Conférence d'Alain Connes, séance publique de l'Académie des Sciences, dans le cadre des Conférences 5 à 7 : Mathématiques et imagination (6 février 2024, 17h30).

Françoise Combes : Bonsoir tout le monde, nous allons commencer. Donc nous avons le plaisir d'entendre aujourd'hui Alain Connes qui est Professeur émérite au Collège de France et à l'Institut des Hautes Études Scientifiques. Il est membre de la section mathématique de l'Académie des Sciences. Il a reçu la médaille Fields en 1982, le prix Crafoord en 2001, et la médaille d'or du CNRS en 2004. Alain a révolutionné entièrement la théorie des algèbres de von Neumman et résolu la plupart des problèmes posés dans ce domaine. Il s'est aussi illustré en géométrie non-commutative et dans les espaces mathématiques de la renormalisation. Il va nous parler aujourd'hui de mathématiques et imagination, un exposé qui s'annonce passionnant, notamment de la théorie de l'ambiguité de Galois ou bien de la partie non déchiffrée de la Pierre de Rosette [1]. Donc Alain.

Alain Connes : Merci. Merci. Donc je vais vous parler de mathématiques et imagination, et je vais dire, je vais commencer, on peut difficilement en parler sans expliquer, si vous voulez, le début des nombres imaginaires en mathématiques. Alors ça commence, disons, vers 1500 et Scipione del Ferro était à Bologne et avait trouvé une formule pour résoudre les équations du 3ième degré. Ensuite ce qui s'est produit, c'est qu'il y a eu une période où Scipione del Ferro n'avait pas divulgué sa formule et un de ses disciples, qui était Antonio Maria del Fiore, avait provoqué Tartaglia : ce n'était pas un duel, mais c'était une joute mathématique. Donc chacun des deux donnait à l'autre 30 équations du 3ième degré et euh celui qui gagnait, cétait celui qui en résolvait le plus et celui qui gagnait, gagnait 30 banquets ; donc vous voyez le degré de civilisation de cette époque. C'était en 1535 et Tartaglia, une semaine avant le concours, a lui aussi trouvé une formule pour résoudre les équations du 3ième degré, d'accord. Alors vous verrez qu'en fait, c'est à travers toutes ces tribulations qu'en fait, les formules qui avaient été obtenues étaient des formules qui marchaient dans le cas où l'équation du 3ième degré a une seule solution réelle ; donc la solution réelle est bien définie, il y a une formule et c'est une formule qui, dans ce cas-là, ne fait intervenir que des nombres réels. Donc il n'y a pas de difficulté véritable.

Alors ce qui est extrêmement paradoxal, c'est que quand il y a trois racines réelles, ça paraît totalement absurde il y en a beaucoup plus que dans le cas où il y en a une, quand il y a trois racines réelles, à ce moment-là, la formule ne marche pas. Donc ça paraît quelque chose de vraiment extrêmement mystérieux.

Et ce qui s'est produit, donc, c'est que c'est à cette occasion là qu'un disciple de Cardan a vraiment inventé les nombres complexes. Alors il faut savoir qu'on parle des formules de Cardan mais comme très souvent en mathématiques, le nom qui est donné à ces formules ne correspond absolument pas aux personnes qui les ont découvertes, parce que les personnes qui les ont découvertes dans ce cas, ce sont Scipione del Ferro et Tartaglia. Et ce qui s'est produit c'est que Cardan, qui était à Milan, avait invité Tartaglia, il voulait lui tirer les vers du nez, Tartaglia ne voulait absolument pas divulguer sa formule mais après un certain temps, etc., il a fini par céder en demandant à Cardan de jurer que jamais il ne dévoilerait sa formule. Et il la lui a dévoilée, voyez le degré de civilisation,

[1] Pierre de Rosette des mathématiques.

Transcription de la vidéo visionnable ici : https://www.youtube-nocookie.com/embed/Y0-tt85Xhlg.
Transcription : Denise Vella-Chemla (assistée d'outils, Wondershare Filmora, et Turboscribe).

en lui donnant un poème, qui était en fait très difficile à déchiffrer, mais qui contenait la formule en question.

Alors ce qui s'est passé après, c'est assez moche, c'est que Cardan a appris que Scipione del Ferro avait aussi la formule et du coup, il s'est dit qu'il était dédouané, qu'il pouvait divulguer la formule. Maintenant on appelle ça *formule de Cardan*, ce qui est une rigolade, d'accord.

Alors, donc, en fait, Rafael Bombelli était un disciple de Cardan et c'était un ingénieur, et si vous voulez en tant qu'ingénieur, bah, il savait très bien ce que c'était que les nombres réels ; en fait pour lui c'étaient les nombres positifs qui comptaient, et à un moment, il était mathématicien aussi, bien sûr, et à un moment donné, dans sa vie, si vous voulez, c'était un ingénieur qui s'occupait de drainer des marais. Et à un moment donné dans sa vie, il n'avait plus de travailleur à sa disposition ; donc en fait il a été reçu dans une villa qui s'appelait la Villa Rufina [2] et il est resté là 3 ans, et pendant 3 ans, il avait toute la liberté de penser. Il avait un frère aussi qui était mathématicien, il avait toute la liberté de penser et d'écrire et c'est à ce moment-là qu'il a écrit son ouvrage qu'il a appelé l'*Algebra* dont je vous montre l'image ici. Et c'est à cette occasion-là qu'il a découvert vraiment les nombres complexes. Alors pour les mathématiciens pour qu'ils ne s'ennuient pas trop, j'ai mis en haut une petite formule, vous voyez, avec $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$, $\sqrt[3]{4+\sqrt{-11}}-\sqrt[3]{4-\sqrt{-11}}$ et pour ne pas qu'ils s'ennuient, il faut qu'ils trouvent quels sont ces deux nombres, d'accord, alors, et puis, je vous dis également une chose. Il ne faut jamais retenir la formule pour la solution de l'équation de 3$^{\text{ième}}$ degré, ce n'est pas ça qu'il faut retenir, on ne fait pas des maths en retenant une formule, jamais. On retient une idée et quelle est l'idée, et à partir de cette idée, vous pouvez tout de suite trouver la formule : l'idée c'est que $(u+v)^3$ est égal à $3uv(u+v)+u^3+v^3$. Ça suffit.

Donc en fait ce qu'a fait Bombelli, il a écrit son ouvrage et bien sûr, dans la deuxième formule, vous voyez qu'il y a une racine carré d'un nombre négatif, alors ça, Cardan le manipulait, mais pas vraiment et on voit bien que si on essaie de manipuler naïvement les racines carrées de nombres négatifs, ça ne marche pas parce que par exemple, vous réfléchissez à ce que vaut $\sqrt{-2}\times\sqrt[3]{-8}$, vous allez trouver 4, alors qu'en fait, c'est -4. Donc en fait, Bombelli a mis une vingtaine d'années à accepter une idée qui est une idée un peu folle, vous savez, je suppose que vous avez tous encore dans votre champ visuel toutes ces affiches qui disent "plus ou moins de SUV", hein je suppose que vous les avez encore tous devant vous, d'accord, eh bien Bombelli a dit "plus de moins" c'est incroyable, c'est-à-dire que Bombelli a inventé quelque chose qu'il a appelé "più di meno" et avec ce "più di meno" qu'il a inventé, il a réussi à complètement résoudre le cas de l'équation du 3$^{\text{ième}}$ degré dans le cas pour lequel on dit que le discriminant est positif, c'est-à-dire dans le cas où vous avez les racines carrées de nombre négatif. Et pendant un très long temps, il a cru que ce qu'il faisait n'avait pas de sens et en fait, il dit, vous voyez, dans les trois dernières lignes, il dit que ça paraîtra quelque chose d'entièrement sophistiqué, de plus sophistiqué que réel. Et telle était son opinion pendant longtemps jusqu'à ce qu'en fait, il trouve la clé.

Et quelle a été la clé, pour lui, vous voyez, ce n'est pas si simple que ça, parce que même si vous avez les nombres complexes, après il faut prendre des racines cubiques de nombre complexes, et quand vous prenez des racines cubiques de nombres complexes, vous tombez directement sur le problème de la trisection de l'angle dont on sait qu'elle n'est pas résoluble à la règle et au compas.

[2] à Frascati au sud de Rome

Et Bombelli est tombé directement là-dessus et il n'a pu résoudre ce problème que quand il a lu des textes qui disaient que Platon avait réussi la duplication du cube de manière concrète en utilisant la géométrie plane. Et c'est à partir de là que Bombelli a compris ce qui se passait et il a écrit les règles de multiplication pour son nouveau symbole, on peut dire, mais dont il avait compris qu'il était fondamental. Et pour un mathématicien, bien sûr le mathématicien reconnaîtra le nombre i qui est tel que son carré vaut -1 mais Bombelli lui devait écrire la table de multiplication et la table de multiplication c'est :

- più via più di meno, fà più di meno. $(+1) \times (+i) = +i$;
- meno via più di meno, fà meno di meno. $(-1) \times (+i) = -i$;
- meno via meno di meno, fà più di meno. $(-1) \times (-i) = +i$;
- più di meno via meno di meno, fà più, $(+i) \times (-i) = +1$,
- più di meno via più di meno fà meno, $(+i) \times (+i) = -1$,
- mais ce qui est le plus intéressant, c'est que meno di meno via meno di meno, ça fait meno $((-i) \times (-i) = -1)$; donc vous voyez c'est extraordinaire, c'est extraordinaire d'avoir réussi à donner ses règles à partir pratiquement, si vous voulez, de rien, et à partir de ces règles bien sûr, il a pu presque de manière concrète résoudre l'équation du $3^{\text{ième}}$ degré quand justement les racines sont trois racines réelles et que finalement, si vous voulez, on arrive à les donner mais ce qui surgit dans la manière de les donner, c'est une ambiguité parce que comme elles sont trois, on ne sait pas laquelle est laquelle donc on voit par là, si vous voulez, la théorie de Galois qui est la théorie de l'ambiguïté vers laquelle on se dirige.

C'est un exercice, en théorie de Galois, de démontrer que dans le cas qu'on appelle le cas irréductible, le casus irreducibilis des géomètres italiens, il n'est pas possible de donner une formule pour les racines qui n'invoque que des racines des radicaux réels ; ça c'est formidable, parce que ça veut dire qu'il était strictement impossible à ces géomètres de résoudre l'équation sans inventer les nombres complexes, d'accord.

Donc ça, c'est quelque chose qui est formidable, c'est un exercice à faire si vous connaissez la théorie de Galois, je vous le recommande, ce n'est pas un exercice tout à fait évident mais ça se fait.

Donc on va passer à Galois, et on peut dire sur Galois, j'ai fait un exposé à l'Académie lors du $200^{\text{ième}}$ anniversaire de sa naissance, il y a quelques années, et j'avais beaucoup insisté sur le fait que, contrairement à ce que les gens racontent, Augustin Cauchy avait défendu Galois et en fait, Augustin Cauchy avait parlé deux fois à l'Académie, en juin 1829, alors que Galois avait 17 ans, ce qui est absolument incroyable et ensuite, vous connaissez l'histoire.

Mais du vivant de Galois, un seul de ses articles, pratiquement, bon, il y avait deux articles qui étaient moins intéressants, mais un article de lui a été publié en 1830 dans le Bulletin de Ferussac et ce qui est extraordinaire, je vais vous expliquer, ce qui est extraordinaire dans cet article, c'est que Galois va infiniment plus loin que les nombres complexes : ce que fait Galois, c'est qu'il prend un, il faut dire... je vous parle des nombres complexes, le nom de nombre complexe est dû à Gauss, et en fait c'est Descartes qui les a appelés nombres imaginaires ; mais maintenant, on les appelle tous des nombres complexes.

Et ce que fait Galois, c'est la chose suivante : Gauss avait bien vu, bien sûr, que lorsqu'on regarde des équations diophantiennes etc, on a tout intérêt à les regarder modulo un nombre premier. Alors quand on les regarde modulo un nombre premier, en langage moderne, on obtient ce qu'on appelle un corps.

Et ce que fait Galois, c'est extraordinaire, c'est qu'il essaie de résoudre des équations dans ce corps. Donc il écrit qu'il prend un polynôme à coefficients dans ce corps, il essaie de le résoudre ; il suppose qu'il est irréductible, c'est-à-dire qu'on ne peut pas le factoriser, c'est exactement la formule qu'il écrit, et ce qu'il fait, c'est qu'il crée des imaginaires ; voyez la dernière phrase, c'est la classification de ces imaginaires, et la réduction au plus petit nombre possible qui va nous occuper. Donc ce que fait Galois, c'est qu'il rajoute ces imaginaires, en fait, comme par exemple dans le cas le plus simple, c'est le cas où on part du corps des entiers pairs ou impairs c'est-à-dire de ce qu'on appelle les entiers modulo 2. On peut les multiplier, on peut les additionner, tout ça, c'est très simple, et il y a une extension ; la première fois qu'elle a été obtenue, c'est par Galois, qui est le corps a quatre éléments. Et Galois le définit simplement en regardant l'équation qui est $x^4 = x$.

Bon, il démontre que tout marche bien, et alors on pourrait dire "Bon, Galois a inventé les imaginaires. Quel était le problème qu'il cherchait à résoudre en faisant cela ?" Et ce qui est absolument phénoménal, c'est que quand on lit vraiment l'article de Galois, il y a un théorème que Galois énonce et qui est le suivant :

> *quand on prend une équation, qu'il appelle primitiv,e dont le degré est une puissance d'un nombre premier, par exemple 4, eh bien, pour que l'équation en question soit résoluble par radicaux, il faut et il suffit que l'on puisse indexer ses racines par les éléments du corps que Galois avait créé, c'est-à-dire par les imaginaires de Galois, de telle sorte que le groupe de Galois qui est le groupe d'ambiguïté qui qui vous empêche de distinguer une racine de l'autre, soit contenu dans le produit semi-direct du groupe affine du corps par le Frobenius ;*

Ça veut dire que Galois connaissait le Frobenius, il connaissait toutes ces choses-là, et si vous voulez comprendre ce théorème, il faut que vous regardiez le cas le plus simple, qui est le cas de l'équation du $4^{\text{ième}}$ degré. Si vous regardez l'équation du $4^{\text{ième}}$ degré, vous allez vous apercevoir comme on sait qu'elle est résoluble bien sûr, c'était Ferrari qui avait donné des formules, eh bien vous vous apercevrez que pour la résoudre, il faut indexer les racines par le corps des imaginaires de Galois F_4 et à ce moment-là, vous verrez que le groupe de toutes les permutations, c'est simplement justement le produit semi-direct du groupe affine par le Frobenius.

Alors une autre chose qui montre, si vous voulez, quelle était la philosophie de Galois et à quel point cette philosophie est orthogonale au, comment dire, à la machine, la philosophie de Galois, il s'était aperçu et je vous l'avais montré quand j'avais parlé à l'Académie il y a une dizaine d'années, que les calculs qu'il proposait de faire étaient infaisables, strictement infaisables, ils étaient infaisables parce que j'avais montré que le premier coefficient d'un polynôme qu'il fallait calculer pour suivre Galois et j'avais demandé aux académiciens de me donner en gros la taille du numérateur et du dénominateur, eh bien, le numérateur et le dénominateur avaient 500 chiffres chacun, et pourtant c'était un calcul le plus simple possible. Donc Galois bien sûr ne pouvait pas faire ces calculs, la machine peut le faire maintenant, très facilement bien sûr, mais que disait Galois, il disait : "sautons à pieds joints sur les calculs" et grâce à son imagination, à son cerveau, il était capable d'entrevoir ce à quoi allaient ressembler les résultats et de travailler sur eux comme s'ils étaient devant lui ; et ça c'est quelque chose qui est merveilleux.

Donc si vous voulez, on voit bien qu'il y a là, dans l'œuvre de Galois, il y a derrière quelque chose d'assez amusant, enfin amusant, d'une certaine manière, c'est que les anglo-saxons donnent le nom de Galois aux corps qu'il a trouvés, ils les appellent les corps de Galois, et ils les dénotent en anglais GF, pour Galois Field. En France, on hésite, pour la raison évidente que c'est presque. . . [3] c'est gênant de parler du corps de Galois. Donc euh en fait, en France, et très souvent, on les dénote grand F indice q ou q est une puissance d'un nombre premier (F_{p^k}). Et alors pour les mathématiciens, je dirais la chose suivante, qui est assez souvent peu connue, c'est qu'en fait, on est encore, sauf dans le cas où q est une puissance de 2, on en est encore au stade de Galois, c'est-à-dire qu'on définit les corps F_q en résolvant des équations polynomiales, mais on a le choix entre ces équations et ce n'est pas canonique : ça n'est canonique que pour les puissances de 2 et ça, ça a été fait par un mathématicien qui s'appelle John Conway, et qui a construit explicitement la clôture algébrique de F_2 en utilisant l'ordinal Oméga puissance Oméga puissance Oméga ($\Omega^{\Omega^{\Omega^{\cdots}}}$).

Donc voilà pour Galois. Alors un peu plus tard que Galois, il y a eu une autre découverte absolument incroyable, qui a été faite et toutes ces découvertes sont toujours faites, ayant en tête un problème extrêmement difficile que les gens veulent résoudre ; comment dire ? L'imagination en mathématique n'a de sens que si elle est motivée par un problème simple à poser mais extrêmement difficile à résoudre et dans le cas de Kummer, c'était le problème de Fermat, bien sûr, et si vous voulez, j'ai pas besoin d'écrire la formule, vous imaginez facilement que quand on écrit $x^n+y^n=z^n$, si vous pouvez factoriser x^n+y^n et comme vous avez de l'autre côté z^n, eh bien vous allez pouvoir comparer les facteurs premiers. Or, c'est facile de factoriser x^n+y^n en utilisant des racines de l'unité. Donc c'est ce que faisait Kummer ; ça avait l'air de marcher etc.

Sauf que malheureusement, on n'avait pas l'unique décomposition en facteurs premiers et l'exemple le plus simple, c'est l'exemple qui est écrit en bas : c'est-à-dire le nombre 6 qui s'écrit 2×3 mais quand on travaille dans le corps qui contient $\sqrt{-5}$ c'est-à-dire $i\sqrt{5}$, eh bien on peut aussi l'écrire, on peut aussi le factoriser d'une autre manière. Alors ce qui est formidable, c'est que Kummer avait en tête la chimie, et donc euh, il savait qu'en chimie, il y a des corps purs et que c'est très très important de décomposer un corps chimique en corps purs. Et à son époque, on était incapable d'isoler le fluor. Donc le fluor était d'une certaine manière un corps un peu *idéal*, qu'on n'arrivait pas à isoler. Donc il a pris cette inspiration-là et à partir de cette inspiration-là, il a inventé ce qu'il appelle les *nombres idéaux*.

Alors ça paraît incroyable, mais avec des nombres idéaux il arrive à retrouver l'unique factorisation de 6, en utilisant des nombres qu'on peut appeler j, u et v : le nombre 2 c'est j^2, le nombre 3 c'est uv, le nombre $1+i\sqrt{5}$ c'est ju et le nombre $1-\sqrt{5}$ c'est jv. Donc si vous voulez, là, il y a un pas qui est franchi, mais c'est un pas qui est franchi en utilisant une analogie, qui est l'analogie avec la

[3] *Note de la traductrice : le mot non proféré par Alain Connes est peut-être le mot "sacrilège".*

chimie. Bien sûr, maintenant on sait isoler le fluor, c'est très difficile. Mais cette... comment dire... cette idée de Kummer par analogie a en fait donné naissance à un concept capital en algèbre qui est le concept non pas de *nombre idéal* mais comme on dit d'*idéal*. Et ça, c'est un concept dû à Dedekind. C'est arrivé des années après, c'est arrivé environ vers 1870, alors que Kummer, c'était vers 1848, ou quelque chose comme ça. Voilà. Alors bien sûr, il a résolu le problème de Fermat dans pas mal de cas, bien sûr, ça a donc... été... bon. Mais on voit bien là, finalement, que Kummer avait en tête une analogie, et quand il y a une analogie, bon, les choses, d'une certaine manière, sont plus faciles en ce sens qu'une analogie, bien sûr, elle n'est jamais fidèle, c'est-à-dire qu'on n'a jamais une correspondance exacte : vous n'avez pas de correspondance entre la chimie et les nombres algébriques. Mais, quand on arrive à traduire une partie du texte, d'un côté ou de l'autre, on avance.

Alors en fait, tout ça, ça a été extrêmement bien décrit par André Weil, dans une lettre à sa sœur, et aussi dans un article, qu'il a écrit en 1960, et qui traite, si vous voulez, de de la métaphysique et des mathématiques. Alors donc André Weil, lui, a fait la comparaison avec la Pierre de Rosette, et euh, comment dire, derrière les symboles qui sont écrits au-dessus de la Pierre de Rosette, vous savez que la Pierre de Rosette, elle contient trois textes, il y a un texte en bas, qui est un texte en grec ancien mais très compréhensible, il y a un texte au milieu qui est en démotique qui est relativement compréhensible, et il y a un texte en haut qui est en hiéroglyphe. Alors dans les symboles qui sont écrits au-dessus de ces textes, la personne qui est derrière, c'est un mathématicien extrêmement important qui est Bernard Riemann. Et lui a complètement compris le texte grec, il a développé ce qu'on appelle maintenant la théorie des surfaces de Riemann ou la théorie des courbes sur les corps des complexes et c'est aussi lui qui a créé le symbole ζ que vous voyez en haut, au sens où, bon, il avait déjà été défini par Euler, mais c'est lui qui a énoncé, si vous voulez, un problème très difficile, et ce problème très difficile a été pour André Weil en particulier, une motivation fondamentale.

Alors il faut bien savoir que les mathématiciens ont une technique devant un problème très, très difficile. Et je pense que c'est une technique que vous devriez tous connaître et avoir dans votre poche. La technique est la suivante : quand on est confronté à un problème extrêmement difficile la première chose à faire, ça paraît idiot, mais c'est de généraliser ce problème, ça paraît incroyable parce qu'au lieu d'un problème, maintenant, vous en avez des myriades. Mais quand vous avez correctement généralisé le problème, vous pouvez ensuite le spécialiser. Et quand vous le spécialisez, vous allez pouvoir le spécialiser à un cas beaucoup plus simple qui va vous permettre de comprendre ce cas très simple et de pouvoir progresser. Et ensuite vous pouvez progresser, et si vous avez formulé le problème de telle sorte que les divers cas se correspondent, vous allez pouvoir enfin procéder par analogie.

Alors ce que dit André Weil, donc, c'est que le mathématicien qui étudie ses problèmes a l'impression de déchiffrer une inscription trilingue. Euh, je pense qu'il n'avait jamais vu la Pierre de Rosette parce qu'il dit dans la première colonne se trouve la théorie riemanienne des fonctions algébriques au sens classique donc ça, ça correspond à la partie du bas de la Pierre de Rosette ; la troisième colonne, c'est-à-dire, en fait, celle qui est en haut dans la Pierre de Rosette, hein, c'est la théorie arithmétique des nombres algébriques, et la colonne du milieu est celle dont la découverte est la plus récente : elle contient la théorie des fonctions algébriques sur un corps de Galois. Donc lui, il utilise un corps de Galois et effectivement, ce qu'a fait André Weil, donc, c'est de résoudre l'analogue, si vous voulez, de cette hypothèse de Riemann dans le cas des corps de fonctions.

Alors donc, voilà où on en est. Alors maintenant, on va passer à Grothendieck et aux schémas. Donc ce qui s'est produit, si vous voulez, c'est que cette idée des idéaux dans les anneaux commutatifs, elle a permis de franchir, dans les mains de Grothendieck, un pas absolument essentiel mais qui, si on ne comprend pas la signification, peut paraître, comme les mathématiciens disent, "trivial". C'est vrai qu'il y a une...

On peut transformer la théorie des anneaux commutatifs en la dualisant, et en parlant d'un schéma affine, mais lorsqu'on dit ça, on n'a rien fait. On n'a rien fait. Pourquoi ? Parce que les deux théories sont les mêmes, sauf que les flèches vont dans des sens opposés. Alors évidemment, la chose importante, c'est qu'on peut recoller ces schémas affines mais surtout, ce qui est fondamental, et en fait, l'idée est due à Pierre Cartier, c'est que les points d'un schéma affine correspondent aux idéaux premiers. Donc cette notion, ce concept, qui est dû à Dedekind, qui vient de Kummer, en fait, nous donne l'idée des points, nous permet de relier quelque chose de géométrique, c'est-à-dire les points d'un espace, avec quelque chose qui est entièrement algébrique, c'est-à-dire un anneau commutatif.

Alors quel est l'intérêt pour ce qui nous intéresse. Eh bien l'intérêt, c'est que voilà, maintenant, grâce à cette notion de schéma, les trois langues dont on a parlé tout à l'heure sont des schémas réguliers. Les objets de ces trois langues, c'est-à-dire ce qu'on étudie dans les trois langues : l'anneau des entiers, une courbe sur un corps fini, un corps de Galois, ou une courbe sur le corps des complexes, dans les trois cas, ce sont des schémas réguliers de dimension 1. Donc on a une unification déjà, c'est un petit peu comme... si vous voulez, si en regardant la Pierre de Rosette, les gens avaient dit voilà trois langues anciennes, on n'a pas tellement plus avancé que ça, d'accord, mais en tout cas, on a pu les nommer de la même manière : on a pu dire dans les trois cas, ce sont des schémas réguliers de dimension 1.

Alors Grothendieck est allé beaucoup plus loin que ça, et Grothendieck, grâce à ça, si vous voulez en fait, grâce à l'idée de Grothendieck de la cohomologie étale, qui en fait est venue d'un exposé que faisait Serre au séminaire Chevalley et dans lequel Grothendieck a compris que l'idée de Serre, qui était l'idée d'avoir des ouverts qui sont *au-dessus* de l'espace, et pas *dans* l'espace lui permettait de définir la cohomologie qu'il cherchait. Alors en fait, ce qu'a fait Grothendieck, il a étendu la théorie de Galois, il faut comprendre que l'innovation extraordinaire de Grothendieck, ça a été de... d'ailleurs, je veux dire, dans les écrits de Grothendieck, on voit bien à quel point il est un admirateur fasciné de Galois, et ce qu'a fait Grothendieck, c'est qu'il a compris comment géométriser la théorie de Galois, mais de manière suffisante pour qu'elle s'étende aux schémas, et parmi ces schémas, bien entendu, il y a la colonne du haut qui est le schéma qu'on appelle, en jargon, $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$. Alors quand on calcule les choses en utilisant justement les idées de Grothendieck sur les revêtements étales etc., eh bien, on s'aperçoit d'une analogie.

Alors cette analogie, elle est née en gros en 1963, il y a très, très longtemps, et en fait je crois que c'est David Mumford qui a eu le premier l'idée, et ensuite Barry Mazur l'a beaucoup développée. Et d'ailleurs, ici, un des académiciens, Jean-Loup Waldspurger a beaucoup travaillé là-dessus. Mais c'est une analogie. Donc c'est une analogie, alors ça paraît incroyable : comment est-ce qu'il pourrait y avoir une analogie entre les nœuds, donc je pense que vous imaginez ce que c'est qu'un nœud, c'est le nœud au sens bête, hein, je veux dire, alors au sens mathématique, ça veut dire qu'on a plongé le cercle dans la sphère S^3, une analogie, donc, entre les nœuds et les nombres premiers. Alors c'est une analogie qui paraît extrêmement bizarre, bien sûr, ça ne veut pas dire qu'à chaque nœud, vous allez associer un nombre premier et réciproquement, ce serait ridicule, mais c'est une analogie. Eh bon, comme André Weil en parle, il parle si vous voulez de subtiles caresses de l'un à l'autre etc. et du fait qu'il n'y a jamais une correspondance exacte.

Et dans cette analogie, donc, en fait, ce qui se passe, c'est qu'on peut relier, par exemple, le fait que la sphère S^3 soit simplement connexe avec le fait qu'il n'y a pas d'extension non ramifiée de $\mathbb{Z}$ enfin (etc.) du corps des rationnels etc. etc. Je ne vais pas vous embêter avec ça, mais je vais lentement venir maintenant à des considérations auxquelles j'ai contribué et qui sont directement reliées à ça. Et la contribution est extrêmement récente. Donc en fait, ce qu'on va voir, c'est qu'exactement comme Grothendieck a étendu la théorie de Galois, euh, pour les schémas, eh bien la théorie du corps de classes, qui est une théorie tout à fait classique très, très importante, qui permet justement de calculer ce qu'on appelle l'extension abélienne maximale dans le cas des corps, se prolonge au schéma relié au corps des rationnels.

Alors ça, c'est un travail donc en collaboration avec Caterina Consani, et ce qu'il faut retenir, c'est l'évolution des mots... vous voyez... je parle de *l'espace des classes d'adèles*. Alors, tout à l'heure, on a parlé des *idéaux*. Eh bien, Claude Chevalley a compris qu'il y avait un moyen de comprendre ce qu'on appelle *les classes d'idéaux* avec ce qu'on appelle *le groupe des classes d'idèles*, qui sont construites à partir des complétés du corps et de quelque chose qui est très, très concret. Et à partir de là, je crois que c'est André Weil qui a donné le nom d'*adèles*, à quelque chose qui n'est plus un groupe mais qui a une propriété merveilleuse de compatibilité avec l'analyse, et qui contient les nombres rationnels et les adèles, si vous voulez, la propriété qu'elles ont, c'est de dire bonjour à l'analyse, parce qu'elles forment un anneau localement compact, mais qui est intimement relié au corps des rationnels, par le fait que les rationnels sont dedans et ils forment un groupe discret et cocompact, bon.

Alors en fait en 1996, j'avais introduit un espace qui est l'espace des classes d'adèles, parce que classiquement, ce qu'on prend c'est *le groupe des classe d'idèles*. Alors *l'espace des classes d'adèles*, donc, c'est la variante *additive* de ça, et ce dont je vais vous parler, c'est le fait que grâce à cet espace, on va comprendre beaucoup mieux le lien entre les nœuds et les nombres premiers. Et on va, en fait, étendre la théorie du corps de classes pour les schémas. Donc en fait, l'espace des classes d'adèles, donc, que j'avais introduit en 1996, si vous voulez, il donne déjà, c'est connu depuis longtemps, la réalisation spectrale des 0 de ζ comme une cohomologie H^1. Il donne les formules explicites de Riemann-Weil comme formules de trace, il donne la formule de Hasse-Weil pour ζ. Je m'excuse de ce langage technique mais je vais expliquer. Et surtout en fait, il donne, si vous voulez, l'action du groupe qui permet de comprendre la formule de Hasse-Weil comme un groupe de Galois ; mais c'est un groupe de Galois, comme on le verra, qui est relié à ce qu'on appelle la géométrie tropicale, c'està-dire qu'il est relié à ce qu'on appelle $(\mathbb{R}, +, \max)$. Et en fait, cet espace, l'espace X_q, si vous voulez, il est incroyablement simple à décrire, à nommer. Pourquoi ? Parce que c'est simplement l'espace des sous-groupes de rang 1 de la droite réelle. Vous prenez la droite réelle, quand je parle de sous-groupe de rang 1, j'entends par là que c'est un sous-groupe tel que si je prends deux éléments de ce sous-groupe, ils sont commensurables : c'està-dire un multiple entier de l'un est égal à un multiple entier de l'autre alors ça vous paraît un espace très simple ; quand on est un peu naïf, on a l'impression que cet espace est très simple, mais en fait, c'est un espace qui a exactement les mêmes propriétés que l'espace des feuilles d'un feuilletage, très, très, très difficile à comprendre, et c'est ce qu'on appelle un *espace non-commutatif*. Et la *géométrie non-commutative* est faite pour comprendre les espaces de cette nature exactement.

Alors, une découverte qu'on avait faite en 2014, avec Katia Consani, on s'était aperçu qu'en fait cet espace c'est-à-dire si vous voulez l'espace des sous-groupes de rang 1 de $\mathbb{R}$, c'est en fait exactement un espace de points d'un topos de Grothendieck. Et le topos de Grothendieck en question a une définition, cette fois remarquablement simple, parce que c'est le produit de la demi-droite réelle 0 à l'infini par l'action des entiers par multiplication, et ça, c'est quelque chose qu'on a appelé le *site des fréquences*, et qui est presque, si vous voulez, intégralement relié à la musique parce que vous savez que la musique, vous avez des fréquences, et que l'oreille est sensible à la multiplication des fréquences par 2 ou par 3, et le site des fréquences, il... comment dire... il mathématise cette chose-là, sous la forme d'un topos de Grothendieck, et quand on regarde les points de ce topos, on obtient exactement l'espace, le même espace que celui qui est décrit ici, qui est l'espace des classes d'adèles. Alors ce dont on s'est aperçu, il y a environ un mois avec Katia Consani, c'est qu'en fait, si on regarde la projection de l'espace des classes d'adèles, donc que j'appelle $X_{\mathbb{Q}}^{ab}$, sur ce topos de Grothendieck, eh bien, on obtient ce qu'il faut, exactement, pour pouvoir faire la théorie du corps de classes pour les schémas, et donc voilà ce qui se produit : ce qui se produit, c'est que d'abord, pour chaque nombre premier, il y a une orbite périodique, c'est-à-dire qu'il y a vraiment un cercle dans l'espace $X_{\mathbb{Q}}$, et quel est ce cercle ? Si je vous donne un nombre premier p, eh bien, il y a un anneau qui lui correspond, c'est l'anneau $\mathbb{Z}/\frac{1}{p}\mathbb{Z}$; ça correspond, en fait, au niveau complémentaire du nombre premier p, donc on regarde maintenant les sous-groupes de rang 1 dans $\mathbb{R}$ qui sont isomorphes aux groupes additifs de cet anneau, et on s'aperçoit qu'ils forment un cercle, et que ce cercle a pour longueur le logarithme de p ; donc pour chaque nombre premier, on a un cercle de longueur logarithme de p, et maintenant, quand on cherche à relever ce cercle dans l'espace des classes d'adèles, on s'aperçoit qu'on ne peut pas le relever, bien sûr, il y a ce qu'on appelle une monodromie, et cette monodromie, c'est exactement ce que donne l'action du Frobenius en p dans le groupe fondamental étale abélianisé du spectre de l'anneau local. Alors ça, ce sont des mots, mais pour bien comprendre l'analogie avec les nœuds, donc, on savait que c'était ça qu'il fallait obtenir, en terme de groupe fondamental étale, mais au niveau des nœuds, c'est facile, enfin relativement facile à comprendre, parce que si vous prenez deux nœuds, voilà, et qui sont enlacés dans ce qu'on appelle un entrelacement entre les deux, eh bien, pour le calculer, cet entrelacement, ce que vous faites, c'est que vous prenez le premier nœud, et vous essayez de le relever, dans le revêtement abélien du complémentaire du deuxième nœud, donc ça correspond exactement à ce qui se passe ici dans l'espace des classes d'adèles, et ça veut dire, si vous voulez, que maintenant, en fait, grâce à ça, euh, on a compris, enfin en tout cas, de mon côté, j'ai compris ce que j'avais trouvé, en fait en 1996, et ce que j'avais trouvé en 1996, ça n'était rien d'autre que l'extension de la théorie du corps de classes qui avant était purement limitée à Galois, l'extension du corps de classes aux schémas. Et bien sûr, à ce moment-là, si vous voulez, ça donne une lumière totalement différente sur ce qui avait été trouvé avant, et c'est comme ça que les mathématiques progressent, c'est-à-dire qu'au bout d'années et d'années et d'années, on s'aperçoit en fait qu'il y a un éclairage complètement nouveau qui apparaît, parce qu'on s'est posé une question, une question un peu insolite, qui était cette question de la relation entre les nœuds et les nombres premiers. Et il y a un autre élément, que je dis pour les mathématiciens, c'est qu'il y avait quelque chose qui m'avait toujours dérangé, qui était le fait que *les idèles sont denses dans les adèles*, or là, on a compris que cette densité, c'est exactement la densité de ce que Grothendieck appelle le point générique de $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ dans tout le spectre. Voilà.

Donc alors, j'en viens maintenant à un point sur lequel je veux arriver et auquel j'arrive, et c'est pour vous dire que c'est loin d'être fini. Et c'est loin d'être fini parce qu'ici, je cite Jacques Tits dans un article de 1956, dans lequel Jacques Tits parle (n'ayez pas peur) du corps à un élément. Donc ce que dit Jacques Tits, c'est, si vous voulez, pour un mathématicien, c'est une hérésie terrible, c'est-à-dire, il dit *(le corps à un élément, c'est)* le corps dans lequel 0 est égal à 1. Alors on ne voit pas trop qu'est-ce qu'on va pouvoir faire avec ça, d'abord. Mais bon, lui, sa motivation, c'était le fameux article de Chevalley sur les groupes algébriques, et il essayait de comprendre que quand on regarde les grandes séries de groupes finis, on a bien sûr toutes les séries avec des groupes simples qui proviennent des groupes sur les corps finis, et on a aussi tous les groupes alternés, sauf le groupe A_4 qui n'est pas un groupe simple. Donc toute cette série de groupes alternés, ça ne cadre nulle part, sauf si on admet qu'il y a un corps à un élément, oh la la ! Donc là, les mathématiciens poussent de hauts cris, sauf que quelques années plus tard, Yuri Manin et puis Christophe Soulé ont repris la question et l'idée de Manin était la suivante : il disait que finalement, il faut penser aux entiers comme à des polynômes sur un corps fini, mais bien sûr, ce n'est pas vrai. Et ce qu'il dit, c'est que si c'est le cas, à ce moment-là, on devrait faire des produits de Spec [4] etc. Alors, en suivant cette idée, Christophe Soulé a défini une fonction ζ qui est associée à un polynôme, et c'est à partir de la fonction ζ de Soulé qu'on a pu démontrer avec Katia Consani que la formule de Hasse-Weil s'étend à la fonction ζ de Riemann, mais ce n'est plus du tout une fonction polynôme,

[4] *Note de la transcriptrice : sur la diapositive projetée est notée un passage de l'introduction de l'article* Lectures on zeta functions and motives (according to Deninger et Kurokawa) *de Manin, l'auteur interroge dans l'introduction par la phrase :* "The central question we address can be provocatively put as follows : if numbers are similar to polynomials in one variable over a finite field, what is the analogue of polynomials in several variables ? Or, in more geometric terms, does there exist a category in which one can define "absolute Descartes powers" $\operatorname{Spec}Z \times \ldots \times \operatorname{Spec}Z$?"

mais c'est une distribution au sens de Schwartz. Et elle est très, très difficile. Et là, on revient à ce que disait André Weil, il dit :

> *Les mathématiciens du* XVI$^{\text{e}}$ *siècle avaient coutume de parler de la "métaphysique du calcul infinitésimal", de la "métaphysique de la théorie des équations", ils entendaient par là un ensemble d'analogies vagues, difficilement saisissables et difficilement formulables, qui néanmoins leur semblaient jouer un rôle important à un moment donné dans la recherche de la découverte mathématique.*
>
> *A. Weil, De la métaphysique aux mathématisques, 1960.*

Alors là, on pourrait dire, oui, tout ça, c'étaient des temps anciens, dans lesquels les mathématiciens n'avaient pas les outils pour arriver à donner un sens à une idée, eh bien, heureusement, ce n'est pas le cas, et si vous voulez, ce qui s'est produit, c'est que, euh, on n'a pas le droit, en mathématiques, d'inventer des choses comme ça, sans démontrer de théorèmes. Tant que vous n'avez pas démontré de théorème, personne ne vous dira que vous avez la bonne notion. Alors, on a trouvé, avec Katia Consani, comment il fallait utiliser le corps à un élément, on a trouvé ce truc-là, et on en a déduit une formule de Riemann-Roch pour l'anneau des entiers. C'est une formule qui est parfaitement analogue à la formule de Riemann-Roch dans les trois colonnes, ce ne sont pas des colonnes bien sûr, dans les trois parties de la Pierre de Rosette, et en fait, cette formule, ce qui s'est produit, c'est assez amusant, c'est qu'au départ, on n'avait pas vraiment la bonne notion et on n'obtenait pas que le genre était égal à zéro. Pourquoi ? Parce qu'on utilisait le fait que tout entier s'écrit de manière unique comme un polynôme dans le nombre 3 [5] à coefficient plus ou moins 1 ou 0 ; ça, c'est vrai, ça va être utilisé par les Russes après la deuxème guerre mondiale pour essayer de fabriquer des ordinateurs, dans lesquels l'opération de soustraction était immédiate. Et en fait, on a mis beaucoup de temps avec Katia, mais on a une note aux Comptes-Rendus qui va paraître ; et en fait, ce qui est vraiment incroyable, c'est que l'anneau $\mathbb{Z}$, c'est un anneau de polynômes, sur ce corps à un élément et le générateur c'est le nombre -2 : tout nombre entier s'écrit de manière unique comme un polynôme à coefficients 0 et 1 dans le nombre -2 [6]. Et en fait, la théorie, elle est basée sur quelque chose d'extrêmement sophistiqué, qui est la théorie de l'homotopie. Et le corps à un élément correspond à ce qu'on appelle le spectre en sphère [7], qui est, si vous voulez, j'avais il y a très, très longtemps, je finis là-dessus, j'avais, il y a très très longtemps écouté une conférence à Oberwolfach dans laquelle Tom Goodwilly disait qu'il expliquait que les entiers étaient une algèbre sur quelque chose de beaucoup plus basique qui est justement le spectre en sphère. Alors en fait, le spectre en sphère, ça ne marcherait jamais, il faut avoir quelque chose de beaucoup plus simple, et en appliquant la technique qui a pour origine Chevalley, en fait, quand Chevalley définit un groupe algébrique, il dit que c'est un foncteur des anneaux commutatifs vers les groupes, en appliquant cette technique, la technique si vous voulez fonctorielle, on a trouvé, on espère, la bonne définition, mais comme toujours, il faut qu'elle passe 36 000 tests avant d'avoir le droit d'exister, dans le domaine des mathématiques, voilà. Je vais m'arrêter là-dessus.

---

[5] *Note de la transcriptrice : "dans le nombre 3" signifie dont le générateur est 3 ; i.e., un polynôme égal à une combinaison linéaire de puissances de 3.*

[6] *Note de la transcriptrice : dont le générateur est -2*

[7] *Note de la transcriptrice : Sphere spectrum ?*

Poursuite de la conférence par la séance de questions à l'orateur

---

Françoise Combes : Merci beaucoup pour ce passionnant exposé, est-ce qu'il y aura des questions ?

Alain Connes N'hésitez pas, je veux dire, je sais que Jean-Pierre [8] , où est Jean-Pierre ?...

Jean-Pierre Changeux : Merci. D'abord, je dois dire qu'en tant que neurobiologiste, je n'ai pas vraiment pu suivre l'exposé du début jusqu'à la fin, je le regrette beaucoup et il y avait un vocabulaire que je ne comprenais pas. Ceci dit, j'ai essayé de comprendre les raisonnements que tu as présentés, et il y a juste un point qui m'a un peu surpris, c'est l'importance de l'analogie, que tu reprends à plusieurs reprises, au moins trois ou quatre fois, oui ; en neurobiologie ou en biologie, en général, l'analogie est loin de la causalité qui peut exister entre l'objet et sa fonction, comme par exemple, l'aile de la chauve-souris ou celle du pinson, bien-sûr, qui ont la même fonction, mais elles sont construites de manière totalement différente... Alors eux...

Alain Connes : Non, mais analogie ne signifie pas du tout identité.

Jean-Pierre Changeux : Est-ce que on a le droit de parler d'analogie en mathématiques, et certainement qu'on a le droit, puisque tu le fais, oui, mais je voulais savoir si ça avait des implications... plus larges.

Alain Connes : Non, disons que là, on n'a aucun droit : pourquoi ? Parce que si tu veux, la mathématique est une réalité, qui est d'une résistance phénoménale. Donc si tu veux, le seul droit qu'on a, c'est de trouver un théorème, de faire des erreurs, de réparer les erreurs, de tester sur l'ordinateur, etc. C'est ça, le seul droit qu'on a. L'analogie est un guide, c'est-à-dire que lorsqu'on s'aperçoit qu'il y a des correspondances entre deux théories différentes et on n'a jamais l'idée qu'elles sont identiques, on n'a jamais idée, si tu veux, qu'à un nœud va correspondre un nombre premier, non, mais qu'il y a des correspondances, comme ça, et ces correspondances permettent de mettre la pensée en mouvement, en essayant de traduire, en espérant toujours qu'il y a une traduction possible, d'un domaine à l'autre. Et ça, effectivement, c'est extrêmement fructueux, mais c'est dangereux, bien entendu, c'est-à-dire que si on concluait de l'analogie, l'identité entre les deux domaines, ce serait une erreur terrible, bien sûr. Je pense que c'est pareil en biologie.

Une auditrice : Merci pour cet exposé très, très poétique mathématique. Donc j'ai une question simple. Je veux dire : est-ce que vous pouvez développer la façon dont vous avez étendu la formule de Hasse-Weil...

Alain Connes : Ah oui, absolument, oui, oui, alors, ça je vais l'expliquer, parce que Soulé avait défini, donc, une fonction ζ, dans le sillage de Manin, en prenant une limite, quand q tend vers 1, d'une somme, qui est la somme qui apparaît dans la formule de Hasse-Weil. C'est-à-dire que si vous voulez, dans la formule de Hasse-Weil, on a une somme et on a des puissances de q etc. Et puis, on regarde la fonction de dénombrement. Donc Soulé avait étendu ça, comme une limite

[8] Jean-Pierre Changeux

quand q tend vers 1. Alors la première chose qu'on a faite avec Katia Consani, on s'est aperçus que cette limite quand q tend vers 1, en fait, si on regardait, non pas la fonction ζ mais sa dérivée logarithmique, parce que le problème qu'avait Soulé, c'était qu'il était obligé de corriger par un facteur d'une puissance de q moins 1, avec un exposant qui était la caractéristique d'Euler ; or on sait très bien que pour la fonction ζ, la caractéristique d'Euler va être égale à moins l'infini ; donc ça ne marchait pas, mais par contre, quand on regarde la dérivée logarithmique de la fonction ζ, à ce moment-là, on obtient une formule en utilisant Soulé, qui est une limite quand q tend vers 1, et on s'est aperçus avec Katia Consani que cette limite quand q tend vers 1, c'était simplement une limite de somme de Riemann d'une intégrale. Donc on a remplacé la formule de Soulé, qui était une limite, par une intégrale ; ça, c'est beaucoup mieux déjà. Alors après, on a posé le problème inverse, c'est-à-dire qu'on a pris la fonction ζ de Riemann, avec son terme à l'infini, le terme archimédien, et on s'est dit "est-ce qu'il existe une fonction de comptage qui va compter le nombre de points, etc. telle qu'on obtienne la fonction ζ de Riemann ?". Alors ce qu'on a démontré, c'est que ce n'est pas une fonction, c'est une distribution au sens de Schwartz. Et pourquoi ça ne pouvait pas être une fonction ? La raison pour laquelle ça ne pouvait pas être une fonction, c'est qu'on sait que cette distribution, elle doit être positive, on sait aussi que sa valeur en 1 doit valoir moins l'infini donc ça, ça paraît complètement absurde : on se dit "comment est-ce qu'on peut avoir une fonction, qui soit positive mais qui ait la valeur moins l'infini en 1, puisque ça, c'est la caractéristique d'Euler.". Alors l'explication, en fait, elle vient de la formule qui donne cette distribution comme dérivée d'une fonction ; cette fonction, elle est croissante donc la distribution est positive, mais elle prend la valeur moins l'infini quand on s'approche de 1, alors que la valeur de la distribution au point 1 est finie, et donc, tout s'arrange. Alors quand on utilise cette distribution, ça donne le bon résultat. Mais ce qui nous a convaincus, c'est qu'en fait cette distribution, elle apparaît lorsqu'on regarde les points fixes du groupe de changement d'échelle dans le topos dont j'ai parlé tout à l'heure, c'est-à-dire que ce topos donne vraiment, si vous voulez, un espace géométrique qui supporte les formules de Riemann-Weil, etc., etc., pendant longtemps, on a cru que ce topos, que cet espace, c'était le spectre des entiers, non ! C'est l'espace qui joue le rôle de la théorie du corps de classes pour les schémas, et ça, c'est formidable, c'est un changement d'optique. Donc en fait une des choses les plus importantes en mathématiques, c'est de n'être sûr de rien, c'est-à-dire d'être capable de changer de point de vue *quand* vous recevez une information différente de celle que vous croyiez toujours. C'est ce que dit Grothendieck quand il dit (je ne me souviens pas des paroles exactes) quand il dit : "*Craindre l'erreur et craindre la vérité sont une seule et même chose.*". Et ce qu'il explique, précisément, c'est que quand on craint de se tromper, quand on craint l'erreur, on reste figé, dans les croyances auxquelles on a été habitué et qui nous empêchent d'aller de l'avant, qui nous empêchent de trouver du mil [9]. Il y a une dernière chose que je voudrais rajouter, c'est une chose très importante au niveau de... je ne sais pas pour la biologie mais bon, vous savez, quand on croit que le mathématicien, il est là, et on dit : "Ah ! Il n'a besoin que d'une feuille de papier et d'un crayon !" : je m'inscris en faux contre ça ; je m'inscris en faux contre ça, pourquoi ? Je prétends que le mathématicien, s'il a une feuille de papier, qu'il écrit sur cette feuille de papier, puis qu'il la laisse traîner, n'a rien fait. La difficulté pour faire des mathématiques, c'est d'écrire dans son cerveau ; et ça, c'est infiniment plus difficile que d'écrire sur une feuille de papier, c'est infiniment plus difficile, parce que pour écrire dans son cerveau, il faut prendre un problème, et il faut sécher sur le problème, il faut avoir l'air idiot, il ne faut pas avoir peur du tout d'avoir l'air

[9] *Note de la transcriptrice : référence directe au mil = au blé et donc au livre* Récoltes et semailles *d'Alexander Grothendieck.*

idiot pendant des heures, c'est à ce prix-là qu'on écrit dans le cerveau. Et quand vous avez écrit dans votre cerveau, vous avez ce qu'on appelle une image mentale de l'objet que vous considérez, et là, vous pouvez commencer à le manipuler, etc. Vous n'avez pas besoin d'une feuille de papier et d'un crayon.

Françoise Combes : J'aimerais poser une question : comment un mathématicien trouve-t-il le sujet sur lequel il va chercher ; par exemple, pour les travaux que tu nous as présentés, comment t'est venue l'idée de travailler là-dessus ?

Alain Connes : Ah ! C'est une excellente question, parce que jamais un mathématicien n'aurait l'idée de travailler sur un problème très difficile, sachant que c'était un peu signer sa perte, d'accord ?! Donc comment est-ce qu'un mathématicien va travailler là-dessus ? Dans mon cas, je peux simplement vous raconter ce qui s'est passé dans mon cas. Dans mon cas : j'avais écrit avec Jean-Benoît Bost un article dans le début des années 1990 dans lequel apparaissait la fonction ζ de Riemann, un peu de manière inopinée, elle apparaissait dans ce que les physiciens appellent une fonction de partition, dans un système qui avait une transition de phase avec brisure spontanée de symétrie. Et donc après avoir trouvé ce système, j'avais été invité à Seattle en 1996 pour le 100$^{\text{ième}}$ anniversaire du théorème des nombres premiers. Donc j'y suis allé, j'étais un peu surpris d'être invité, j'étais content d'être invité, donc j'y suis allé, j'ai fait mon exposé et après mon exposé, Selberg est venu me voir, il m'a dit : "*It isn't clear that what you are doing will be related to the zeros of ζ.*" [10]. Pourquoi pas, bien sûr, il faut être réaliste, donc quand je suis rentré, j'ai décidé de ne pas me décaler en termes d'horaire, c'est-à-dire que j'ai gardé l'horaire de Seattle pendant une semaine. Je n'ai rien fait, à l'époque, je n'avais pas d'email [11]. Donc je ne regardais pas d'email, je n'avais aucune distraction, la seule distraction que j'avais, c'était de lire un livre, que les gens connaissent sans doute, qui s'appelle *The right stuff*, qui est le livre sur l'histoire d'Apollo 13 [12] . Donc je lisais ce livre, et puis je rêvassais, et au bout d'une semaine, je me suis dit "m..., voilà comment les formules explicites de Weil apparaissent à partir du système que j'avais trouvé avec Jean-Benoît Bost.". Donc j'étais à mon bureau, avant j'étais couché la plupart du temps, donc j'étais à mon bureau, et puis j'ai vérifié effectivement que les formules telles que Weil les avait écrites, et qui sont magnifiques, apparaissaient vraiment telles que celles obtenues si on prenait le système que j'avais écrit avec Jean-Benoît Bost, et qu'on regardait l'espace non-commutatif correspondant, qui est l'espace dont je parle, l'espace F_q. Puis après, je me suis dit "ah d'accord, c'est bien d'avoir les formules de Weil, mais et les zéros de ζ ?". Et là, je me suis aperçu, presque tout de suite, qu'en fait les zéros de ζ apparaissaient mais de manière extrêmement bizarre : ils apparaissaient comme un spectre d'absorption, et ça, ça résolvait le problème du signe moins, sur lequel les gens butaient pour avoir la réalisation spectrale, parce que dans toutes les formules, les zéros de ζ apparaissent avec un signe moins, qu'on comprend très bien lorsqu'on pense en terme de caractéristique d'Euler, et là, ça apparaissait comme un spectre d'absorption. Et alors, donc, depuis, si vous voulez, je n'ai pas pu m'empêcher de travailler, de temps en temps, sur ce problème-là, et une des choses très importantes sur les spectres d'absorption... Vous savez que les spectres d'absorption, le premier, sans doute, c'est le spectre du sodium, qu'on a aperçu à partir de Newton : quand on décompose

[10] *Note de la traductrice : "Il n'est pas évident du tout que ce que vous faites sera relié aux zéros de ζ".*

[11] *Note de la transcriptrice : on sent poindre une nostalgie.*

[12] *Note de la transcriptrice : ce livre est traduit en français sous le titre L'étoffe des héros et a été porté au cinéma dans un film au titre éponyme, dans lequel joue l'acteur Ed Harris.*

la lumière du soleil par un prisme, et puis ensuite, Fraunhofer a trouvé 500 raies environ, et parmi ces raies, si vous voulez, il y en avait un tas, dans le spectre d'absorption, qu'on pouvait retrouver sur la Terre comme un spectre d'émission, comme le sodium, comme 36 choses ; par contre, il y avait des raies spectrales qui ne correspondaient à aucun corps chimique sur Terre. C'était très embêtant. Alors qu'ont fait les physiciens ? Eh bien, ils lui ont donné un nom en l'honneur du Soleil, ils l'ont appelé l'hélium. Alors, c'était très embêtant, bien sûr, sauf qu'il y a eu à la fin du XIXe siècle une éruption du Vésuve et quand on a fait l'analyse spectrale de la lave qui sortait du Vésuve, on a trouvé l'hélium. Et bien sûr, l'hélium, maintenant, on l'utilise tout le temps. Alors, si vous voulez, une des stratégies qu'on utilise et qui avance par rapport à ζ, c'est l'idée de transformer le spectre d'absorption que j'avais trouvé en un spectre d'émission, et récemment on a trouvé avec mon collaborateur Henri Moscovici, on a trouvé le lien avec ce qu'on appelle l'opérateur sphéroïdal prolate, qui est un opérateur connu, je veux dire en analyse, et dont le spectre reproduit de manière très voisine les zéros de ζ. Donc voilà où on en est. Jamais personne n'aurait l'idée de dire : "je vais m'attaquer à ζ", ce serait ridicule, donc il faut un concours de circonstances, une espèce de... comment dire... de coïncidence, mais la coïncidence ne suffit pas, il faut la reconnaître et la suivre.

Françoise Combes : Merci beaucoup. Est-ce qu'il y a d'autres questions ?

Un auditeur : Oui, je voulais vous demander si l'informatique et l'intelligence artificielle allaient modifier complètement la recherche en mathématiques et peser sur l'imagination.

Alain Connes : Bon alors, c'est une question évidemment brûlante, dont je ne voulais pas parler, bon. Mais, vous m'obligez. Voyons : vous voyez, ce qui est caractéristique, pour le moment, qui échappe à l'intelligence artificielle, c'est la possibilité qu'ont les mathématiciens de créer un concept à partir de myriades de cas particuliers. Prenons l'exemple des topos de Grothendieck. Vous voyez, on arrive à créer un concept de manière précise, à partir de myriades de cas, et on arrive à trouver le formalisme qu'il faut pour créer ce concept, et là, je parle vraiment de créer ce concept. Et pour le moment, l'intelligence artificielle, je l'utilise bien sûr, quand je dois écrire une lettre de recommandation, j'utilise Chap-GPT. Donc c'est très pratique. Pour le moment, je n'y vois qu'une secrétaire d'une extraordinaire efficacité, c'est ça que j'y vois, et j'y vois surtout, si vous voulez, quelqu'un qui est capable, ou quelqu'une qui est capable, d'aller chercher dans la littérature toutes sortes de choses que moi, jamais, je n'arriverai à trouver. Donc, ça va aider, ça va aider terriblement ; j'utilise énormément `Mathematica` sur l'ordinateur, pour faire des calculs. Donc je ne peux pas dire, je ne néglige pas ça, mais je pense que pour l'instant, pour l'instant, il y a encore quelque chose qui est totalement inaccessible à l'intelligence artificielle, et c'est ce qui permet, si vous voulez, de zipper toutes ces connaissances en la création d'un concept, ça, c'est fabuleux. Je veux dire, on le voit chez Galois, on le voit dans tous ces exemples-là, c'est quelque chose. Et bon, alors, je ne sais pas comment ça va évoluer, si ça évolue... Il n'est pas impossible qu'on arrive, je ne sais pas, à quelle idée, avec cela. Mais pour le moment, je pense que le cerveau humain a des petits avantages.

Un auditeur : Merci beaucoup. Moi, il me semble que l'une des créations les plus extraordinaires de l'imagination mathématique, c'est la découverte par Cantor du fait qu'il y a une infinité d'infinis, que ça ne s'arrête jamais, qu'on n'arrive pas à décrire vraiment la suite des ordinaux et des cardinaux.

Alain Connes : Oui ! Non, non, très bien, très bien, je vous arrête, je vous arrête, parce que malheureusement ce n'est pas du tout l'opinion qu'on a en tant que mathématicien : en tant que mathématicien, la théorie des ensembles est une théorie rasoir, je suis désolé de le dire parce qu'elle est... elle est... d'une certaine manière elle est trop simple, et on la remplace, en mathématiques, par la théorie des catégories, qui elle n'est pas du tout rasoir. Et ça, c'est une évolution très importante, bon, je veux dire, les cardinaux, je m'excuse, c'est magnifique, bien sûr, hein, d'ailleurs si vous voulez apprendre à quelqu'un la théorie des ensembles, il ne faut surtout pas... il faut simplement lui poser la question "démontre-moi qu'il n'y a pas de manière d'épuiser les nombres réels, en donnant le premier, le $2^{\text{ème}}$, le $3^{\text{ème}}$, etc., d'accord ?". Si vous posez cette question à quelqu'un et s'il essaie d'y réfléchir, il aura compris la théorie des ensembles, d'accord ? Il ne faut pas lui dire "un ensemble, c'est machin, et deux, c'est... Non !" ; si vous voulez, je vous donne la démonstration, il y a 36 démonstrations et 36 démonstrations dont chacune fait appel à une propriété différente des nombres réels. Moi, la démonstration que je préfère de loin, c'est la suivante : ça consiste... Ok, quelqu'un vous dit "d'accord, j'ai epelé tous les nombres réels !", il me donne le premier, le deuxième, et alors moi je lui dis : "eh bien autour du premier, tu mets un intervalle de longueur 1/2, autour du deuxième, tu mets un intervalle de longueur 1/4, autour du 3ème, tu mets un intervalle de longueur 1/8..." Eh bien, je suis désolé, tu n'auras pas rempli plus que 1, la droite, elle est infinie, donc ça ne marche pas. Une autre démonstration, c'est la démonstration de... on a un mathématicien français qui s'appelait René Baire, qui était un mathématicien formidable. Or René Baire a démontré que si on prend une intersection dénombrable d'ouverts denses, c'est encore dense, si vous voulez ; donc chaque fois que vous enlevez un point, le complémentaire, c'est un ouvert dense, donc ça vous dit qu'en fait, vous auriez pu aussi essayer d'épeler avec des... comment dire... avec des fermés d'intérieur vide, vous n'y arriverez jamais ; ça c'est formidable ! Et enfin, enfin, il y a bien sûr la démonstration bien connue du paradoxe, etc., que je ne vais pas vous imposer.

Françoise Combes : On va prendre une dernière question. Jean-Pierre Bourguignon ?...

Jean-Pierre Bourguignon : Oui. Dans les exemples que tu as donnés, qui sont presque toujours dans le contexte algébrique, il y a toujours de la géométrie sous-jacente et comme tu le sais, quand Lobatchevski a introduit la géométrie qu'on appelle aujourd'hui *géométrie hyperbolique*, il l'a appelée *géométrie imaginaire*...

Alain Connes : Oui...

Jean-Pierre Bourguignon : Et c'est aussi lié à des nombres négatifs, mais d'une autre façon.

Alain Connes : Bien sûr.

Jean-Pierre Bourguignon : Comment incorpores-tu ça dans ta réflexion ?

Alain Connes : Bah, si tu veux, j'incorpore ça, bien sûr, ça joue un rôle absolument fondamental puisque surtout par Riemann, c'est-à-dire, bon, Lobatchevski, etc., les gens ont lentement quitté le formalisme purement euclidien pour admettre d'autres géométries, mais surtout, surtout, grâce à Riemann, et au fait que la courbure peut être variable, etc. Donc c'est ça, la vraie transition, c'est pas tellement Lobatchevski, c'est plus Riemann, et bien sûr, après, Einstein, et... d'accord...

Je m'excuse aussi car dans mon titre, j'avais parlé de l'espace-temps, mais ce serait vraiment un autre exposé. Quand j'ai préparé, je me suis aperçu que je n'en parlerais pas...

Françoise Combes : Bien, merci beaucoup, nous remercions encore Alain Connes.

(applaudissements).