que vous avez à droite, vous voyez, ce n'est absolument pas une série convergente puisque vous avez une factorielle qui est devant, mais c'est le prototype de ce qu'on appelle des séries asymptotiques, c'est à dire, ce sont des séries qui donnent des résultats numériquement extrêmement valables lorsqu'on s'arrête aux plus petits termes de la série typiquement.[2]

D'accord. Alors en fait, donc, je disais, on a des tests en mathématiques pour savoir si on comprend ou pas, et ces tests s'appellent des conjectures. Donc si vous voulez, il y a des problèmes centraux en mathématiques, il y a des problèmes qui sont là simplement pour être des espèces de bornes kilométriques, qui vous indiquent si vous comprenez ou pas. Ou vous en êtes dans votre compréhension. Et un des problèmes les plus centraux des mathématiques, ça ne va pas vous paraître central quand je l'énonce comme ça mais on va voir pourquoi il est central, c'est ce qu'on appelle la conjecture de Riemann. Et c'est une conjecture qui vous dit, si vous voulez, que lorsque vous écrivez cette formule, c'est à dire, on va voir au niveau du graphe, ce que ça donne, donc vous pouvez faire un graphe qui vous donne ce que vaut la fonction $\pi(x)$ avec l'ordinateur et ce que vaut la fonction logarithme intégral. Vous pouvez tracer ces deux graphes, et lorsque vous tracez ces deux graphes, la fonction $\pi(x)$ c'est une fonction en escalier parce que elle va croître de 1 chaque fois que vous passez à travers un nombre premier, d'accord, donc c'est cette fonction en escalier comme ça. Et la fonction logarithme intégral, c'est la fonction qui est parfaitement

[2] l'approximation écrite au tableau est : $\mathrm{Li}(x) \sim \sum (k-1)! \frac{x}{\log(x)^k}$.

régulière, c'est le graphe qui est parfaitement régulier qui est au-dessus, d'accord. Alors on peut s'amuser, bien sûr, à regarder la différence entre les deux, et c'est sur la différence entre les deux que porte cette fameuse conjecture de Riemann, qui vous dit qu'en fait la différence entre les deux elle est de l'ordre de la racine carrée de x, d'accord, donc on prend la racine carrée de x et on la multiplie par logarithme de x mais enfin en gros, ça vous dit que si vous voulez, c'est un ordre qui vient en fait du théorème de limite centrale de Gauss, justement, c'est à dire qui est entièrement probabiliste. Et d'ailleurs, je veux dire, au début, les gens avaient pensé que cette fonction serait toujours négative mais en fait on sait depuis Littlewood qu'elle change de signe une infinité de fois. Donc vous voyez, les apparences sont trompeuses, on pourrait croire que cette fonction va continuer à décroître indéfiniment. Mais par contre le nombre à partir duquel, et les nombres sur lesquels elle va croiser la droite réelle etc., on ne les connaît toujours pas donc on sait qu'elle va changer de signe une infinité de fois, mais on est dans ce genre de situation.

Donc alors, ce problème, donc si vous voulez, de l'estimation de la fonction $\pi(x)$, en fait, c'est un problème extrêmement intéressant parce qu'au lieu d'être un problème qui est formulé seulement sur la taille du reste, en fait, c'est un problème qui est une conjecture si vous voulez. En fait ce qu'on appelle hypothèse de Riemann, parce que Riemann faisait une hypothèse, et c'était une hypothèse sur les zéros d'une certaine fonction. Cette fonction, elle remonte à Euler, et c'est une fonction qui vous dit **en un mot** ce que c'est qu'un nombre premier. Voyez la formule qui est ici, qui écrit une somme infinie avec l'exposant $-s$, des nombres entiers, comme un produit donc on écrit une somme comme un produit, eh bien cette formule, elle ne marche exactement que pour l'ensemble des nombres premiers. C'est à dire que cette formule elle équivaut à dire que tout nombre entier se décompose de manière unique en produit de puissance de nombres premiers, elle est exactement équivalente à ça. Alors il se fait, ça si vous voulez, ça a été démontré par plusieurs mathématiciens, mais Riemann en particulier, que cette fonction elle a un prolongement, ce qu'on appelle un prolongement analytique, c'est à dire que c'est pas seulement une fonction qui, a priori elle serait définie seulement pour s un nombre réel plus grand que 1 parce qu'à ce moment-là, la série converge ; en fait, elle est définie lorsque s est un nombre complexe, et pas seulement un nombre complexe de parties réelle plus grande que 1, il suffit que ce nombre complexe soit différent de 1. Et donc, elle définit en fait une fonction dans le plan complexe, et l'hypothèse de Riemann dit la chose suivante donc : il dit que les seuls zéros de cette fonction sont situés sur ce qu'on appelle la droite critique c'est à dire, voyez, dans le plan complexe, il y a le point 0, il y a le point 1, et puis à la droite verticale qui passe par le point $\frac{1}{2}$. Eh bien, alors, on peut calculer, les gens ont calculé des milliards de zéros, et pour le moment tous les zéros qu'ils ont calculés ont la propriété si vous voulez que leur partie réelle vaut $\frac{1}{2}$. Ce sont les zéros non triviaux bien sûr, d'accord, alors pourquoi est-ce que ça s'est relié au comportement des nombres premiers. Eh bien parce que Riemann a démontré dans son article en fait il a démontré une formule, qui est l'ancêtre de ce qu'on appelle les formules explicites. Donc la formule explicite de Riemann, c'est une formule qui va calculer cette fonction $\pi(x)$. C'est assez extraordinaire, si vous voulez, qu'il y ait une formule qui calcule cette fonction $\pi(x)$. Alors en fait, on peut simplifier un peu, Riemann introduit une fonction qui est un tout petit peu plus simple, mais à partir de laquelle vous pouvez facilement calculer la fonction $\pi(x)$ par la formule d'inversion de Möbius. Donc il y a une autre fonction qu'on appelle $\pi'(x)$ qui est un tout petit peu plus simple parce qu'on la régularise en rajoutant à $\pi(x)$ un demi de π de la racine de x plus un tiers de π de la racine cubique de... et ainsi de suite ; ça va s'arrêter au bout d'un moment, d'accord, parce que ça sera zéro au bout d'un moment. Donc en fait, ce que démontre Riemann, c'est qu'il y a un lien direct entre la fonction $\pi(x)$ ou plutôt cette petite variante de la fonction $\pi(x)$ et le logarithme intégral. Donc ce qu'il dit, si vous voulez, c'est que Gauss avait raison, le terme principal, c'est le logarithme intégral de x, mais à ce logarithme intégral de x, il faut rajouter une somme et c'est la somme sur les zéros qu'on a vus tout à l'heure. Alors vous voyez bien que selon ou non que les zéros vont être de partie réelle égale à $\frac{1}{2}$, on va avoir exactement la taille, le comportement à l'infini, du reste qui est ici. C'est à dire que ce qui serait embêtant, ce serait d'avoir dans l'image précédente, et ça, on ne sait toujours pas si c'est vrai ou pas, ce qui serait très embêtant si vous voulez c'est d'avoir non pas un point on sait qu'il y a une certaine symétrie qui se produit, et il pourrait que très très très très très très haut, si vous voulez, dans cette bande là au lieu d'avoir un zéro sur la droite partie réelle égale à $\frac{1}{2}$, en fait on aurait un couple de zéros qui serait symétriques par rapport à cette droite. Si on avait un tel couple de zéros, eh bien à ce moment-là, on n'aurait pas du tout le comportement asymptotique avec le reste qui était en racine de x. Alors donc tout ça, c'est contenu dans un papier extrêmement court de Riemann, qui fait environ quatre-cinq pages, et dans lequel il commence si vous voulez par donner deux démonstrations différentes de ce qu'on appelle l'équation fonctionnelle de la fonction ζ.

Donc c'est un papier visionnaire, vraiment, et on peut dire si vous voulez qu'une grande partie, pas tous bien sûr mais qu'une grande partie des mathématiques du XXe siècle a été sans le dire orientée par cette conjecture de Riemann. Alors, il y a eu bien sûr des résultats, c'est à dire qu'en général, si vous voulez, donc, on peut bien sûr amoindrir considérablement l'énoncé, et on obtient à ce moment-là ce qu'on appelle le théorème des nombres premiers, qui a été démontré par Hadamard et de la Vallée-Poussin, donc au début du XXe siècle. Alors que dit ce théorème ? Eh bien, il dit qu'en fait, vous vous rappelez qu'il y avait cette formule asymptotique pour la fonction logarithme intégrale et que la formule asymptotique, elle commençait précisément par x sur log de x. Alors en fait, ça, c'est êmement intéressant parce que qu'est ce que ça vous dit ? Ça vous dit que si vous comptez le nombre de nombres premiers qui sont plus petits qu'un entier donné, vous prenez cet entier et vous le divisez par en gros son nombre de chiffres, vous voyez, le logarithme d'un nombre, c'est le nombre de chiffres de ce nombre, il faut le multiplier par deux virgule quelque chose etc.[3]. Mais donc, ça vous donne un énoncé extrêmement précis sur le comportement moyen de la fonction $\pi(x)$, ça vous dit que la probabilité que vous avez, si vous cherchez un nombre - je ne sais pas moi - de 15 chiffres par exemple, savoir si oui non il est premier, eh bien, c'est exactement l'inverse du nombre de chiffres, d'accord, avec un facteur correctif, comme je l'ai dit, puisqu'il faut prendre le logarithme à base e ce qu'on appelle logarithme népérien, et non pas le logarithme à base 10, qui serait le nombre de chiffres. Alors en fait, donc, ce théorème est dû à Hadamard et de la Vallée-Poussin, et si vous savez faire un petit exercice de faire une soustraction, vous verrez qu'au début des années 60, les gens pensaient que le fait qu'ils avaient démontré le théorème des nombres premiers les avait rendu immortels. Vous verrez que Hadamard a vécu 98 ans et de la Vallée-Poussin 96. Alors en fait, si vous voulez, la manière dont ils démontraient ce théorème, qui est le théorème des nombres premiers, il le démontrait grâce à la fonction ζ pour Hadamard, grâce à la fonction ζ de Riemann. Et on peut dire la démonstration, en fait, en un mot, c'est une démonstration d'une simplicité vraiment étonnante. En fait donc ce que démontre Hadamard, il démontre que la fonction ζ n'a pas de zéro, alors ce qu'on voudrait, c'est qu'elle n'ait pas de zéro en dehors de la droite critique que je vous ai montrée tout à l'heure, mais ce que démontre Hadamard, c'est que cette fonction, vous voyez, n'a pas de zéro sur la droite qui est ici, la droite

[3] La constante e

de partie réelle égale à 1, par symétrie, elle n'a pas non plus zéro sur la droite ou par la partie réelle est nulle, c'est à dire où le nombre est imaginaire pur. Et comment est-ce que Hadamard fait cette démonstration, comment est-ce qu'il fait cette démonstration, eh bien l'essentiel de la démonstration est contenu dans l'observation suivante : il démontre que si la fonction avait un zéro en un point de la forme $1 + is$, à ce moment-là, elle aurait un pôle, c'est-à-dire elle serait infinie, au point $1 + 2is$, d'accord. Et la démonstration, elle tient en une ligne, c'est ce que je disais tout à l'heure, c'est à dire en fait on voit assez facilement que si la fonction avait un zéro, en prenant son logarithme, tous les nombres premiers élevés à la puissance $-is$ se concentrerait sur le point -1, de manière probabiliste, et ça, ça implique immédiatement que lorsqu'on prend leur carré, ils se concentreraient sur le point 1, et ça ça implique immédiatement que la fonction ζ serait infinie, au point correspondant, donc c'est comme ça que Hadamard démontre le théorème des nombres premiers, et si vous voulez, en fait, bon, on sait que les termes successifs dans le développement asymptotique sont les bons, mais bien sûr, c'est extrêmement loin, de savoir, où sont situés les zéros.

Alors en fait devant un problème qui est très difficile il y a une technique, une stratégie, qui est complètement générale, qui ne s'applique pas à un problème particulier, mais qui s'applique en général. Donc lorsque les mathématiciens font face à un problème qui est très difficile, il y a une stratégie générale, qui est en plusieurs étapes : le premier pas de la stratégie consiste à généraliser le problème, d'accord. Donc on vous donne par exemple un problème de..., formulé en termes de chiffres, tout à fait concret : le fait que le problème soit formulé de manière concrète en général n'est pas un avantage du tout parce que le premier pas, c'est d'arriver à en comprendre, si vous voulez, la position conceptuelle. Donc pour ça, le premier pas consiste à le généraliser. Et une fois que le problème a été généralisé de manière suffisamment souple si vous voulez, le pas suivant, ça consiste à arriver à le spécialiser dans un cas qui est suffisamment simple pour qu'on puisse le résoudre. Donc on introduit, si vous voulez, une espèce de variabilité dans le problème. On a un problème qui est tout à fait spécifique, on commence par le généraliser, et ensuite on le spécialise à un cas qui est plus simple, mais qui est plus facile à comprendre et si possible on résout donc un cas simple de la généralisation. Et la troisième étape qui est absolument en général la plus difficile si vous voulez elle consiste à essayer de comprendre les idées qui gouvernent le cas plus simple, et à essayer de les transplanter, sans les faire périr, bien entendu, je veux dire. Cette idée de transplantation a été le mieux illustré je crois par Oka au niveau de la terminologie etc. Donc on prend une idée, et on essaie, si vous voulez, de la transplanter sans la détruire du cas le plus simple au cas le plus compliqué. Alors dans le cas de la fonction ζ, vous m'excuserez si je rentre dans des choses un peu techniques, mais je pense qu'il faut essayer de regarder avec une certaine distance, et on va voir donc si vous voulez, dans cet exemple, ce qu'ont fait les mathématiciens pendant le XXe siècle ; ensuite, on passera à l'espace-temps. Donc cette manière, si vous voulez, qu'on avait, de généraliser le problème dans le cas de la fonction ζ, donc, les mathématiciens se sont aperçus que le problème, donc formulé par Riemann si vous voulez, c'était un problème qui pouvait se formuler de manière très très simple, en termes de ce qu'on appelle le corps des nombres rationnels. Donc je suppose que vous avez tous appris les fractions, vous avez appris que qu'on pouvait les ajouter, qu'on pouvait les multiplier, qu'on pouvait les inverser si elles n'étaient pas nulles : c'est ça qu'on appelle un corps, d'accord. Et il se fait si vous voulez que le corps des nombres rationnels, donc, il engendre ce problème de la fonction ζ, mais ce corps des nombres rationnels, les propriétés particulières qui font qu'il engendre le problème de la fonction ζ, on a réussi à les abstraire et c'est ce qu'on appelle un corps global.

Alors ça, c'est pour la première étape. Donc on a compris dans la première étape, si vous voulez, que le problème formulé par Riemann se généralise de manière très, très simple en partant non pas seulement du corps des rationnels, mais d'un corps global. Alors parmi les corps globaux, il y a des corps qui sont encore plus compliqués que les rationnels, par exemple lorsque vous regardez ce qu'on appelle les nombres algébriques, c'est à dire vous regardez par exemple $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, ou $\mathbb{Q}(i)$, etc. Et puis il y a des corps qui sont quand même relativement plus simples que le corps des rationnels, et c'est ce qu'on appelle les corps de fonctions sur une courbe. Alors, je vais vous expliquer ce que c'est. Et en fait, donc, si vous voulez, dans le troisième pas, donc ça, ce sera le deuxième pas, c'est arriver à spécialiser à un cas plus simple et le troisième pas, c'est qu'on verra que les idées qui marchent dans le cas plus simple, ce sont des idées géométriques, d'accord. Ce sont des idées géométriques essentielles. Alors quelles sont, donc, quand je parle de corps de fonctions, qu'est ce que ça veut dire ? Ça veut dire que vous prenez des fonctions donc comme $f(x)$ si vous voulez, mais des fonctions rationnelles et ces fonctions rationnelles au lieu d'avoir, si vous voulez, des coefficients qui sont des nombres ordinaires, elles ont des coefficients qui sont dans ce qu'on appelle un corps fini. Alors les premiers corps finis ont été découverts par Gauss et ils sont êmement simples à expliquer. Donc un corps fini, le plus simple que vous connaissez, c'est les entiers modulo 2, vous voyez, si vous regardez un entier modulo 2, vous pouvez les encore les additionner, vous pouvez encore les multiplier, et puis si un entier modulo 2 n'est pas nul, eh bien, c'est le nombre 1, donc il est inversible. Alors ça, c'est un corps. On a aussi le corps des entiers modulo p lorsque p est un nombre premier, mais en fait, il y a un seul article de Galois qui a été publié de son vivant, il a été publié dans le Bulletin de la société mathématique, donc de son vivant, il a publié un article et dans cet article, il a en fait classifié, si vous voulez, ce qu'on appelle les corps finis. C'est à dire qu'on connaît exactement la liste de tous les corps qui ont un nombre fini d'éléments alors ces corps qui en ont un nombre fini d'éléments, on pourrait croire naïvement que ce sont seulement les corps des entiers modulo un nombre premier p, ça n'est pas vrai, et par exemple typiquement, et vous avez des gens qui ne connaissent pas bien, si vous voulez, et lorsque vous allez leur dire vous regardez le corps F_4, ils vont croire que c'est les entiers modulo 4 et vous voyez, si vous prenez les entiers modulo 4, ce n'est pas un corps, pourquoi ? Parce que si vous prenez le nombre 2, il n'est pas nul et si vous prenez 2×2, ça fait 4 donc ça vaut 0. Et ce n'est pas un corps parce que dans un corps, ça, ça ne peut pas se produire : si vous prenez deux éléments non nuls, comme chacun d'entre eux est inversible, leur produit ne peut pas être nul, d'accord.

Donc, il y a un corps non trivial que Galois a trouvé bien sûr et qui est obtenu en rajoutant au corps à deux éléments, qui lui est on ne peut plus simple, la racine cubique de l'unité. Donc vous rajoutez un nombre j et ce nombre il vérifie $j^3 = 1$. En fait, il vérifie $1 + j + j^2$ est égal à 0. Donc vous écrivez les relations etc. et ce que démontre Galois, dans son article, il démontre deux choses ; d'abord il démontre, ça c'est remarquable, si vous voulez, que si vous prenez une équation polynomiale quelconque à coefficient dans un corps F_q, elle se résout dans un corps F_{q^n} ; c'est à dire que pour chaque puissance d'un nombre premier, il y a un seul corps à isomorphisme prés ; on ne sait pas encore les construire de manière canonique c'est ça qui est absolument incroyable, je veux dire, il y a encore un problème sur ces corps-là, c'est qu'on ne sait pas les donner de manière explicite, on sait les donner de manière artificielle. Mais il n'y en a qu'un seul qui a la bonne cardinalité. Et en plus, donc, ce que fait Galois, c'est... : ce que fait Galois, je ne vais pas l'expliquer, je vais expliquer en un mot plutôt ce que c'est que le groupe de Galois donc Galois, si vous voulez, avait compris une théorie qu'il appelle la théorie de l'ambiguïté on y reviendra.

Et dans cette théorie, qui est la théorie de Galois, ce qu'il fait, c'est : il comprend que les nombres en général sont ambigus, c'est-à-dire que lorsqu'on définit un nombre, par exemple comme $\sqrt{2}$, d'accord, eh bien on crée une ambiguïté entre les deux possibilités, entre plus ou moins racine de 2[4], et Galois a compris, si vous voulez, que c'était la réduction de l'ambiguïté qui intervenait dans la résolution des équations de manière très naïve, et il a défini un groupe, qu'on appelle le groupe de Galois bon j'ai fait une conférence à la BNF au mois de juin, donc on pourrait passer une heure là-dessus, sur les écrits de Galois. Mais ce qui compte, si vous voulez, c'est que donc, il y a un groupe d'ambiguïté, chaque fois qu'on rajoute des nombres, et Galois a calculé le groupe d'ambiguïté du corps obtenu, en résolvant une équation sur le corps F_{q^n} et il a démontrait, en fait, que c'est un groupe, bien sûr, mais que c'est un groupe cyclique ; un groupe cyclique, si vous voulez, ça revient à avoir un seul générateur, qu'on va élever à des puissances, et en fait, il a donné le générateur, et c'est ce qu'on appelle maintenant le Frobenius ; en mathématiques, on donne à certains objets mathématiques le nom de certains mathématiciens ok, et ça s'appelle le Frobenius. Donc c'est l'élévation à la puissance, si vous voulez ce qui est très frappant, c'est que l'élévation à la puissance lorsqu'on travaille avec des nombres modulo p, eh bien, l'élévation à la puissance est additive, c'est à dire que la raison c'est la suivante : c'est que si vous prenez, par exemple, l'élévation à la puissance 2, dans le corps à deux éléments, là vous allez vous dire mais c'est pas possible, puisque quand j'élève au carré, c'est pas quelque chose tel que si j'élève $x + y$ au carré, ça va me donner $x^2 + y^2$. Mais vous savez quand même que $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ et 2 est égal à 0. Donc ça marche bien, d'accord, et c'est ça, si vous voulez, cet automorphisme de Frobenius. Alors donc, si vous voulez, les mathématiciens ont compris que c'étaient ces corps globaux qui étaient le cadre naturel pour penser à ce problème de Riemann et Weil, André Weil, en 1942, a résolu le cas plus simple de ce problème de Riemann. Donc ce qu'a fait Weil, si vous voulez, c'est que... Les gens savaient comment définir l'analogue de la fonction ζ de Riemann. Cet analogue, ça lui ressemble beaucoup, vous voyez, c'est un produit, et au lieu d'avoir ici les nombres premiers, comme on avait pour la fonction ζ de Riemann, petit k, ça signifie le corps global, qui est le corps de fonctions ; on a quelque chose d'autre (bon, je ne veux pas rentrer dans les détails techniques) mais la liste des nombres premiers est remplacée par ces nombres-là, et sinon la formule est la même, c'est-à-dire qu'on prend 1 moins le nombre premier à la puissance $-s$, et on prend l'inverse de ça, d'accord. Bon, alors, peu importe après, il y a des petits détails, d'accord, il y a des petits détails de définitions, on va revenir sur ce que ceci signifie géométriquement. Mais ce que ce qu'a compris André Weil, il a compris que la géométrie, que l'on connaît bien si vous voulez sur le corps des complexes pouvait se transposer en une géométrie, dans laquelle on pouvait plus beaucoup plus difficilement faire des dessins, mais qui n'était plus une géométrie sur le corps des complexes, mais une géométrie sur... Qu'est-ce que c'est que la barre qui est ici donc F_q, ce serait le corps fini à q éléments, qu'est ce que c'est que le $\overline{F}_q$, c'est ce qu'on appelle une clôture algébrique du corps F_q, c'est à dire ce qu'on fait si vous voulez c'est qu'on rajoute toutes les solutions d'équations possibles alors comme Galois l'avait montré, ça revient à prendre les corps F_{q^n}, on les ordonne, on obtient un corps qui est algébriquement clos, et ce corps qui est algébriquement clos, ce qui est remarquable dans le travail de Weil, si vous voulez, c'est qu'en fait, on peut transposer les idées géométriques à partir du corps des complexes, vers ce corps-là. Donc en fait, Weil si vous voulez, résout complètement le problème dans le cas de ce qu'on appelle un corps global de caractéristique

[4] $\pm\sqrt{2}$.

positive où la caractéristique est non nulle, il démontre qu'on a l'analogue exact de l'hypothèse de Riemann, qui fait que lorsqu'on écrit la fonction sous cette forme-là, bon il y a un polynôme qui apparaît, eh bien, ce que démontre Weil donc, c'est que ce polynôme, dont on sait qu'il a des zéros dans les nombres complexes, eh bien, les modules de ces zéros sont exactement là où ils doivent être, c'est à dire que le $q^{\frac{1}{2}}$ qui est ici, vous voyez, le $\frac{1}{2}$ qui est ici correspond, dans la bande verticale qu'on avait, à la partie réelle de s égale $\frac{1}{2}$. Alors au niveau géométrique, c'est très difficile de voir ce qui se passe, au niveau géométrique. Parce qu'au niveau géométrique, vous ne traitez presque toujours que de problèmes finis, donc en gros, si vous voulez les images que vous avez sont toujours des images finies, vous voyez donc l'image qui est ici c'est un nombre fini de points. Et en gros, si vous voulez, dans l'image mentale qu'il faut avoir, c'est que bien qu'on traite qu'un nombre fini de points, ici on a l'infinité des nombres de places, mais au-dessus de chaque place, on a un ensemble fini, qui est ce qu'on appelle l'orbite du Frobenius. Eh bien ce qu'il faut comprendre, c'est que des idées géométriques peuvent se transplanter à partir du cas complexe vers ce cas-là. Alors, vous voyez qu'on est déjà dans une situation plus compliquée que celle que j'avais donnée oùil y avait seulement ces trois étapes parce que, qu'a fait Weil, pour résoudre le cas plus simple, il a emprunté à une autre partie des mathématiques qui est la géométrie complexe, il a transplanté les idées de la géométrie complexe dans le cas des corps finis, et il a vu que ça marchait.

Donc maintenant, comment les choses ont-elles évolué au XXe siècle. De manière très bizarre, si vous voulez, on pourrait dire "bon eh bien maintenant, on a résolu le cas plus simple, revenons au problème initial et essayons de résoudre le problème initial". Et ce n'est pas ça qui s'est produit. Ce n'est pas ça qui s'est produit. Ce qui s'est produit, c'est que Weil a compris, si vous voulez, que tout le travail qu'il avait fait, comme c'était un travail qui portait sur des courbes sur un corps fini, et que la notion de courbe si vous voulez, c'est la notion de variété disons de dimension 1, c'est une notion particulière parce qu'il y a des variétés de dimensions arbitraires et bien Weil a formulé des conjectures. En fait, il a été aidé par la lecture de Gauss pour formuler ces conjectures. Il a formulé des conjectures, et ces conjectures, si vous voulez, elles consistaient non pas à revenir au problème initial, qui était le problème de Riemann, mais elles consistaient à passer du cas des courbes au cas des variétés. Alors ces conjectures ont occupé les mathématiciens pendant des années et des années et en fait ont été résolues donc par Deligne. Donc et le théorème est le suivant : je ne vais pas vous donner le détail de l'énoncé du théorème, peu importe, vous le voyez comme ça, il faut le voir de manière un peu surréaliste, ce qui compte, si vous voulez, c'est que ce qui marchait dans le cas des courbes continue à marcher dans le cas des variétés de dimension arbitraire. Donc c'est ça qu'il faut retenir, donc, si vous voulez, ce qui se produit, bon les notions sont plus difficiles à définir. Tout ça, on pourrait le définir de manière relativement simple en disant que ce que l'on fait, donc, c'est qu'on prend la courbe en question, et on compte le nombre de points de cette courbe lorsqu'on travaille avec le corps de base F_q etc. avec des extensions successives et on regarde comment ce nombre de points change avec n si vous voulez, l'exposant n.

Bon alors, ce qui est merveilleux, c'est que ce sont uniquement des notions géométriques, des notions de cohomologie, ce qu'on appelle la cohomologie étale, ℓ-adique, qui a été introduite par Grotendieck qui joue leur rôle et en fait, de manière assez remarquable si vous voulez, la démonstration de Deligne est complètement différente, elle est complètement orthogonale à la démonstration de Weil. La démonstration de Weil est encore une démonstration qui est assez proche de la géométrie ordinaire, et qui en gros, si vous voulez, ne fait jouer aucun rôle à la torsion alors que la démonstration de

Deligne est complètement différente.

Donc, alors, on en est donc au cran suivant si vous voulez, c'est-à-dire que je ne sais pas, je n'ai malheureusement pas fait un dessin de ça, j'aurais dû le faire, vous voyez, donc, il y avait ce cas formulé par Riemann. Ensuite il y a un cas particulier, qui a été résolu par Weil. Ce cas particulier l'a conduit à formuler des conjectures générales sur des variétés dimension quelconque, ok, donc vous voyez, on a déjà trois étapes, et quelle est la quatrième étape, eh bien la quatrième étape, c'est qu'en fait, cela a conduit à définir la fonction ζ, maintenant, pour des variétés sur le corps des rationnels, c'est-à-dire que si vous voulez, maintenant, et le cas de Riemann vient du cas où la variété, c'est un seul point, donc c'est vous dire à quel point ça a progressé depuis le problème de Riemann.

Donc on prend une variété sur $\mathbb{Q}$, si vous voulez, on prend un certain nombre d'équations qui sont définies à coefficients rationnels, ou à coefficients entiers, d'accord. Eh bien, lorsqu'on prend une variété sur $\mathbb{Q}$, il y a une merveilleuse définition, dont je ne veux pas non plus rentrer dans les détails, mais qui utilise le théorème de Lie et qui dit que, en général, si on prend une variété sur $\mathbb{Q}$, on peut la réduire modulo un nombre premier. Ce n'est pas toujours vrai. À ce moment-là, on dit qu'elle a une bonne réduction modulo p. Et lorsqu'elle a une bonne réduction modulo p, on obtient une variété sur le corps fini F_p, à p éléments. Et à ce moment-là, on a un polynôme qui lui est associé, de manière vraiment indirecte, hein, parce que ce polynôme, il est associé par le théorème de Deligne, à partir des conjectures de Weil.

Et qu'est-ce qu'on fait ? Eh bien, on prend ce polynôme en p^{-s}, on prend l'inverse de ces polynômes, on prend leur produit infini sur tous les p qui sont possibles, et on obtient une fonction ζ. Cette fonction ζ est encore incomplète. Elle est encore incomplète parce qu'on n'a pas rajouté les facteurs archimédiens, ni les facteurs à ce qu'on appelle les places qui sont ramifiées, d'accord.

Mais ça a été fait. Donc on sait définir une fonction ζ. Ce qui est remarquable dans cette définition, c'est qu'on s'aperçoit, si vous voulez, que cette définition doit être focalisée sur un entier m. C'est-à-dire que ce n'est pas vraiment la variété qui est intéressante, mais c'est sa partie qui est sa cohomologie de dimension m qui est intéressante.

Et on ne pourrait pas formuler de conjectures qui soient l'analogue de la conjecture de Riemann si on partait de l'ensemble de tous les m. C'est-à-dire que dans le cas précédent, dans le cas des corps finis, la fonction ζ d'André Weil, c'était un produit avec des exposants ± 1. C'est-à-dire que c'était comme une fraction rationnelle. Mais ce qui est évident, si vous voulez, si on regarde ce produit-là, c'est que dans le cas des variétés sur $\mathbb{Q}$, en général, les dénominateurs vont avoir une infinité de 0. Donc la fonction ne serait pas une fonction intéressante. En fait, on est obligé de se focaliser sur m donné.

Et en grande partie, il y a bien d'autres raisons à ça, si vous voulez. En fait, l'idée, une idée merveilleuse de Grothendieck, qui est l'idée des motifs, qui est en fait une généralisation de la théorie de Galois à la dimension plus grande, je n'ai pas le temps de rentrer dans les explications des causes, eh bien, c'est une théorie, si vous voulez, qui justement donne une existence pure à la partie d'une variété qui correspond à la cohomologie de dimension m, à partir d'opérations, si vous voulez, etc. Donc en fait, c'est ça qui s'est dégagé. Et alors, c'est assez effrayant, parce que si vous regardez le point de départ qu'on avait, donc le point de départ qu'on avait, c'était la conjecture de Riemann, quelque part.

Ensuite, on l'avait généralisé. Il y a un cas particulier de cette conjecture, donc généralisée, qui a été résolu par Weil. Ensuite, Weil l'a étendue à des variétés de dimensions plus grandes, sur les corps finis toujours.

Et enfin, donc, par, si vous voulez, par transposition, à partir du cas des corps finis jusqu'au cas du corps des rationnels, cette idée de fonction ζ a été étendue aux variétés algébriques. Donc maintenant, on se retrouve dans la situation suivante où au lieu d'avoir résolu le problème de départ, on se trouve devant un problème d'une portée, d'une ampleur considérable par rapport au problème que formulait Riemann. Mais on n'a pas encore de retombée directement sur le problème de Riemann.

Par contre, alors, il y a une retombée qui a été merveilleuse, qui est à travers le programme de Langlands, c'est-à-dire qu'à peu près à la même époque, les gens ont compris qu'en fait, la seule manière, enfin, une des manières qui était possible, en fait, c'est en grande partie grâce à Weil aussi, une manière de comprendre les propriétés de ces nouvelles fonctions ζ qui viennent des variétés algébriques, c'était de les relier à d'autres fonctions ζ qui avaient été découvertes par Hecke, dans la théorie de ce qu'on appelle les formes modulaires. Donc, quel était le produit de ça ? Le produit de ça, si vous voulez, c'est qu'il y a eu d'une part un pont entre une théorie qui était purement algébrique, et ce qu'on appelle la théorie automorphe, qui est la théorie des représentations de groupes adéliques, etc. Mais surtout, le point essentiel, c'est qu'en fait, un cas particulier de cette correspondance de Langlands, si vous voulez, entre le côté algébrique et le côté automorphe, a été démontré par Wiles, et en démontrant cela, en fait, ce qu'il a fait, c'est qu'il a montré qu'une courbe, une courbe elliptique qui est définie sur $\mathbb{Q}$, en fait, est modulaire.

Alors, qu'est-ce que ça veut dire, modulaire ? Ça veut dire que, justement, exactement comme on peut paramétrer le cercle par des fonctions cosinus et sinus, qui sont des fonctions transcendantes, eh bien, en fait, on va pouvoir paramétrer cette courbe par des formes modulaires, par des fonctions transcendantes, qui sont des fonctions modulaires. Alors, il y a une manière très précise de le dire, mais je ne vais pas rentrer dedans. Simplement, on sait bien qu'il y a une conséquence merveilleuse de ce résultat de Wiles, c'est que grâce aux travaux de Frey, Serre et Ribet, eh bien, on savait que s'il y avait une solution du problème de Fermat, s'il y avait une solution non-triviale, c'est-à-dire s'il y avait un triplet d'entiers qui vérifiait $a^n + b^n = c^n$, eh bien, on savait lui associer ce qu'on appelle une courbe elliptique, donc ça rentre exactement dans le cadre, qui était définie sur $\mathbb{Q}$. Et puis, on voit bien pourquoi on prend les nombres comme ça, parce que les trois racines, ce sera 0, a^n et $-b^n$. Et à ce moment-là, lorsqu'on regardera le produit des différences des racines, on voit bien qu'il va y avoir quelque chose de très intéressant qui va se produire.

Donc, ce qu'avaient démontré ces gens-là, en particulier, c'est qu'il était impossible qu'il existe une solution de Fermat, à condition qu'on sache que toute courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$ est modulaire. D'accord ? Et ça contredisait ça. Donc, vous voyez la démarche qui s'est produite.

La démarche qui s'est produite fait qu'on n'a pas résolu le problème initial. On n'a pas résolu le problème initial. On a bon espoir qu'il soit vrai, bien sûr, puisqu'on en a résolu un cas particulier qui est vrai.

On en a dévoilé, de manière absolument incontournable, la nature géométrique, c'est-à-dire que toutes les choses qui ont marché, étaient des choses qui étaient inspirées par la géométrie. D'accord ? Ce n'était pas du tout une géométrie simple. C'est la géométrie qui venait de la transposition de la géométrie sur le corps des complexes en une géométrie sur les corps finis et, bon, sur la clôture algébrique d'un corps fini.

D'accord ? Donc, ensuite, le problème a été étendu. Il a été étendu. On a simplement généralisé cette idée de fonction ζ.

On ne sait même pas si ces fonctions ζ ont une équation fonctionnelle. Enfin, on sait conjecturer leur équation fonctionnelle, mais on ne sait même pas démontrer l'équation fonctionnelle. Donc, c'est vous dire le niveau d'ignorance dans lequel on est, mais d'un autre côté, on sait que le paysage qu'on va découvrir est un paysage absolument merveilleux, puisqu'en en dévoilant une toute petite partie, qui est le cas des courbes elliptiques définies sur $\mathbb{Q}$, etc., eh bien, déjà, ça a permis de résoudre le problème de Fermat.

Donc, j'espère vous avoir montré, dans ce cas-là, dans le cas des nombres premiers, à quel point, justement, le parcours du mathématicien est un parcours qui est absolument imprévisible. On aurait pu dire, le mathématicien doit partir de la généralisation, démontrer le cas particulier, etc., puis après, on doit le forcer à utiliser la démonstration qu'il a faite pour le cas particulier pour résoudre le cas initial. Mais, bien sûr, ce serait une erreur.

Le parcours du mathématicien est un parcours qui est imprévisible. Et, bien sûr, on aurait bien tort de vouloir programmer une direction de recherche, ou quoi que ce soit. Alors, il y a une image, ici, que j'ai mise volontairement, qui est reliée aux formes modulaires.

Donc, cette image, en fait, elle est due à Klein. Mais la raison pour laquelle je l'ai mise, c'est que cette image, si on veut la comprendre, en fait, ce que vous voyez tracé ici, c'est un polygone dans une géométrie qui est la géométrie de Poincaré, qui est la géométrie non-euclidienne. Et, avant de passer à l'espace-temps, donc, je voudrais simplement mentionner cette géométrie non-euclidienne.

Donc, ça, on va faire un petit break, si vous voulez. Donc, la géométrie non-euclidienne, c'est un exemple formidable qui montre, si vous voulez, à quel point, justement, des réflexions a priori complètement abstraites de mathématiciens peuvent avoir des retombées fondamentales. La réflexion abstraite, c'était, si vous voulez, bon, comme vous le savez tous, l'axiome de l'unique parallèle passant par un point extérieur à une droite dans les axiomes d'Euclide.

Alors, en fait, beaucoup de mathématiciens y ont réfléchi, Legendre, etc. Ils ont démontré 36 équivalences entre, par exemple, la seule existence d'un triangle dont la somme des angles valait π suffisait à démontrer cet axiome, etc.

Et, en fait, donc, au XIXe siècle, on s'est aperçu qu'on pouvait construire des modèles de géométrie qui vérifiaient tous les axiomes d'Euclide, sauf celui-là, d'accord ? Alors, c'est ce qu'on appelle la géométrie non-euclidienne. Et le modèle que j'ai tracé ici, c'est ce qu'on appelle le modèle de Klein. C'est un modèle qui est particulièrement simple.

Ce que vous prenez, c'est vous limitez les points de la géométrie aux points qui sont à l'intérieur de l'ellipse, qui est décrite ici. Et vous décrétez que les points, donc, de l'espace, ce sont seulement les points qui sont à l'intérieur de l'ellipse. Vous décrétez que les droites de la géométrie, ce sont les portions de droites ordinaires qui contiennent les points intérieurs à l'ellipse.

Bon, alors, il faut aller un petit peu plus loin parce qu'il faut définir ce qu'on appelle la congruence des segments. Je ne vais pas vous expliquer ça, mais c'est très simple. Ça se fait en fonction du birapport des quatre points qui sont ici.

Mais en tous les cas, ce que vous pouvez vérifier à l'œil nu, c'est que si vous prenez une droite comme la droite D qui est ici, et si vous prenez un point qui est extérieur à cette droite comme le point I qui est ici, eh bien, il y a plusieurs droites qui passent par le point I et qui ne rencontrent pas la droite D. Donc, vous voyez bien que l'axiome de l'unique parallèle passant par un point extérieur à droite est violet, d'accord ? Par contre, tous les autres axiomes de la géométrie euclidienne sont vrais. Alors, après cette découverte de la géométrie non euclidienne, les mathématiciens se sont mis à réfléchir dans deux directions différentes. Il y a une direction qui venait en fait de Galois et qui a été la mieux poursuivie, si vous voulez, par Sofusli, et une autre direction qui vient, si vous voulez, beaucoup plus dans la direction de Gauss et de Jacobi.

Et c'est cette direction-là qui a eu un impact direct sur la physique. Alors, dans cette direction-là, ce qui se produit, c'est qu'on dit simplement que la géométrie est donnée en définissant le mètre, si vous voulez, c'est-à-dire en définissant un petit élément de longueur. Et ce petit élément de longueur, on peut le transporter partout.

Et quand on le transporte partout, on peut l'écrire en coordonnées locales, comme ça, et ça donne ce qu'on appelle les $g_{\mu\nu}$. Et alors, ce qui est important, c'est qu'on peut transplanter, c'est toujours pareil, si vous voulez, on peut transplanter des idées fondamentales de la géométrie ordinaire, comme l'idée de droite, dans ces géométries beaucoup plus générales. Et l'idée fondamentale qui joue un rôle le plus important, si vous voulez, dans la géométrie ordinaire, c'est l'idée de géodésique, ou l'idée de droite.

Cette idée de droite se traduit par une équation. Ce que signifient les indices ici, c'est la dérivée par rapport à $x\rho$, d'accord ? Donc ici, la dérivée par rapport à $x\nu$. Donc ce qu'on fait, c'est qu'on dérive, si vous voulez, ces $g_{\mu\nu}$, et puis on écrit une équation, qui est une équation où on écrit que la dérivée seconde est déterminée par une forme quadratique en fonction des dérivées premières.

C'est ce qui gouverne, si vous voulez, les droites, ce qui gouverne le mouvement géodésique. Alors, donc, j'en viens à l'espace-temps. Alors, j'espère qu'on va... Bon, on va prendre les choses de manière plus relaxe.

Alors, l'espace-temps, si vous voulez, je vais essayer d'abord de vous résumer, de vous résumer de manière très, très simple, la plus simple possible. Quel est, pour le mathématicien, ce que l'on sait sur l'espace-temps ? D'accord ? Je vais faire un transparent là-dessus. Alors, qu'est-ce que l'on sait, pour le mathématicien, sur l'espace-temps ? Bon.

Alors, on sait que, si vous voulez, l'espace-temps... D'abord, le mathématicien, il sait qu'il faut mentionner Poincaré. C'est très important. Alors, donc, on sait que l'espace-temps est gouverné par cette métrique, d'accord ? C'est l'espace de Minkowski.

On l'appelle l'espace de Minkowski. Et on sait que, dans l'espace courbe, eh bien, il y a ce qu'on appelle un potentiel gravitationnel qui va remplacer le potentiel newtonien, c'est-à-dire l'idée du potentiel newtonien qui gouverne, si vous voulez, le mouvement des corps, est remplacée par un potentiel qui est plus, beaucoup plus... Si vous voulez, qui a beaucoup plus d'indices, ce sont les $g_{\mu\nu}$, et qui donne l'élément de longueur. Alors, il y a un principe d'action qui remplace la loi de Poisson.

La loi de Poisson vous disait que le Laplacien du potentiel newtonien donnait la distribution de masse. Eh bien, Einstein a eu beaucoup de mal à trouver ce qui remplaçait ça. En fait, c'est gouverné par un principe d'action.

Et ce principe d'action, il est donné par ce qu'on appelle la courbure scalaire. Donc, il y a un invariant, si vous voulez, de la métrique, qui est donné par ce qu'on appelle la courbure scalaire, qu'on intègre. C'est ce qu'on appelle l'action d'Einstein-Hilbert.

Bon, là, il y a la constante gravitationnelle. Et qu'est-ce qu'on sait ? En gros, si vous voulez, pour résumer la physique que l'on comprend, eh bien, elle vous dit que l'action, qui va jouer un rôle après, eh bien, c'est la somme de deux termes. Elle a un terme qui vient purement de la métrique, c'est-à-dire qui vient du potentiel gravitationnel.

Et elle a un autre terme que je vais vous montrer tout à l'heure. Mais si je vous le montrais tout de suite, vous seriez effrayés. C'est ce qu'on appelle le modèle standard.

D'accord ? OK. Donc, on a cette combinaison des deux choses. Et enfin, si vous voulez, on a une recette qui est due à Feynman.

Donc, si vous voulez, là, vous avez un résumé. Et on a une recette qui est due à Feynman. Et que vous dit cette recette ? Eh bien, elle vous dit que si vous voulez passer au quantique, en fait, c'est incroyablement simple de passer au quantique.

Vous gardez vos champs classiques. Vous pensez tout en termes de champs. Il y a le champ gravitationnel, etc. D'accord ? Donc, vous pensez tout en termes de champs. Ce que vous dit Feynman, c'est qu'il n'y a plus de probabilités, mais il y a des choses qui sont plus fines que les probabilités, qui sont des espèces de racines carrées de probabilités et qui sont des nombres complexes. C'est ce qu'on appelle des amplitudes de probabilités.

Et ce sont ces choses-là qu'il faut rajouter, et non pas les probabilités. Et que vous dit Feynman ?

Eh bien, Feynman vous donne une recette pour savoir ce que c'est que l'amplitude de probabilités d'une configuration classique. Donc, vous prenez un champ classique.

Vous imaginez, je ne sais pas, la surface de la mer ou un truc comme ça. D'accord ? C'est un champ classique. Eh bien, ce champ classique, il a une action classique que vous calculez.

Vous la divisez par l'unité d'action, qui est ce qu'on appelle la constante de Planck. C'est le seul rôle du quantique qui intervient ici. Vous la multipliez par le nombre imaginaire pur, i, de carré moins 1 ($i^2 = -1$). D'accord ? Et vous prenez l'exponentielle de ça.

Donc, c'est ça la recette. Alors, c'est là que j'espère que la couleur va marcher, parce que j'avais quand même donné deux, trois transparents en couleur. D'accord ? Donc, qu'est-ce qu'on sait ? Je ne vais pas empiéter sur les plates-bandes des physiciens, mais c'est quand même extrêmement rassurant de savoir que la théorie d'Einstein, qui prédit l'existence de phénomènes tout à fait bizarres, si vous voulez, dans l'espace-temps au niveau macroscopique, comme l'existence des trous noirs, etc., eh bien, maintenant, est en grande partie vérifiée, bien qu'il y ait des problèmes extrêmement sérieux, ce qu'on appelle la matière noire, l'énergie noire, etc., qu'on ne sait pas encore vraiment expliquer.

Mais en tout cas, je veux dire, il y a des phénomènes macroscopiques, et puis il y a des vérifications merveilleuses de la théorie d'Einstein pour ce qu'on appelle les pulsars binaires, etc. Donc, ça, c'est un exemple d'une galaxie très lointaine dans laquelle on arrive à mesurer la vitesse de déplacement de gaz, etc., et on arrive à deviner, si vous voulez, la présence d'un trou noir. Évidemment, la présence d'un trou noir, un trou noir, à part ce qu'on appelle la radiation de Hawking, n'émet rien de spécial.

Donc, je veux dire, on n'arrive pas à l'observer directement. Alors, ça, c'est dans l'infiniment grand, si vous voulez, c'est dans les très, très grandes tailles. Alors, dans les tailles très, très petites, ce qui est satisfaisant, c'est que l'on saura bientôt, l'on saura bientôt... Ah, pardon.

Mais alors là, vous avez une image macroscopique, si vous voulez, du CERN, qui rentrera en fonctionnement sans doute à la fin de l'année 2007 et qui a un certain nombre de détecteurs, d'accord, que les gens construisent. Il y a un nombre incalculable d'ingénieurs qui construisent ça. Et en gros, si vous voulez, ce qui se passe ici, c'est le plus gros microscope, c'est le microscope le plus précis que l'on ait pour analyser la texture de l'espace-temps au niveau microscopique.

C'est-à-dire qu'en gros, si vous voulez, ce qui se produit, c'est ce qu'on appelle les énergies qui sont impliquées dans ces très grands accélérateurs. Là, ce sera de l'ordre du TeV ou d'une dizaine de TeV ou je ne sais pas, peut-être une centaine de TeV. En fait, elles correspondent, si on prend l'inverse de l'énergie, si on utilise les constantes usuelles pour faire le travail, ça correspond à des limites de la précision, si vous voulez, dans l'infiniment petit, donc de l'ordre, là, on aura quelque chose de l'ordre, je pense, de 10 puissance moins 18 centimètres, quelque chose comme ça. Bon. Alors maintenant, ce que je vais faire, si vous voulez, bon, ça, c'est bien gentil, etc.

Le problème, c'est que je vous ai dit tout à l'heure que les principes de la physique étaient très

très simples et je vous ai montré tout à l'heure un autre terme, d'accord, dans ce qu'on appelle le Lagrangien de la physique ou l'action de la physique, c'est-à-dire, il y avait le Lagrangien de Einstein-Hilbert, et il y avait le Lagrangien du modèle standard. Alors, les mauvaises nouvelles, c'est que si vous écrivez la formule, vous avez des gens qui ne peuvent pas vous dire que c'est simple, voilà la formule, d'accord. Donc, je ne vais pas vous faire le détail, mais vous pouvez toujours poser des questions sur la formule, d'accord.

Donc, voilà, si on écrit vraiment le Lagrangien du modèle standard, ça, c'est ce qu'on appelle, il y a les fantômes ici, etc. Il y a tous les termes du modèle standard. Donc, en fait, si vous voulez, le dialogue qui a eu lieu entre l'expérience en physique, d'accord, et la théorie, ce dialogue, au cours du XXe siècle, a produit ce terme additionnel, au-delà du terme d'Einstein-Hilbert, il a produit ce terme additionnel.

Et, bon, bien que ce terme additionnel, on puisse lui donner un tas de qualificatifs, on puisse dire, si vous voulez, là, vous avez les bosons de jauge, vous avez les gluons, etc. Là, vous avez le, bon, là, vous avez le, ce qu'on appelle le boson massif W, etc. Vous avez le boson intermédiaire Z, d'accord.

Là, vous avez le champ électromagnétique, etc. On peut dire, là, vous avez les champs de Higgs qui sont non physiques, vous avez le champ physique des Higgs, H, qui intervient, etc. Bon, tous les termes ont une signification, tous les termes ont une origine historique, si vous voulez, etc.

Mais, c'est quelque chose de fascinant pour le mathématicien. Pourquoi est-ce que c'est quelque chose de fascinant pour le mathématicien ? Parce que, si vous voulez, le mathématicien, lui, ce qu'il cherche, c'est la simplicité. Et, le fait qu'on dise, le lagrangien résume toute la physique que l'on sait, bien sûr, ça, ça parlera aux physiciens, parce que le physicien, il saura que chacun de ces termes-là a une histoire, etc. et va prédire quantité et quantité de phénomènes. Mais le mathématicien ne peut pas rester insensible à la complexité de cette formule. D'accord ? Alors, il y a une autre chose qui n'est pas évidente non plus, si vous voulez.

Il y a une autre chose qui n'est pas évidente non plus. C'est que, lorsque les physiciens ont fait leurs calculs et ont commencé à utiliser cette prescription de Feynman, lorsqu'ils ont utilisé cette prescription de Feynman, eh bien, ils se sont aperçus qu'il y avait un autre problème qui se produisait, c'est-à-dire qu'ils écrivaient l'action avec les champs classiques, etc., le champ qu'on a vu tout à l'heure, d'accord ? Et ils essayaient d'intégrer, bon, sur tous les champs avec ce qu'on appelle cette amplitude de probabilité. Ils ont commencé à faire les calculs et ils se sont aperçus, c'est Oppenheimer qui s'en est aperçu, en fait, dans les années 1930, en gros.

Eh bien, ils se sont aperçus qu'il y avait un phénomène, un phénomène vraiment très, très bizarre qui se produisait. Et pour vous expliquer ce phénomène, ce qu'on appelle la renormalisation, en fait, si vous voulez, c'est un phénomène qui avait déjà été observé par les physiciens vers 1830, donc au XIXe siècle. Et il avait été observé par Green, si vous voulez, qui faisait de l'hydrodynamique.

Donc, ce que les physiciens avaient observé, c'est la chose suivante, les mathématiciens aussi. En fait, à l'époque, ils n'étaient pas différents, c'était les mêmes personnes qui faisaient la physique et les mathématiques. Donc, en hydrodynamique, Green avait fait l'observation suivante.

C'est la suivante, si vous voulez, c'est que si vous prenez une balle de ping-pong et vous prenez un bain, avec une balle de ping-pong, d'accord, et vous mettez la balle de ping-pong sous l'eau, donc c'est le cas, là, vous voyez, d'accord. Et on vous demande de faire un calcul qui est le calcul de l'accélération initiale qu'aura la balle de ping-pong quand vous la lâchez. Alors, vous êtes dans le bain, donc vous vous dites, vous appliquez le principe d'Archimède.

Alors, que vous dit le principe d'Archimède ? Il vous dit que la balle de ping-pong va être soumise à une force verticale qui correspondra au poids de l'eau que contient la balle. D'accord, vous calculez le poids de l'eau que contient la balle. Bon.

Ensuite, vous calculez, vous appliquez la loi de Newton, ok, et qu'est-ce que vous trouvez ? C'est un petit calcul très simple. Vous trouvez 11,5 fois l'accélération de la pesanteur. Je ne sais pas si vous vous rendez compte, mais 11,5 fois l'accélération de la pesanteur, c'est quelque chose de colossal.

Pratiquement, c'est une accélération à laquelle le corps humain ne résiste pas, d'accord. Alors, maintenant, vous prenez la balle de ping-pong, vous la lâchez dans l'eau. Et qu'est-ce que vous regardez ? Elle va vraiment lentement.

D'accord. Et en gros, son accélération initiale est de l'ordre de 1,5 g. Alors, c'est Green qui a trouvé l'explication à ça. Et quelle est l'explication ? Eh bien, l'explication, c'est que, même lorsque le temps t est égal à zéro, si vous voulez, lorsque la balle est immergée dans l'eau, vous voyez bien que quand elle va bouger dans l'eau avec une certaine vitesse, peu importe, eh bien, l'eau va devoir se dérouler de manière tangentielle le long des bords de la balle de ping-pong.

Et donc, si vous regardez le champ des vecteurs, si vous voulez, de l'eau, c'est un champ de vecteurs qui va être dérangé par la présence de la balle. On peut calculer. C'est un calcul élémentaire, l'énergie cinétique correspondante, c'est ce qu'a fait Green. C'est un calcul complètement élémentaire. Ça prend trois lignes de calcul. D'accord. Ça utilise ce qu'on appelle une harmonique sphérique. Donc, Green a fait le calcul.

Et qu'est-ce qu'il a compris ? Eh bien, il a compris quelque chose qui est assez fabuleux, si vous voulez. C'est qu'en fait, la loi de Newton doit être modifiée. C'est quelque chose qui est tout à fait étonnant.

C'est que, lorsqu'on prend un corps comme une balle de ping-pong, etc., qui est plongé dans un liquide et qui est plongé dans un champ, eh bien, la loi de Newton n'a plus lieu avec ce qu'on appelle la masse nue du corps comme la balle de ping-pong. Donc, la balle de ping-pong, vous pouvez la prendre, vous pouvez la poser sur une balance et vous connaîtrez sa masse, m. D'accord. Eh bien, ce que vous dit le théorème de Green en hydronamique, c'est qu'en fait, ce n'est pas cette masse-là qui rentre dans la formule de Newton.

C'est une autre masse. Il l'a calculée pour un objet parfaitement sphérique et il s'est aperçu qu'en fait, c'était cette petite masse-là m plus la moitié de la masse de l'eau qui serait contenue dans la balle $\left(m + \frac{1}{2}M\right)$. D'accord.

C'est un calcul qui est complètement élémentaire. Et alors, vous voyez bien que si vous remplacez la masse m par m plus $\frac{1}{2}$ de la masse de l'eau qui est bien plus grande que la masse de la balle de ping-pong, eh bien, à ce moment-là, quand vous calculerez l'accélération initiale, elle ne sera jamais de toute façon plus grande que deux fois l'accélération de la pesanteur. Elle ne peut pas puisqu'il y a ce facteur $\frac{1}{2}$. Donc ça, c'est un phénomène ancien que les gens avaient compris. Alors, j'avais insisté pour avoir la couleur, je vais voir si vous voyez un petit peu mieux là. D'accord. Donc, je veux dire, ça, ce n'est pas n'importe quel... Je n'ai pas pris n'importe quel champ de vecteur.

C'est le champ de vecteur réel, ça, qui correspond exactement au flot de l'eau qui se déroule autour de la balle de ping-pong. Donc, en fait, si vous voulez, ce que les physiciens ont trouvé, donc à partir des travaux d'Oppenheimer, donc, ce qu'ils ont trouvé, si vous voulez, à partir de ces travaux-là... J'ai l'impression que je vais... Non, ça va. Donc, à partir des travaux d'Oppenheimer, ce qu'ont trouvé les physiciens, c'est qu'ils ont trouvé, en fait, si vous voulez, que le phénomène était exactement le même lorsqu'on regardait un électron, par exemple.

Lorsqu'on regardait un électron, il y avait, en fait, l'électron est plongé dans le champ électromagnétique et exactement le même phénomène qui se produit pour la balle de ping-pong se produit pour l'électron. C'est-à-dire que... Et maintenant, il y a une grosse différence. C'est que dans le cas de la balle de ping-pong, vous pouviez prendre la balle de ping-pong et la sortir de l'eau et la peser.

Par contre, l'électron, quoi que vous fassiez, il sera toujours dans le champ électromagnétique. Donc, si vous voulez, pour l'électron, il est absolument impossible de connaître la valeur m qui était importante de tout à l'heure, qui jouait un rôle important si vous voulez, dans le changement de tout à l'heure. Donc, si vous voulez, dans le cas de la balle de ping-pong, on avait le petit m et on avait, si vous voulez, ce changement qui passait de petit m à $m + \frac{1}{2}\,M$. Dans le cas de la balle de ping-pong, on pouvait mesurer m et on pouvait mesurer ça aussi.

Dans le cas de l'électron, on ne peut pas mesurer m, on peut seulement mesurer cette combinaison des deux. Alors, ça a pris un temps très très long quand même, aux physiciens, puisqu'Oppenheimer a trouvé ça environ en 1930, et ce n'est pas avant 1947, en particulier pour des raisons qui venaient de l'expérience, sur ce que l'on appelle la structure hyperfine, ou la structure fine même des spectres que, bon, je n'ai pas parlé de Bethe, etc., mais je veux dire un certain nombre de physiciens ont compris ce qui se passait. Et donc, là, il y a eu un développement qui s'est de plus en plus, d'une certaine manière, rapproché, on peut dire, de choses absolument essentielles, c'est-à-dire ce qu'ont fait les physiciens, ils ont commencé par faire des petits tours de passe-passe, c'est-à-dire qu'ils ont commencé par dire, bon, on ne peut pas observer la masse de l'électron, on ne peut pas observer sa charge, etc., et on va essayer de faire des calculs, en fermant un peu les yeux, là où il y a des problèmes, d'accord ? Et en essayant seulement de calculer des quantités physiquement observables. Mais grâce à Schwinger, Feynman et Dyson, etc., en fait, je ne veux pas rentrer dans les détails, bien sûr, mais ils ont graduellement développé une méthode algorithmique, si vous voulez, une méthode à partir de ce qu'on appelle les graphes de Feynman, ça c'est un exemple très simple de graphes de Feynman, donc, ils ont développé une méthode, pour se débarrasser des infinis.

Mais en gros, si vous voulez, ce qu'il se passe, c'est qu'on fait ce qu'on appelle un développement perturbatif, c'est une somme infinie, mais chacun des termes du développement est donné lui-même par une intégrale divergente. Donc c'est vraiment un problème très très sérieux, ce n'est pas le problème qui est qu'on a une somme infinie de choses qui elles-mêmes sont finies. Le problème, c'est qu'on a une somme infinie de choses qui sont chacune infinie.

Alors, les physiciens ont développé une méthode, et cette méthode, si vous voulez, a mis beaucoup de temps à se développer de manière, on peut dire rigoureuse, au sens où elle soit définie de manière univoque, et au sens où, pour l'appliquer, il ne faille pas aller voir X et Y et lui demander "est-ce que ce que je fais c'est correct,là ou est-ce que ce n'est pas correct ?" D'accord ? Donc ça, ça a pris énormément de temps, ça a pris beaucoup de temps et ça a été développé en particulier par Bogoliubov, Parasiuk, Hepp et Zimmermann. Vous n'avez pas à comprendre les formules qui sont ici. Je veux dire, simplement, c'est pour vous montrer qu'il y a une méthode qui a été développée, et cette méthode, elle a été développée comme une méthode algorithmique. C'est-à-dire qu'on a donné une recette. En fait, il y avait, le travail de Bogoliubov et Parasiuk qui était incomplet. Hepp a introduit un tas de corrections, etc. Il a rendu les choses beaucoup plus rigoureuses et bon, Zimmermann a rajouté des formules combinatoires. Donc, en fait, on est arrivé graduellement, si vous voulez, à une recette. On peut dire c'est une recette qui permet de faire un calcul à partir de graphes.

D'accord ? Et on sait, bien sûr, que c'est quelque chose d'extrêmement intéressant parce que c'est précisément en faisant ces calculs de graphes que les physiciens trouvent un accord, par exemple, pour le moment anormal de l'électron, avec une précision qui est la même que l'épaisseur d'un cheveu sur la distance entre Paris et New York. Donc, on calcule le résultat à partir de ce type de formule. On calcule, donc, le moment anormal.

On le compare à l'expérience et on s'aperçoit, si vous voulez, que l'accord qu'il y a entre la théorie et l'expérience est de l'ordre de la précision de l'épaisseur d'un cheveu sur la distance entre Paris et New York. Alors, cette méthode, il faut le dire, si vous voulez, elle est parfaitement justifiée du point de vue de la physique. D'accord ? Le problème n'est pas là.

Mais pour le mathématicien, c'est quelque chose de fascinant, parce que le mathématicien, qu'est-ce qu'il voit ? Il voit une formule aussi compliquée que celle du modèle standard ou il voit une recette qui est donnée par des formules aussi compliquées que celle-là.

Alors, soit il dit "j'abandonne, la physique est trop compliquée pour moi". D'accord ? Soit il dit "peut-être n'est-il pas impossible que derrière ces recettes qui sont données par les physiciens, en fait, il y ait des maths vraiment intéressantes".

Et si vous voulez, la motivation que j'ai eue, toujours, la motivation que j'ai eue, toujours en travaillant dans ce domaine-là, c'est non pas de démontrer que ces calculs-là sont rigoureux. On sait bien qu'ils sont rigoureux puisqu'ils donnent la précision, d'accord ? Donc, ce n'est absolument pas qu'ils soient rigoureux, mais c'est de comprendre leur sens conceptuel. Alors, ça, ça a été fait dans un travail d'abord avec Dirk Kreimer, mais je vais aller très, très vite dessus.

Et en fait, si vous voulez, ce qu'on a compris, donc, si j'ai 5 minutes, ce qu'on a compris, c'est qu'en fait, si vous voulez, le procédé qui est utilisé par les physiciens, donc ce procédé récursif, qui s'appelle BPHZ, c'est-à-dire BPHZ, pour Bogoliubov, Parasiuk, Hepp et Zimmermann, eh bien, en fait, il est identique à un procédé mathématique que les mathématiciens connaissaient depuis longtemps, qui était relié à ce qu'on appelle le problème de Riemann-Hilbert, qui était un des problèmes de Hilbert qu'il avait formulé au début du XX[e] siècle, et qui est relié à ce qu'on appelle la décomposition de Birkhoff. Donc, en fait, il y a un groupe qui est présent derrière, et il y a un procédé mathématique qui est complètement clair.

Mais, en fait, les choses ont été beaucoup plus loin que ça. Ça, c'était il y a environ quatre ou cinq ans. Mais les choses ont été beaucoup plus loin que ça, et elles ont été beaucoup plus loin que ça, en partie grâce à l'intuition de Pierre Cartier.

Donc, je vais mettre, si vous voulez, un transparent qui est une citation de Pierre Cartier. Donc, Pierre Cartier disait la chose suivante. Il avait été frappé par l'analogie manifeste entre, d'une part, ce qu'on appelle le groupe de Grothendieck-Teichmüller, c'est un truc en mathématiques, et le groupe de renormalisation.

C'est-à-dire, en gros, si vous voulez, le groupe qui intervient dans ce que j'expliquais tout à l'heure, c'est ce que les physiciens appellent le groupe de renormalisation, sauf qu'il est localisé sur une théorie, de la théorie quantique des champs. Et donc, ce que disait Cartier :

> *"La parenté de plus en plus manifeste entre le groupe de Grothendieck-Teichmülluer d'une part, et le groupe de renormalisation de la Théorie quantique des champs d'autre part, n'est sans doute que la première manifestation d'un groupe de symétrie des constantes fondamentales de la physique, et il disait une espèce de groupe de Galois cosmique !"*

Alors, quand j'ai lu cet énoncé de Cartier, moi ça me faisait rigoler, c'était au moment de l'anniversaire de l'IHÉS, environ en l'an 2000, et je pensais qu'il n'y avait pas de fondement à cette idée.

Et graduellement, c'est une idée qui a émergé, et qui est correcte, et en fait, si vous voulez, c'était ça mon thème de départ ; donc mon thème de départ, c'était cette merveilleuse théorie de Galois, que Galois, si vous voulez, avait développée, non seulement pour les équations algébriques, mais en fait, il avait été beaucoup plus loin. Et Galois, dans sa lettre-testament, écrivait à son ami Auguste Chevalier, il lui disait qu'en fait, ses idées sur ce qu'il appelait la théorie de l'ambiguïté allaient infiniment plus loin que seulement les équations algébriques, c'est-à-dire les équations dont vous devez trouver une solution, etc., et où il avait compris, si vous voulez, qu'il y avait un groupe de symétrie. En fait, ce que Galois avait compris, et dont on voit des réminiscences, si vous voulez, dans la théorie de Ramis, sur les équations différentielles, etc., c'est que même pour les fonctions transcendantes, en fait, il y avait ce principe de symétrie cachée qui fait qu'on peut dire, a priori, dans certaines équations, même pour des équations transcendantes, qu'en fait, on peut changer la valeur de certaines fonctions en d'autres valeurs, par exemple, ce qu'on appelle le recalibrage des exponentielless, où on remplace $\exp\left(\frac{1}{x}\right)$ par $\lambda \exp\left(\frac{1}{x}\right)$, sans changer la validité des équations.

Alors, donc, ça a pris beaucoup de temps, ça a pris beaucoup de temps, mais maintenant, on est dans une situation qui correspond exactement à ce dont Cartier avait rêvé. Et non seulement ça, mais si vous voulez, on peut définir ce qu'on appelle le groupe de Galois d'une théorie des champs. Et par exemple, le groupe de Galois d'une théorie des champs est trivial, si et seulement si la théorie est finie.

Donc ça, c'est un travail récent que j'ai fait en collaboration avec Matilde Marcolli. Donc, en fait, si vous voulez, on a une situation qui est idéale maintenant. On a trouvé le groupe de Galois de Cartier.

C'est un groupe qui est très, très compliqué. C'est un groupe qui n'est pas du tout... je me souviens, en 1978, j'étais allé à une conférence de physique et je leur avais demandé "qu'est-ce que c'est que le groupe de renormalisation ?". Et j'avais compris que c'était la droite réelle, le changement d'échelle.

Alors, j'étais retourné chez moi en me disant "ce n'est pas vraiment intéressant.". Mais, en fait, le groupe de renormalisation, qui est ce groupe de Galois cosmique, est un groupe extrêmement intéressant qui est composé, bien sûr, du groupe de changement d'échelle, mais qui contient une algèbre de Lie libre, avec un générateur dans chaque dimension, d'accord, et qui correspond à la théorie des nombres. Alors, c'est ce groupe de Galois cosmique que Cartier avait envisagé.

Ce groupe de Galois cosmique s'envoie sur le groupe associé à une théorie, qui est associé au graphe de Feynman, grâce à l'algèbre de Hopf, de Kreimer, etc. Et on avait fait, dans notre travail avec Kreimer, on avait montré que son groupe, que le groupe, si vous voulez, des graphes, agit par difféomorphisme formel sur les constantes de couplage. Mais si vous combinez les deux flèches qui sont là, c'est-à-dire la flèche qui va du groupe de Galois cosmique vers le groupe des graphes, et du groupe des graphes vers les difféomorphismes des constantes de couplage, eh bien, vous vous apercevez qu'en fait, il y a effectivement, exactement comme Cartier le suggérait, un groupe de Galois qui est un groupe de symétrie universelle, que Cartier a appelé cosmique, et qui agit sur les constantes des théories physiques.

Donc, en fait, non seulement on a ça, si vous voulez, qu'est-ce que ça dit ? Eh bien, ça dit que, en fait, les gens qui prétendent que le fait qu'il y ait des divergences dans la théorie des champs est un inconvénient et qu'on doit s'en débarrasser à toute force, eh bien, en fait, ils ne comprennent pas que ces divergences sont, en fait, une bénédiction, parce que c'est grâce à ces divergences, c'est uniquement grâce à ces divergences, à ce qu'on appelle la fonction β en physique, et à ces composantes dans chaque puissance de $\hbar$, que ce groupe de Galois cosmique agit sur les théories physiques. Donc, si vous voulez, loin d'être un inconvénient, en fait, c'est un groupe de symétrie extrêmement caché, d'accord ? Bon, bien sûr, le groupe de renormalisation, le groupe de renormalisation, en fait, est un sous-groupe à un paramètre de ce groupe-là. Il y a un sous-groupe à un paramètre du groupe de Galois cosmique, qui est le groupe de renormalisation.

Et alors, il y a une étape que j'ai oublié de mentionner, donc, c'est que l'image du groupe de Galois cosmique dans le groupe d'une théorie donnée est ce qu'on appelle le groupe de Galois de la théorie. Et c'est un groupe qui régit, par exemple, le fait de savoir si la théorie est finie ou pas, qu'il y a toutes les bonnes propriétés. Donc, si vous voulez, les idées de Galois, les idées de Galois qui sont des idées... Galois disait “sautons à pieds joints sur les calculs.”.

Donc, ce que disait Galois, si vous voulez, c'est qu'il est impossible de calculer un groupe de Galois. Et les gens lui riaient au nez, parce qu'ils lui disaient, vos trucs, c'est impossible à calculer. Mais, il allait beaucoup plus loin que ça, parce qu'il disait, le travail des géomètres futurs ne sera pas de faire ces calculs.

Le travail des géomètres futurs sera d'organiser ces calculs et de les faire dans leur tête, de les faire abstraitement, sans les faire concrètement. Et de savoir, ou plutôt de deviner, ce vers quoi... ce que vont donner les calculs, etc., etc. Donc, en fait, si vous voulez, la théorie de Galois a un pendant, justement, pour la théorie physique, ici, et alors, en fait, ce qui se produit, donc, c'est que, non seulement on a ça, mais si on utilise ce qu'on appelle la régularisation dimensionnelle, etc., je ne vais pas en parler, eh bien, en fait, il y a un repère universel, il y a un repère singulier universel, qui dit qu'en fait, la renormalisation, si vous voulez, consiste à renormaliser une fois pour toutes, il y a une manière universelle de le faire, qui consiste à renormaliser la géométrie.

C'est-à-dire que la géométrie de l'espace ordinaire de dimension 4, est en fait une géométrie qui n'est pas appropriée à la manière dont on fait la physique à cause de la réaction du champ, justement, et de la self-énergie du champ. Et à condition, bon, d'utiliser les bons outils, etc., et d'avoir effectivement des espaces (X_z) de dimension z, donc il y a une notion d'espace de dimension z, je vais m'arrêter là-dessus, c'est une notion qui utilise la géométrie non-commutative, donc il y a une notion effective d'espace de dimension z, et qui permet, une fois qu'on a cette notion-là, ça permet maintenant d'avoir une image mentale beaucoup, beaucoup plus précise de la signification de la renormalisation, de ce point de vue-là, et la signification est simplement la suivante, c'est qu'au lieu d'avoir la manière triviale de faire la régularisation dimensionnelle, c'est-à-dire d'aller pour la valeur de z de l'espace auxiliaire vers zéro de manière brutale, eh bien, en fait, il y a une manière d'y aller qui suit une trajectoire, d'accord, qui est divergente, mais qui consiste à renormaliser la géométrie. Bon, alors j'avais 36 autres transparents, mais je crois que je vais m'arrêter là.

(Applaudissements)

Édouard Brézin : Voilà. Donc, si là, l'un des jeunes lycéens a compris l'ensemble de l'exposé de M. Alain Connes, je propose qu'on l'élise immédiatement à l'Académie des sciences. L'exposé est ouvert pour des questions.

Vincent Courtillot : Dans l'énorme formule, qu'est-ce qui gouverne le nombre de ces termes et est-ce que c'est important ?

Alain Connes : Ah, bien sûr. Mais malheureusement, c'est dans les transparents d'après.

Cette énorme formule a, non pas une explication, mais enfin, il y a une manière de l'écrire qui prend une ligne, d'accord, à condition de faire la chose suivante, c'est-à-dire d'accepter qu'au lieu que ce soit la toute petite partie de cette formule qui est l'électrodynamique, la partie électrodynamique de cette formule tient en un quart de ligne dans l'énorme formule. Je vais essayer de la retrouver. Donc, si on regarde l'électrodynamique, l'électrodynamique prend un quart de ligne.

Eh bien, qu'est-ce qu'on a fait, nous ? Qu'est-ce qu'on a fait ? On a pris ce quart de ligne et on a dit, voilà l'espace-temps, puisque c'est Maxwell qui nous a donné les équations de Maxwell, qui sont une partie de l'électrodynamique, d'accord. Et c'est à partir de ça qu'on a dit, bon, eh bien, d'accord, on a $\sqrt{\frac{1-v^2}{c^2}}$, etc., etc., et on en a déduit l'espace-temps, l'espace-temps de Minkowski, d'accord. Et puis on s'est dit, chaque fois qu'on rajoute un terme dans la formule, l'interaction faible, etc., c'est une nouvelle particule.

C'est une manière de penser. C'est une manière de penser. Il y a une autre manière de penser.

Cette autre manière de penser consiste à dire : "adaptons nos concepts géométriques d'abord", d'accord. Alors, en quel sens adaptons-nous nos concepts géométriques ? Eh bien, on s'aperçoit, les mathématiciens ont énormément à apprendre de la physique. Pourquoi ? Parce que dans la géométrie, il y a mètre, d'accord.

Et dans mètre, il y a la définition de l'unité de longueur. La première définition de l'unité de longueur, ça a été l'arpentage entre Dunkerque et Barcelone, d'accord, avec un angle précis du Méridien. On en a pris la 40 millionième partie, on en a fait un objet concret, qu'on a appelé le mètre et qu'on a déposé au pavillon de Breteuil.

Très bien, d'accord. Eh bien, ça, ça correspond au ds^2 et au $g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu$, d'accord. Qu'est-ce qui s'est passé ? Ce qui s'est passé, c'est qu'au bout d'un moment, on s'est aperçu que le mètre, qui était déposé au pavillon de Breteuil, ce n'était pas pratique.

En exagérant, si je veux mesurer mon lit, et si je dois aller à Paris et comparer au mètre qui est déposé au pavillon de Breteuil, ce n'est pas pratique, d'accord. Et en plus, ce mètre-là, il n'était pas de longueur fixe. Donc les physiciens ont réfléchi.

Les physiciens ont réfléchi. Et quel a été le bout de leur réflexion ? Le bout de leur réflexion, les physiciens se sont aperçus qu'en fait, il y avait bien mieux, bien mieux pour définir une longueur, une unité de longueur, c'était de prendre un corps chimique, si possible un corps pur, d'accord, prendre une de ses raies spectrales, et prendre la longueur d'onde de cette raie spectrale comme unité de longueur. Bien sûr, on va la multiplier par un nombre de telle sorte que ça ressemble au mètre.

Alors on a commencé par le faire pour le krypton, avec la raie orange du krypton, etc., et ensuite on l'a fait pour le césium. Mais ça, ça ne correspond pas au $ds^2 = g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu$, d'accord. Pas du tout.

Par contre, par contre, ça correspond exactement, ça correspond exactement à l'élément de longueur en géométrie non-commutative. Donc il se fait qu'exactement pour cette raison-là, d'accord, il y a eu, si vous voulez, il y a eu un changement de paradigme, mais qui a été imposé pour d'autres raisons, qui n'étaient pas du tout celles qui venaient de la physique, qui a été imposé parce qu'on voulait s'intéresser à des espaces qui étaient différents des espaces ordinaires dans lesquels les points sont donnés par des coordonnées qui commutent.

Donc on voulait s'intéresser à des espaces qui étaient plus délicats. Eh bien, lorsqu'on s'intéresse à des espaces qui sont plus délicats, on s'aperçoit qu'on est obligé de prendre la même convention que les physiciens. En quel sens cette convention des physiciens est une convention intéressante ? C'est une convention intéressante parce que supposez qu'on veuille unifier, par exemple, le système métrique dans la galaxie.

Si on dit aux autres systèmes planétaires dans la galaxie "vous allez devoir venir à Paris et vous allez devoir prendre une copie du mètre-étalon et c'est ça qui va vous servir d'unité de longueur". Bon, c'est évident que ça va déclencher une guerre galactique, etc. Par contre, si on leur dit "vous prenez un corps chimique pur, d'accord, qui vient du tableau périodique des éléments, etc., et vous prenez telle raie spectrale, et c'est ça votre unité de longueur", bon, là ça va marcher, d'accord, parce que c'est une définition infiniment plus intrinsèque. Alors, donc, si vous voulez, on est obligé d'adapter les concepts géométriques. Une fois qu'on a adapté les concepts géométriques, une fois qu'on a élargi le concept de géométrie, bon, d'abord on s'aperçoit que ce concept de géométrie, il contient le concept ordinaire de manière stricte.

C'est-à-dire que ce n'est pas une généralisation dans laquelle vous oubliez le concept de départ. Le concept de départ est strictement contenu dedans. D'accord ? Bon, mais alors maintenant ce qui se produit, donc ce qui se produit, c'est la chose suivante.

C'est qu'une fois que vous avez un concept géométrique qui est plus flexible, eh bien vous pouvez faire l'opération suivante. Vous pouvez regarder l'énorme formule. Je ne sais pas si je vais la retrouver.

Vous vous souvenez comme elle était énorme, cette formule. Donc vous pouvez regarder l'énorme formule et vous pouvez vous dire, de cette formule, je ne veux pas retenir, je ne veux absolument pas retenir dans cette formule un petit bout, et puis dire qu'après je rajoute des particules. Non ! Je veux dire que cette formule, par elle-même, me donne la géométrie de l'espace-temps. D'accord ? C'est-à-dire que je veux avoir un principe, extrêmement simple, qui me dise que c'est cette formule qui me décrit la géométrie de l'espace-temps. Et le procédé qui, à partir, si vous voulez, de la géométrie de l'espace-temps va vous redonner cette formule doit être une simplicité délirante. Il doit être extrêmement simple. D'accord ?

Et alors le procédé qui est appliqué, justement, pour retrouver, si vous voulez, la formule en question à partir de la géométrie de l'espace-temps, eh bien, c'est un procédé qui est purement spectral. C'est-à-dire, le procédé qui vous redonne cette formule, c'est le procédé qui consiste à compter le nombre de valeurs propres, qui sont plus petites qu'une valeur propre donnée, à faire son développement, d'accord ? Et on doit réobtenir exactement la formule en question.

Alors qu'est-ce qu'on obtient, comme structure de l'espace-temps ? Eh bien, on obtient que l'espace-temps, effectivement, ressemble à l'espace de Minkowski. On traite les espaces courbes, là, dans ce cas-là. D'accord ? Mais, en fait, il a une structure beaucoup plus raffinée. C'est-à-dire qu'il a une structure... En gros, si vous voulez, de manière très simple, très simpliste, cet espace-temps, c'est le produit de l'espace-temps ordinaire par un espace fini mais non-commutatif. Fini, ça veut dire que c'est comme un ensemble fini de points.

Et cet espace non-commutatif, en fait, il est dicté par le modèle standard. Il est dicté par la physique. C'est-à-dire que le modèle standard est ce qu'on appelle une matrice de Yukawa. C'est cette matrice de Yukawa dans le modèle standard qui vous donne la géométrie de l'espace fini. Alors, après, on peut faire un tas de calculs, mais en particulier, lorsque vous calculez après, lorsque vous calculez ce nombre de valeurs propres, vous obtenez non seulement le modèle standard avec cette formule, mais vous obtenez aussi l'action d'Einstein-Hilbert. C'est-à-dire que vous obtenez la somme des deux.

Alors, si vous voulez, pour le moment, c'est une interprétation simplement au niveau classique. Et un des problèmes auxquels je me suis attaché, en particulier dans ma collaboration avec Kreimer et Marcolli, si vous voulez, c'est d'essayer de comprendre en quel sens la compréhension que l'on a maintenant de la renormalisation, c'est-à-dire cette image mentale que l'on a de la renormalisation de la géométrie de l'espace, cadre avec le modèle standard. Et en fait, ce qui est remarquable, c'est qu'effectivement, on peut les mettre ensemble. C'est-à-dire que l'opération de produit qui consiste à faire le produit par un espace de dimension z complexe, puis à faire tendre z vers zéro de cette manière assez ad hoc, eh bien, elle cadre exactement avec le modèle standard, c'est-à-dire avec le fait de faire le produit par cet espace non-commutatif et fini, qui lui aussi va bouger en fonction de z. C'est-à-dire que la géométrie de cet espace va être fonction de la variable z, puisqu'on a la renormalisation. Alors on est encore très très loin du compte, mais si vous voulez, en tout cas, en tous les cas, ce que l'on voit, c'est qu'on voit typiquement cet échange qu'il y a entre les mathématiques et la physique. Alors c'est un échange qui va dans toutes les directions, mais je pense qu'on aurait bien tort de dire que d'un côté, on a les mathématiciens qui font leurs équations, etc., qui prennent un petit problème de physique, puis essayent de le résoudre de manière rigoureuse, et d'un autre côté, on a la physique. Non ! En fait, on est tous confrontés au même problème. Et ce même problème, c'est le monde dans lequel on vit.

Et c'est ce monde dans lequel on vit qui est la source de la géométrie. Et une des choses les plus fascinantes, je l'avais sur les transparents, mais je n'ai pas eu le temps d'en parler si vous voulez, c'est à quel point, en fait, on s'aperçoit au bout d'un moment que le problème de comprendre la géométrie des nombres premiers n'est pas du tout un problème disjoint du problème de la compréhension de l'espace-temps. C'est-à-dire qu'il y a des reflets, il y a des choses qui se produisent, il y a ce qu'on appelle le groupe de Weil, qui correspond à la théorie de Galois, etc.

Le même auditeur : C'est passionnant de vous écouter. J'ai l'impression que j'ai un peu compris. Je voudrais poser une question peut-être encore plus naïve mais qui est liée à ma première question. J'aurais eu tendance à penser que cette formule si compliquée dans laquelle on reconnaissait quelques notations était construite de façon ascendante, à partir de l'observation et de la donnée, entre autres, de particules.

Or, dans votre dernier discours, j'ai eu l'impression de comprendre qu'une vision extérieure ou au-dessus permettait d'obtenir quelque chose qui éventuellement ferait découvrir qu'il y a une particule qu'on avait loupée. Laquelle de ces deux façons de dire les choses est la plus proche ?

ALAIN CONNES : Non, non, attention : mon point de vue est le suivant. Mon point de vue est intermédiaire entre les deux.

C'est-à-dire que je n'essaie pas de deviner. Il y a certaines théories qui essayent de deviner comment l'espace-temps devrait être. Je n'essaie pas du tout de faire ça. Ce que je dis, c'est que j'ai un cadre plus flexible pour la géométrie, je pars de cette formule et j'essaie de l'écrire de manière infiniment simple mais de manière géométrique. En fait, c'est la combinaison des deux. Mais si, par exemple, il se faisait qu'au CERN, on découvre de nouveaux raffinements, etc., la première chose qu'il faudrait comprendre, c'est "est-ce que ces raffinements sont compatibles avec cette vision géométrique des choses ?". C'est une approche entre les deux. C'est une approche qui ne consiste pas à essayer de deviner la pensée divine, etc., et de savoir pourquoi l'espace-temps... Non, pas du tout. C'est une approche très pragmatique.

J'admire beaucoup chez les physiciens les choses qui sont testées par l'expérience, et qui sont des calculs extrêmement sophistiqués. Pour moi, je ne connais pas beaucoup de physique, mais je connais deux endroits de la physique qui sont comme ça. Ces deux endroits sont le modèle standard, d'une part, et la renormalisation, d'autre part.

J'ai toujours été fasciné, si vous voulez, par le fait qu'on savait que ces choses ont à voir avec la Nature, puisqu'elles ont été testées avec cette précision faramineuse. Donc, on sait qu'elles ont à voir avec la Nature, d'accord, et c'est encore plus merveilleux si elles ont à voir avec des mathématiques qui sont des mathématiques extrêmement élaborées. Et c'est effectivement comme ça que ça se produit.

Et donc, à travers toutes ces étapes, en particulier avec Dirk Kreimer, avec l'intuition de Cartier, etc., on a compris maintenant, donc, qu'il y avait ce lien avec la théorie de Galois, enfin cette extension de la théorie de Galois, de la renormalisation. Bien sûr, les physiciens savent que la renormalisation est une théorie de l'ambiguïté. Ils le savent au départ.

ÉDOUARD BRÉZIN : Oui, mais non, si tu permets les commentaires du physicien, d'abord, je trouve que ta formule compliquée, comme tu dis, est injuste. Jamais les physiciens n'y seraient arrivés, s'ils n'avaient pas derrière, des principes extrêmement simples qui permettent d'écrire cette formule toute simple, qui sont des principes de symétrie de jauge non-abélienne, qui permettent de l'écrire en une ligne. Quand on cherche à développer ce que ça signifie pour faire un calcul, c'est vrai qu'in fine, il faut faire ça, mais jamais on n'y serait arrivés autrement et qu'ils partent d'observation, quand même, de la Nature. Donc ça, c'est le premier point.

Deuxième point, j'ai deux questions qui me gênent par rapport à ce que tu dis. La première, c'est que les physiciens savent que le modèle standard n'est qu'un modèle effectif et limité, qu'il ne peut pas prétendre être un modèle fondamental, même si pour l'instant il n'existe aucune contre-observation expérimentale qui le mette en défaut, nous savons qu'il porte de manière interne sa propre mort.

Je vois mal, dans l'approche que tu veux, comment c'est contenu... Et ma dernière question sera sur ton groupe de Galois cosmique des constantes de couplage, qui contient comme sous-groupe à un paramètre le groupe de renormalisation habituel, est-ce que tu es certain qu'il contient autre chose ? Je vais prendre un exemple. Lorsqu'on a une théorie invariante par dilatation, nous savons qu'elle est invariante également par tout le groupe conforme, mais à l'exception de la dimension 2, l'ensemble des autres symétries sont automatiquement appliquées, donc ça n'ajoute rien de nouveau d'ajouter ce groupe plus général. Est-ce que tu es certain que tu as ajouté des choses qui ont un sens dynamique concret ?

Alain Connes : Oui. Alors, je répondrai d'abord à la première question. La première question sur le modèle standard, disons que ce qui se produit, c'est la chose suivante. C'est que bien sûr, cette théorie ne prétend pas avoir la réponse ultime sur l'espace-temps ; ce qu'elle prétend simplement, c'est formuler géométriquement les connaissances que l'on a, à l'heure actuelle, sur l'espace-temps. D'accord ? C'est-à-dire qu'elle prétend dire la chose suivante, elle prétend dire que l'espace de Minkowski est une approximation qui aurait été parfaitement valable si on s'était restreint à l'électrodynamique.

C'est à dire que l'espace de Minkowski aurait été la réponse si l'on avait seulement les interactions électromagnétiques. D'accord ? Ce que dit ce modèle, d'accord ? Ce que dit cette géométrie, simplement, elle ne dit pas du tout que le modèle standard est la réponse ultime, mais elle dit qu'aux échelles de l'ordre de 10^{-16}, 10^{-17}, 10^{-18} centimètres, voilà ce que l'on voit au niveau géométrique. C'est tout. D'accord ? Et donc, si tu veux, elle prétend donc donner un cadre à la géométrie qui adapte à, qui absorbe si tu veux, ce que l'on voit à cette échelle et le rend simple.

Alors maintenant tu me dis bien sûr le modèle standard est basé sur des principes de symétrie comme les symétries de jauge, bien entendu. Mais où est-ce que ces principes interviennent justement ? Ils interviennent de la manière suivante, qui est très très compréhensible ; la symétrie de jauge se rajoute à la symétrie d'Einstein, par les difféomorphismes. Donc en fait, en gros, si tu veux, pour simplifier les choses, on a deux groupes de symétries : on a le groupe des difféomorphismes et on a le groupe des symétries de jauge.

Et alors, ce n'est pas difficile de comprendre que l'un agit sur l'autre, c'est à dire que si on regarde les transformations de jauge, ce sont des transformations qui vont dépendre du point de l'espace-temps, d'accord, et que si on agit par difféomorphisme, elles vont être chamboulées entre elles. Alors c'est ce qu'on appelle un produit semi-direct, c'est un peu comme le groupe de Poincaré, qui est le produit semi-direct du groupe des translations par le groupe de Lorentz. Alors ce n'est pas difficile de comprendre que si on voulait que les choses soient purement gravitationnelles, il faudrait que ce groupe-là soit purement le groupe des difféomorphismes ; c'est normal. C'est à dire que les gens pourraient se dire “on va chercher un espace” et c'est ce qu'ils ont fait dans la théorie de Kaluza-Klein, dont le groupe des difféomorphismes corresponde à ce produit semi-direct.

Or les mathématiques ont cela de très convaincant, c'est qu'il y a des théorèmes généraux en mathématiques, c'est à dire qu'il y a des théorèmes qui vous disent que, quelle que soit la variété que vous prendrez, si vous regardez la composante connexe de son groupe des difféomorphismes, c'est ce qu'on appelle un groupe simple (un groupe simple, c'est un groupe qui ne peut pas se casser en deux groupes, comme ça). Donc on sait, pour sûr, si vous voulez, que si l'on cherche parmi les théories de Kaluza-Klein de quelque sorte que ce soit, et si l'on n'essaye pas de tricher, c'est-à-dire de dire que les transformations vont ce qu'on appelle "préserver les fibres", eh bien à ce moment-là, on est coincé. On est coincé, et on ne trouvera jamais un groupe comme ça. Or, ça, c'est le point de départ de la théorie : si on prend une algèbre non-commutative, et si on regarde son groupe des difféomorphismes, eh bien, il contient toujours les difféomorphismes intérieurs, c'est à dire les transformations $x \to uxu^{-1}$, d'accord, qui est un sous-groupe normal, et qui a exactement cette structure de produit semi-direct. Et ce qui est étonnant, c'est que la terminologie mathématique, ce qu'on appelle les automorphismes intérieurs, coïncide avec la terminologie physique, qu'on appelle les symétries internes. Donc c'est ça le point de départ. Le point de départ, c'est que l'idée que l'on a de la géométrie est une idée trop, comment dire, corsetée, d'accord, et que même dans les théories qui prétendent être des généralisations, etc., eh bien ce sont des théories qui en fait sont constamment, en fait, corsetées par la même idée d'espace géométrique, qui est une idée beaucoup trop restreinte ; donc, c'est ça, l'idée. Si tu veux, l'idée fondamentale, ce n'est pas que bien sûr on va jeter les principes de symétrie, qui sont les principes de géométrie, mais c'est qu'on va les rendre entièrement géométriques, et entièrement gravitationnels. C'est à dire que l'action dont je parlais, n'est pas une action qui à un bout de théorie de jauge, Yang-Mills, etc., elle s'écrit une fois pour toutes, elle s'écrit en un seul bloc, c'est une action purement gravitationnelle. C'est une action qui dans le cas de l'espace de Minkowski, etc., ou dans le sens de l'espace de l'électrodynamique, redonnerait exactement l'action d'Einstein, c'est tout. Elle ne donnerait rien d'autre, elle ne donnerait pas de terme de jauge.

Un auditeur : Et la supersymétrie ?

Alain Connes : Alors, la supersymétrie n'apparaît pas, je ne veux pas parler de la supersymétrie, puisque bon, je veux dire... elle n'apparaît pas, d'accord. Donc, ce que l'on a, c'est un principe, qui permet de passer de manière naturelle, c'est très simple à comprendre, du secteur fermionique, c'est le secteur fermionique du modèle standard qui spécifie la géométrie. Et il y a un procédé, qui est entièrement mathématique, qui permet de passer, entièrement de manière canonique, de la partie fermionique à la partie bosonique, mais qui n'est pas la supersymétrie.

Alors, tu avais posé une deuxième question, c'était sur... Je ne me souviens pas.

Édouard Brézin : La question c'était, est-ce que tu es certain que ce groupe de Galois cosmique contient plus que simplement le zéro de la fonction β habituelle ?

Alain Connes : Non, alors, je peux te dire ce qu'il contient. D'abord, si tu veux, il y a une fonction β par constante de couplage.

Or, dans ce groupe-là, justement dans le groupe intermédiaire qui est au milieu, qui est le groupe qui est associé à l'algèbre de Hopf des graphes, etc., il y a une seule fonction β, qui va s'envoyer, par les différentes applications, vers les différentes fonctions β. Alors, en gros, le groupe de Galois cosmique, ce qu'il contient, ce sont les composantes homogènes de cette fonction β par puissance de $\hbar$, en gros. Et il contient l'algèbre de Lie qu'elles engendrent.

Et ce qui est nouveau, et ce qui n'était absolument pas dans la littérature ordinaire, c'est le fait qu'il y a une algèbre de Lie. Et justement, que ce groupe est engendré par l'algèbre de Lie des composantes de la fonction β. Et si tu veux, le point essentiel, dont je n'ai pas, bien sûr, eu le temps de parler, c'est un théorème qui est, je pense, dû à 't Hooft et à David Gross, et qui dit qu'on peut calculer les contre-termes dans la régularisation dimensionnelle, avec la soustraction minimale, uniquement en termes de la fonction β.

Donc, tout est basé là-dessus. Sur le fait que les contre-termes sont indépendants de ce qu'on appelle le paramètre massif μ, etc. Donc, tout est basé là-dessus.

C'est basé sur un tas de formules. Et si tu veux, le fait que, justement on puisse écrire, une fois pour toutes, les contre-termes, à partir de ce groupe cosmique, vient de là. Donc, c'est ça, l'idée.

Alors, je veux dire, au moins, ça a un mérite, si tu veux, c'est que, pour les mathématiciens, c'est un paradis, parce qu'on relie à des théories qu'on connaît bien, comme la théorie de Galois, etc. Et ensuite, on s'attend à ce que le potentiel de la théorie de Galois... J'en ai discuté avec Ramis. Je veux dire, on a l'exemple de l'impossibilité de résoudre le problème des trois corps à partir de la théorie de Galois différentielle, on s'attend à ce qu'on puisse transplanter ces idées de la théorie de Galois, de la théorie de Galois différentielle, au cas de la renormalisation. D'accord ? Il y a un autre aspect, dont je ne parle pas, qui est extrêmement important.

Ce sont les travaux de Bloch, Kreimer et Esnault, sur l'aspect théorie des nombres. C'est-à-dire que les transcendants qui apparaissent en théorie des champs, on sait bien que $\zeta(3)$ intervient dans le calcul du moment anormal de l'électron, eh bien, sont gouvernés par ce groupe de Galois cosmique. C'est-à-dire, c'est la théorie des motifs de Grothendieck, qui est derrière, et qui gouverne ces nombres transcendants.

Donc je veux dire, il y a un paysage merveilleux à découvrir. On ne sait pas si ce paysage aura tant que ça de conséquences sur la physique. Ce n'est pas ça qui nous intéresse.

Ce qui nous intéresse, c'est de comprendre.

Édouard Brézin : Je propose qu'on revienne aux questions terre-à-terre, si on peut. Oui, monsieur.

Un auditeur : Ma question concerne les nombres premiers. Et c'est une question qui concerne la conjecture de Goldbach. Alors, la conjecture de Goldbach a le gros avantage d'être extrêmement simple dans son énoncé, ou bien d'être suffisamment simple, non seulement pour être comprise des jeunes qui sont ici, mais même de beaucoup plus jeunes.

Et cette conjecture est que "tout entier pair supérieur à 2 peut être mis sous la forme de la somme de deux nombres premiers et deux seulement". Alors, je voulais savoir si c'est toujours une conjecture, d'abord. Et ensuite...

Alain Connes : Je ne suis pas vraiment la personne la mieux placée, je dois vous dire, pour vous répondre, à l'instant t, je ne saurais pas vous dire. Je ne pense pas, non, ce n'est pas démontré.

Édouard Brézin : Est-ce qu'il y a d'autres questions ? Oui, Denis ? (Ah, monsieur Tits, oui).

Denis : Dans tout ce dont on parle, on ne parle jamais du fait que, dans le fond, on ne sait pas ce qu'est la gravité. C'est bon, vous avez parlé, il y a quand même la force d'Archimède, des choses comme ça. Enfin, tout ça, c'est quand même assez vague quand on pense que la Terre tourne à une vitesse, elle fait un tour en un jour, et que par conséquent, si on était, nous, sur une ligne, qui nous paraît comme une vraie rectiligne, on se trouverait à plusieurs mètres de hauteur en l'espace de quelques secondes. Alors, ça, on ne paraît pas en tenir compte du tout.

Alain Connes : Je ne pense pas que je puisse répondre à ça.

Édouard Brézin : Oui, mais c'est de la physique. Monsieur Tits, oui.

L'auditeur :*(on lui a ostensiblement tourné le dos)* Ça me paraît important de tenir compte de ça.

Jacques Tits : Il y avait ici un problème de physique[5] J'ai deux petites questions : à propos du modèle standard. C'est la plus grande formule que j'ai jamais vue de ma vie. Je voudrais te demander s'il y a derrière cette formule une structure telle que, par exemple, toi, rentré chez toi et que tu oublies tout ça, tu peux la reconstruire facilement.

Alain Connes : Oui, bien sûr, si tu veux. Oui, oui. Au niveau... Non, non, non. Ce qu'il faut voir... Bon, on a déjà eu la discussion, si tu veux, là-dessus. C'est-à-dire que, d'une part, il y a les principes de physique comme invariance de jauge, etc., dont on parlait.

Mais, en fait, ce que je disais simplement, si tu veux, c'est qu'on peut l'écrire géométriquement, mais après, il y a un calcul à faire. Il faut faire ce calcul. Ce calcul, c'est un calcul d'équation de la chaleur, etc., d'un développement qui donne quantité de termes.

Donc, en fait, on peut l'écrire de manière infiniment simple, je pense plus simple qu'en disant... on a le principe de Yang-Mills. On écrit un potentiel quartique pour les Higgs. On écrit le couplage minimal entre les Higgs et les champs de jauge, ce que, normalement, il faudrait dire...

On écrit le couplage de Yukawa entre les champs de Higgs et les fermions, etc. Ce que je dis, moi, simplement, si tu veux, c'est qu'on a un espace. Je donne cet espace.

Après, pour cet espace, il faut faire le calcul de ce que c'est que la gravitation. On obtient une partie interne dans les $g_{\mu\nu}$, dans la gravitation. Et ensuite, on a un principe d'action qui est extrêmement simple, qui est simplement le nombre de valeurs propres.

Ce nombre de valeurs propres, on le calcule par un calcul mathématique, qui est compliqué, mais qui va donner tous ces termes-là.

Édouard Brézin : Monsieur Tits, c'est un peu comme les équations de Maxwell. Quand Maxwell les écrivait, il écrivait 12 équations, puisqu'il y avait 4 équations pour des trivecteurs.

[5] *(parlant vraisemblablement du micro, qui n'a pas fonctionné du premier coup)*

Aujourd'hui, nous l'écrivons en une demi-ligne. $d\mu\, f_{\mu\nu} = g_{nu}$. Voilà l'ensemble des 12 équations.

Alain Connes : Alors, attention, Cette simplification, elle était déjà présente. C'est-à-dire que les indices, ils étaient déjà là. On n'a pas développé les indices. C'est-à-dire que dans l'équation que tu as vue, il y avait, par exemple, je ne sais pas moi, il y avait des indices g, μ, etc. Tous ces indices-là, on fait la somme sur ces indices. Donc ça, je ne l'ai pas développé, heureusement.

Donc effectivement, si tu veux... Et ce qui est vrai, c'est que si tu écris Maxwell... Je vais peut-être la sortir, cette formule. Non, parce que je veux dire... Justement, on entend trop facilement dire par les physiciens... C'est vrai ce qu'ils disent. C'est parfaitement vrai. C'est parfaitement vrai qu'on l'obtient à partir des principes, etc. Mais il faut quand même l'avoir vue une fois. D'accord ? Il faut quand même... C'est une espèce de Pierre de Rosette, on peut dire, d'une certaine manière.

Voilà. Alors, la voilà, la formule. Alors maintenant, vous pouvez me poser des questions sur cette formule, d'accord[6].

---

[6]

Bosons : A_μ, W_μ, Z^0, g_μ
Quarks : u^κ, d^κ
Leptons : e^λ, ν^λ
Higgs : H, ϕ^0, ϕ^+, ϕ^-
Masses : m_d, m_u, m_e, m_h, M_W
$g = \sqrt{4\pi\alpha}$, g_s (interaction forte)
$C_{\lambda\kappa}$: matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa
f^{abc} : constantes de $SU(3)$
Jauge de Feynman.
Les fantômes de Faddeev-Popov sont omis pour simplicité.*Note de la transcriptrice : Dans la page suivante, est fournie une expression de la formule en question (je n'ai pas vérifié s'il s'agissait exactement de la formule présentée dans l'exposé d'Alain Connes).*

Notations de Martinus Veltman :

Bosons : A_μ, W_μ, Z^0, g_μ
Quarks : u^κ, d^κ
Leptons : e^λ, ν^λ
Higgs : H, ϕ^0, ϕ^+, ϕ^-
Masses : m_d, m_u, m_e, m_h, M_W
$g = \sqrt{4\pi\alpha}$, g_s *(interaction forte)*
$C_{\lambda\kappa}$ *: matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa*
f^{abc} *: constantes de* $SU(3)$
Jauge de Feynman.
Les fantômes de Faddeev-Popov sont omis pour simplicité.

$$
\begin{gathered}
\mathcal{L}_{SM} = \\
-\frac{1}{2}\partial_\nu g^a_\mu \partial_\nu g^a_\mu - g_s f^{abc}\partial_\mu g^a_\nu g^b_\mu g^c_\nu - \frac{1}{4} g_s^2 f^{abc} f^{ade} g^b_\mu g^c_\nu g^d_\mu g^e_\nu - \partial_\nu W^+_\mu \partial_\nu W^-_\mu - M^2 W^+_\mu W^-_\mu - \\
\frac{1}{2}\partial_\nu Z^0_\mu \partial_\nu Z^0_\mu - \frac{1}{2c_w^2} M^2 Z^0_\mu Z^0_\mu - \frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial_\mu A_\nu - igc_w[\partial_\nu Z^0_\mu (W^+_\mu W^-_\nu - W^+_\nu W^-_\mu) - \\
Z^0_\nu (W^+_\mu \partial_\nu W^-_\mu - W^-_\mu \partial_\nu W^+_\mu) + Z^0_\mu (W^+_\nu \partial_\nu W^-_\mu - W^-_\nu \partial_\nu W^+_\mu)] - igs_w[\partial_\nu A_\mu (W^+_\mu W^-_\nu - \\
W^+_\nu W^-_\mu) - A_\nu (W^+_\mu \partial_\nu W^-_\mu - W^-_\mu \partial_\nu W^+_\mu) + A_\mu (W^+_\nu \partial_\nu W^-_\mu - W^-_\nu \partial_\nu W^+_\mu)] - \\
\frac{1}{2} g^2 W^+_\mu W^-_\mu W^+_\nu W^-_\nu + \frac{1}{2} g^2 W^+_\mu W^-_\nu W^+_\mu W^-_\nu + g^2 c_w^2 (Z^0_\mu W^+_\mu Z^0_\nu W^-_\nu - Z^0_\mu Z^0_\mu W^+_\nu W^-_\nu) + \\
g^2 s_w^2 (A_\mu W^+_\mu A_\nu W^-_\nu - A_\mu A_\mu W^+_\nu W^-_\nu) + g^2 s_w c_w [A_\mu Z^0_\nu (W^+_\mu W^-_\nu - W^+_\nu W^-_\mu) - \\
2A_\mu Z^0_\mu W^+_\nu W^-_\nu] - \frac{1}{2}\partial_\mu H \partial_\mu H - 2M^2\alpha_h H^2 - \partial_\mu\phi^+\partial_\mu\phi^- - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi^0\partial_\mu\phi^0 - \beta_h\left[\frac{2M^2}{g^2} + \frac{2M}{g}H + \right. \\
\left. \frac{1}{2}(H^2+\phi^0\phi^0+2\phi^+\phi^-)\right] + \frac{2M^4}{g^2}\alpha_h - g\alpha_h M[H^3+H\phi^0\phi^0+2H\phi^+\phi^-] - \frac{1}{8} g^2\alpha_h[H^4+(\phi^0)^4+ \\
4(\phi^+\phi^-)^2 + 4(\phi^0)^2\phi^+\phi^- + 4H^2\phi^+\phi^- + 2(\phi^0)^2H^2] - gMW^+_\mu W^-_\mu H - \frac{1}{2} g\frac{M}{c_w^2} Z^0_\mu Z^0_\mu H - \\
\frac{1}{2} ig[W^+_\mu(\phi^0\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu\phi^0) - W^-_\mu(\phi^0\partial_\mu\phi^+ - \phi^+\partial_\mu\phi^0)] + \frac{1}{2} g[W^+_\mu(H\partial_\mu\phi^- - \\
\phi^-\partial_\mu H) - W^-_\mu(H\partial_\mu\phi^+ - \phi^+\partial_\mu H)] + \frac{1}{2} g\frac{1}{c_w}(Z^0_\mu(H\partial_\mu\phi^0 - \phi^0\partial_\mu H) + M(\frac{1}{c_w}Z^0_\mu\partial_\mu\phi^0 + \\
W^+_\mu\partial_\mu\phi^- + W^-_\mu\partial_\mu\phi^+) - ig\frac{s_w^2}{c_w} M Z^0_\mu (W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) + igs_w M A_\mu (W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) - \\
ig\frac{1-2c_w^2}{2c_w} Z^0_\mu(\phi^+\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu\phi^+) + igs_w A_\mu(\phi^+\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu\phi^+) - \frac{1}{4} g^2 W^+_\mu W^-_\mu [H^2+(\phi^0)^2+ \\
2\phi^+\phi^-] - \frac{1}{8} g^2\frac{1}{c_w^2} Z^0_\mu Z^0_\mu [H^2+(\phi^0)^2+2(2s_w^2-1)^2\phi^+\phi^-] - \frac{1}{2} g^2\frac{s_w^2}{c_w} Z^0_\mu\phi^0(W^+_\mu\phi^- + W^-_\mu\phi^+) - \\
\frac{1}{2} ig^2\frac{s_w^2}{c_w} Z^0_\mu H(W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) + \frac{1}{2} g^2 s_w A_\mu\phi^0(W^+_\mu\phi^- + W^-_\mu\phi^+) + \frac{1}{2} ig^2 s_w A_\mu H(W^+_\mu\phi^- - \\
W^-_\mu\phi^+) - g^2\frac{s_w}{c_w}(2c_w^2-1) Z^0_\mu A_\mu\phi^+\phi^- - g^2 s_w^2 A_\mu A_\mu\phi^+\phi^- + \frac{1}{2} ig_s\lambda^a_{ij}(\bar{q}^\sigma_i\gamma^\mu q^\sigma_j) g^a_\mu - \bar{e}^\lambda(\gamma\partial + \\
m^\lambda_e)e^\lambda - \bar{\nu}^\lambda(\gamma\partial + m^\lambda_\nu)\nu^\lambda - \bar{u}^\lambda_j(\gamma\partial+m^\lambda_u)u^\lambda_j - \bar{d}^\lambda_j(\gamma\partial+m^\lambda_d)d^\lambda_j + igs_w A_\mu[-(\bar{e}^\lambda\gamma^\mu e^\lambda) + \\
\frac{2}{3}(\bar{u}^\lambda_j\gamma^\mu u^\lambda_j) - \frac{1}{3}(\bar{d}^\lambda_j\gamma^\mu d^\lambda_j)] + \frac{ig}{4c_w} Z^0_\mu[(\bar{\nu}^\lambda\gamma^\mu(1+\gamma^5)\nu^\lambda) + (\bar{e}^\lambda\gamma^\mu(4s_w^2-1-\gamma^5)e^\lambda) + \\
(\bar{d}^\lambda_j\gamma^\mu(\frac{4}{3} s_w^2 - 1 - \gamma^5)d^\lambda_j) + (\bar{u}^\lambda_j\gamma^\mu(1-\frac{8}{3} s_w^2+\gamma^5)u^\lambda_j)] + \frac{ig}{2\sqrt{2}} W^+_\mu[(\bar{\nu}^\lambda\gamma^\mu(1+\gamma^5)U^{lep}_{\lambda\kappa}e^\kappa) + \\
(\bar{u}^\lambda_j\gamma^\mu(1+\gamma^5)C_{\lambda\kappa}d^\kappa_j)] + \frac{ig}{2\sqrt{2}} W^-_\mu[(\bar{e}^\kappa U^{lep}_{\kappa\lambda}\gamma^\mu(1+\gamma^5)\nu^\lambda) + (\bar{d}^\kappa_j C^\dagger_{\kappa\lambda}\gamma^\mu(1+\gamma^5)u^\lambda_j)] + \\
\frac{ig}{2M\sqrt{2}}\phi^+[-m^\kappa_e(\bar{\nu}^\lambda U^{lep}_{\lambda\kappa}(1-\gamma^5)e^\kappa) + m^\lambda_\nu(\bar{\nu}^\gamma U^{lep}_{\lambda\kappa}(1+\gamma^5)e^\kappa)] + + \frac{ig}{2M\sqrt{2}}\phi^-[m^\lambda_e(\bar{e}^\lambda U^{lep\dagger}_{\lambda\kappa}(1+ \\
\gamma^5)\nu^\kappa) - m^\kappa_\nu(\bar{e}^\lambda U^{lep\dagger}_{\lambda\kappa}(1-\gamma^5)\nu^\kappa)] - \frac{g}{2}\frac{m^\lambda_\nu}{M} H(\bar{\nu}^\lambda\nu^\lambda) - \frac{g}{2}\frac{m^\lambda_e}{M}H(\bar{e}^\lambda e^\lambda) + \frac{ig}{2}\frac{m^\lambda_\nu}{M}\phi^0(\bar{\nu}^\lambda\gamma^5\nu^\lambda) - \\
\frac{ig}{2}\frac{m^\lambda_e}{M}\phi^0(\bar{e}^\lambda\gamma^5 e^\lambda) - \frac{1}{4}\bar{\nu}_\lambda M^R_{\lambda\kappa}(1-\lambda^5)\hat{\nu}_\kappa - \frac{1}{4}\overline{\bar{\nu}_\lambda M^R_{\lambda\kappa}(1-\lambda^5)\hat{\nu}_\kappa} + \frac{ig}{2M\sqrt{2}}\phi^+[-m^\kappa_d(\bar{u}^\lambda_j C_{\lambda\kappa}(1- \\
\lambda^5)d^\kappa_j) + m^\lambda_u(\bar{u}^\lambda_j C_{\lambda\kappa}(1+\lambda^5)d^\kappa_j)] + \frac{ig}{2M\sqrt{2}}\phi^-[m^\lambda_d(\bar{d}^\lambda_j C^\dagger_{\lambda\kappa}(1+\gamma^5)u^\kappa_j) - m^\kappa_u(\bar{d}^\lambda_j C^\dagger_{\lambda\kappa}(1- \\
\lambda^5)u^\kappa_j)] - \frac{g}{2}\frac{m^\lambda_u}{M}H(\bar{u}^\lambda_j u^\lambda_j) - \frac{g}{2}\frac{m^\lambda_d}{M}H(\bar{d}^\lambda_j d^\lambda_j) + \frac{ig}{2}\frac{m^\lambda_u}{M}\phi^0(\bar{u}^\lambda_j\gamma^5 u^\lambda_j) - \frac{ig}{2}\frac{m^\lambda_d}{M}\phi^0(\bar{d}^\lambda_j\gamma^5 d^\lambda_j)
\end{gathered}
$$

Alors en particulier, il y a une erreur[7]. Il y a une erreur. Il y a une erreur quelque part, hein, Brézin ?... Il y a une erreur quelque part.

Édouard Brézin : Il n'y a pas de terme quartique dans ton potentiel de Higgs ?

Alain Connes : Si, si... si, si, si.

Édouard Brézin : Où est-ce qu'il est ?

Alain Connes : Si, si, il y a des termes quartiques dans le potentiel de Higgs. Bien sûr.

Édouard Brézin : Ah, je ne les vois pas...

Alain Connes : Si, si, ils y sont. H^2 ici. Si, si, ils y sont, les termes quartiques.

Si, si, ici, tu vois. $H^2, \varphi^+, \varphi^-$. Ça, c'est un terme quartique de Higgs. D'accord ? Non, non, il n'y a pas de problème.

Il y a des termes qui... Je pourrais te poser des questions. Par exemple, est-ce que tu saurais me dire qu'est-ce que c'est que cette constante ? Ça, je ne l'avais pas trouvée β_H. Est-ce que tu saurais me dire ce que c'est ? Les autres, ce n'est pas difficile.

Mais celle-là, est-ce que tu saurais me dire ce que c'est ? Je suis dur, hein, quand même.

Édouard Brézin : Attends, mais c'est la masse d'huile...

Alain Connes : Non, absolument pas. Non, non, ce n'est pas la masse d'huile. C'est ce qu'on appelle la constante de *tadpole*. C'est la constante de *tadpole*, ce qu'on appelle. C'est le terme linéaire. C'est le terme linéaire qu'on annule en disant que le *tadpole* est nul. D'accord ? D'accord.

Qu'est-ce que c'est que M ? M... D'accord. Dans cette formule, il faut bien voir que, tout de même, dans cette formule, si vous voulez, on a la sommation sur les indices. C'est-à-dire les gluons, par exemple, ici, ils ont un indice de couleur qui est le petit a, et ils ont l'indice du bas.

Donc, je veux dire, on n'a pas développé. Alors, si vous connaissez les termes, vous vous apercevrez que ce n'est pas si compliqué que ça, parce qu'au bout d'un moment, on reconnaît les termes, etc., etc. Ce n'est pas ça, la question.

Ce n'est pas ça, la question. La question, pour un mathématicien, ce n'est pas ça du tout. D'accord ? Ce n'est pas de refaire le trajet en sens inverse.

Le mathématicien, il n'a pas du tout envie de refaire en sens inverse le trajet du physicien. Bien sûr que non. D'accord ? Il a envie de prendre cette formule, bon, et il a envie de la comprendre

[7]Pour retrouver, peut-être, la formule du modèle standard de l'exposé, se reporter à cet article d'Alain Connes sur arxiv https://arxiv.org/pdf/hep-th/0608226.pdf, pages 10 et 11.

sous forme géométrique, qui est autre.

Sinon, justement, il ferait le trajet en sens inverse, c'est tout ce qu'il ferait. Monsieur Kahane.

Jean-Pierre Kahane : Oui, j'ai une question sur les nombres premiers. André Weil considérait que, malgré le succès d'HAdamard et de la Vallée-Poussin, la théorie des nombres premiers n'avait plus rien à voir avec la théorie des fonctions. Il a introduit l'idée que c'était un problème de géométrie algébrique.

Alain Connes : Absolument.

L'auditeur : Et c'est exactement le cadre dans lequel tu as fait ton exposé.

Alain Connes : Tout à fait.

Jean-Pierre Kahane : Il n'empêche... qu'il y a des progrès récents dans la théorie des nombres premiers, qui retournent au point de vue de l'analyse classique, avec la théorie ergodique, avec l'analyse de Fourier, les résultats de Green et Tao, sur les nombres premiers en progression arithmétique.

Quel est ton sentiment sur les modes d'attaque de la théorie des nombres premiers ?

Alain Connes : Disons que mon sentiment est le suivant. Mon sentiment, j'aurais une déception terrible s'il s'avérait qu'un jour, quelqu'un démontre, par exemple cette hypothèse de Riemann, par des moyens, comment dire, qui ne débouchent pas sur une nouvelle théorie. C'est-à-dire que pour moi, l'intérêt d'un problème mathématique n'est pas de savoir si oui ou non, c'est vrai.

Puisqu'au fond, la majorité d'entre nous sommes convaincus que la fonction ζ de Riemann a les zéros où il faut, et un physicien dirait que l'hypothèse de Riemann est vraie. Donc, je vais dire, le problème n'est pas tellement de savoir si le problème est vrai ou pas, non, pour moi, l'intérêt d'un problème mathématique, justement, c'est comme force motrice pour développer de nouvelles théories. Or, s'il s'avérait que, bon, on arrive à le résoudre par un biais, etc., et qui ne débouche pas sur une nouvelle théorie, mais je ne prétends pas du tout que ce que tu dis, si tu veux, si par exemple cette théorie, c'était une théorie ergodique, convenable, un peu dans le sens de Furstenberg, etc., ce serait merveilleux, bien sûr, tout le monde applaudirait.

Mais ce que j'espère, si tu veux, c'est que ma familiarité avec le problème, j'avais d'autres transparents, etc., me fait voir qu'il y a un espace. Bon, en fait, à nouveau, c'est une espèce d'espace non-commutatif, etc., qui donne, en fait, à la formule explicite, la valeur d'une formule de trace. C'est vraiment une formule de trace.

Donc, pour moi, en fait, un problème comme ça est un problème qui est une motivation extraordinaire pour développer la géométrie, découvrir de nouvelles choses, et justement, j'espère qu'à l'occasion de ce problème de la conjecture de Riemann, en fait, on découvrira la vraie géométrie de la droite. Parce qu'il s'agit là du corps des nombres rationnels. Donc, ça montre l'étendue de notre ignorance.

Je veux dire, autant on sait quelque chose à propos des corps finis et des corps de fonctions, etc., autant on a une ignorance incroyable à propos du corps des rationnels. Donc, qu'est-ce que ça veut dire ? Ça veut dire, bon, eh bien, on écrit 36 traités, etc., mais en fait, on ne comprend pas même la chose la plus simple, d'accord ? Puisqu'on n'arrive pas à résoudre ce problème. Et ce que j'espère, c'est qu'on ne le résoudra pas de biais, d'accord ? C'est-à-dire qu'on découvrira les concepts qu'il faut justement, au moment, et à propos de cette résolution.

Édouard Brézin : Est-ce qu'il y a d'autres questions ? Oui, Roger Balian.

Roger Balian : Le modèle standard contient, je ne sais pas exactement combien, 15, 16...
Alain Connes : 19.

Roger Balian : ...paramètres indépendants. Est-ce que la vision géométrique que tu mets dessous risque de les réduire ?

Alain Connes : D'accord. Alors, si tu veux, la manière dont les paramètres... D'abord, il y a deux types de paramètres. L'essentiel des paramètres dont tu parles interviennent dans la métrique sur l'espace fini. C'est-à-dire qu'en gros, si tu veux, la géométrie, c'est la géométrie standard sur l'espace ordinaire.

On a cet espace fini. Cet espace fini a une géométrie qui est donnée par son opérateur de Dirac qui, ici, est la matrice de Yukawa. La matrice de Yukawa ne contient pas tous, mais la plupart, des paramètres du modèle standard.

D'accord ? Et en particulier, elle ne contient pas, par exemple, le couplage quartique du Higgs, des choses comme ça. Alors, ce que donne le modèle, il donne, entre guillemets, parce que ce n'est pas vraiment une prédiction puisque, justement, comme le disait très bien Brézin, on ne sait pas du tout ce qu'il va advenir à des énergies plus grandes. Mais si on l'extrapole, ce qui est idiot, je veux dire, si on l'extrapole à l'énergie d'unification, eh bien, il donne une valeur pour la constante de couplage quartique du Higgs. Donc, il donne, en gros, une valeur de la masse du Higgs de l'ordre de 160 GeV, ou quelque chose comme ça.

Mais ce n'est pas une prédiction. Et ce n'est pas une prédiction parce que, justement, c'est stupide de penser que rien ne va se produire lorsqu'on va à des énergies plus grandes. D'accord ? Donc, ça réduit un peu.

Par exemple, ça donne le même angle de Weinberg. Ici, on avait les constantes C_w et S_w qui sont le cosinus et le sinus de l'angle de Weinberg. Ça donne le même angle de Weinberg que pour l'unification de la SU(5), bon.

Donc, ça donne un certain nombre de choses, qui ne sont pas contradictoires, qui ne sont pas... D'accord. Mais ce qu'il faut bien voir, c'est exactement comme le disait Brézin. C'est un modèle effectif de la géométrie de l'espace-temps.

Il ne faut pas y voir plus. Ce n'est pas du tout une réponse à des choses faramineuses, etc. Pas du tout.

C'est un modèle qui consiste à dire qu'on a une géométrie qui est plus facile, plus appropriée, etc. Mais on va regarder ce que ça donne. Et ça donne, effectivement, que les paramètres libres du modèle standard, tels que la matrice de couplage de Yukawa ou de Kobayashi-Maskawa, etc., eh bien, elles sont contenues dans la partie géométrique, d'accord ? Donc, elles donnent la géométrie de l'espace fini. D'accord ?

Édouard Brézin : Très bien. Je peux t'interroger sur les nombres premiers ?

Alain Connes : Bien sûr.

Édouard Brézin : Il y a cette infinité de zéros de la fonction ζ.

Alain Connes : Oui.

Édouard Brézin : Apparemment, expérimentalement, ils sont donnés par des valeurs propres de matrice aléatoire.

Alain Connes : Tout à fait.

Édouard Brézin : Est-ce que tu as une... Est-ce que ça te paraît une propriété intéressante ?

Alain Connes : Bien sûr. C'est une propriété incroyablement intéressante. J'avais des transparents plus loin, etc., qui consistaient justement à comparer... Oh, je me demande... Tu me permets de...

Édouard Brézin : Oui, oui. D'accord.

Alain Connes : Bon, j'avais un transparent après qui consistait justement à partir de là.

Alors, il y a une chose qui est effectivement merveilleuse qui se produit, c'est que les gens n'ont pas pu ne pas être frappés par l'analogie, c'est exactement ce que vient de dire Brézin, entre le nombre de valeurs propres d'un opérateur hamiltonien plus petit que E, d'accord, et le nombre de zéros de la fonction ζ, qui est tracée ici, c'est la fonction d'escalier, plus petit qu'une énergie E donnée.

D'accord. Mais alors, les gens ont été arrêtés pendant très longtemps par le fait que si on regarde la partie oscillatoire, c'est-à-dire une partie moyenne que Riemann avait calculée comme étant

$$\frac{E}{2\pi}\left(\log\frac{E}{2\pi}-1\right)+\frac{7}{8}+o(1).$$

D'accord. Et les gens ont été arrêtés pendant très longtemps par le fait que si on compare le cas de Riemann avec le cas des systèmes hamiltoniens, il y a un signe qui cloche. Il y a le signe moins.

D'accord.

Alors, ça, ça a été résolu en partant précisément du fait qu'en physique, il y a deux types de spectres.

Il y a ce qu'on appelle les spectres d'émission qui sont les raies blanches sur un fond noir. D'accord. Il y a les spectres, comme le spectre de Fraunhofer, qu'on voit lorsqu'on regarde les rayons du soleil qui sont ce qu'on appelle les spectres d'absorption.

Donc, en fait, la réalisation spectrale des zéros de ζ, c'est une réalisation par spectre d'absorption. Et alors, une des choses qui est remarquable, c'est qu'il y a un espace, effectivement. Bon, je n'ai pas voulu en parler.

C'est un espace qu'on appelle *l'espace des classes d'adèles*. Et c'est un espace qui contient justement les orbites, exactement comme les orbites du Frobenius dans le cas des nombres premiers. Mais si on regarde cet espace, eh bien, on trouve exactement le calcul de Riemann avec $\frac{E}{2\pi}\left(\log\frac{E}{2pi}-1\right)$ par un calcul de mécanique quantique.

D'accord. Et avec un spectre d'absorption. C'est-à-dire que ce qu'on trouve, c'est qu'on a la lumière blanche moins des raies spectrales qui ont été absorbées.

Si on fait le calcul de manière plus précise, on trouve le $\frac{7}{8}$ et le petit $o(1)$, exactement comme dans Riemann. D'accord. Donc, en fait, on commence à avoir... Alors, bien sûr, il y a bien d'autres résultats.

Je veux dire, il y a toutes sortes de gens qui ont travaillé sur les matrices aléatoires, la correspondance, etc., avec ζ. Mais c'est une des choses qui sont extrêmement fascinantes. Justement, c'est le fait qu'il y a cette comparaison qui n'est pas du tout triviale, qui n'est pas du tout évidente puisqu'il y avait énormément de gens qui avaient essayé d'écrire, justement, la formule explicite de Riemann comme une formule de trace.

La raison pour laquelle ça ne marchait pas, c'est ce signe mois. D'accord ? On pourrait parler pendant des heures là-dessus. Mais ça bouge.

Édouard Brézin : Je ne vois plus de mains qui se lèvent. Si, monsieur Tits ?

Jacques Tits : Tu as fait allusion à une formule de Birkhoff. Est-ce que tu peux dire de quoi il s'agit ?

Alain Connes : Alors, la formule de Birkhoff, c'est la formule qui, disons, lorsqu'on regarde un fibré holomorphe sur la sphère, d'accord, eh bien, on peut se dire qu'on peut voir un fibré holomorphe sur la sphère comme étant obtenu en prenant un fibré trivial en haut et un fibré trivial en bas, et en les recollant.

Et on recolle ces fibrés par une application qui va d'un cercle vers le groupe GL_n. D'accord ? Alors, la décomposition de Birkhoff consiste à faire le chemin inverse. C'est-à-dire, lorsqu'on vous donne une application d'un cercle, qui est un hémisphère, par exemple, vers le groupe GL_n, ça consiste à écrire cette application comme le rapport entre une fonction qui est holomorphe dans l'hémisphère du bas et une fonction qui est holomorphe dans l'hémisphère du haut, d'accord ?

D'accord ? Et alors, ce qui est étonnant, c'est que, dans le cas de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, ce n'est pas toujours possible. C'est la théorie de Grothendieck-Birkhoff, etc., des fibrés holomorphes sur la sphère qui ont des obstructions topologiques, etc. Mais lorsqu'on regarde des groupes qui sont des groupes comme le groupe des graphes de Feynman, des groupes unipotents, c'est toujours possible et c'est donné par une formule récursive et la merveille, c'est que cette formule récursive, c'est exactement la formule de BPHZ, de Bogoliubov, Parasiuk, Hepp et Zimmermann.

C'est exactement identique à ça.

Jacques Tits : En fait, c'est ce que je pensais, c'est une formule tout à fait analogue à une formule de double classe.

Alain Connes : Oui, c'est ça.

Jacques Tits : On transforme la grosse cellule d'un côté en la grosse cellule de l'autre côté.

Alain Connes : Oui, c'est exactement ça, c'est tout à fait ça.

Édouard Brézin : Bien, je crois qu'il nous reste à remercier Alain Connes. Je crois que c'était une très belle illustration de la puissance des mathématiques.