Advances in Mathematics **143**, 284-287 (1999)

Notes sur la fonction de Riemann, 2

Michel Balazard

Eric Saias et Marc Yor

Désignons par $\sum_{\Re\rho>1/2}$ une somme portant sur les éventuels zéros de $\zeta(s)$ de partie réelle supérieure à $\frac{1}{2}$, où les zéros de multiplicité m sont comptés m fois. L'objet de cette note est la démonstration du résultat suivant.

Théorème. *On a*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Re(s)=1/2}\frac{\log|\zeta(s)|}{|s|^2}|ds| = \sum_{\Re\rho>1/2}\log\left|\frac{\rho}{1-\rho}\right|. \tag{1}$$

En particulier, l'hypothèse de Riemann est vraie si et seulement si

$$\int_{\Re(s)=1/2}\frac{\log|\zeta(s)|}{|s|^2}|ds| = 0.$$

Démonstration. Cette preuve comporte deux étapes.

Première étape. Nous commençons par l'énoncé de quelques propriétés satisfaites par une fonction générique f de l'espace de Hardy $H^p(\mathbf{D})$, où $\mathbf{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ et p est un nombre réel positif. On désigne par f^* la fonction définie presque partout sur le cercle trigonométrique $\partial\mathbf{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ par $f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta})$. Utilisons la lettre z pour désigner un élément du disque trigonométrique $\mathbf{D}$ et notons

$$s = s(z) = \frac{1}{2} + \frac{1+z}{2(1-z)} = \frac{1}{1-z}.$$

Cette formule définit une représentation conforme du disque $\mathbf{D}$ dans le demi-plan $\Re(s) > 1/2$.

D'après la formule de Jensen (voir par example [4, Theorem 3.61]), on a pour $f(0) \neq 0$ et $r < 1$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta = \log|f(0)| + \sum_{\substack{|\alpha|<r\\ f(\alpha)=0}}\log\frac{r}{|\alpha|} \tag{2}$$

M. Balazard : Laboratoire d'Algorithmique Arithmétique, C.N.R.S., Mathématiques, Université de Bordeaux 1, 351, cours de la Libération, 33405 Talence Cedex, France ;
E. Saias et M. Yor : Laboratoire de Probabilités, Université P. et M. Curie, 4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France ; Reçu le 10 juillet 1998 ; accepté le 9 septembre 1998.
Transcription LaTeX : Denise Vella-Chemla, mars 2025.

où dans la somme les zéros de multiplicité m sont comptés m fois. Désignons par

$$\exp\left\{-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\mu(\theta)\right\}$$

le facteur intérieur singulier de f. Quand r tend vers 1, la formule (2) devient (cf. [2, p. 68])

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f^*(e^{i\theta})|d\theta = \log|f(0)| + \sum_{\substack{|\alpha|<1\\ f(\alpha)=0}}\log\frac{1}{|\alpha|} + \int_{-\pi}^{\pi}d\mu(\theta). \tag{3}$$

Cette formule est une conséquence du théorème de factorisation des fonctions de H^p ; elle est énoncée dans [2] pour $p = 1$ mais est également valable pour tout p positif.

Deuxième étape. Nous considérons maintenant la fonction

$$f(z) = (s-1)\zeta(s)$$

(avec $s = 1/(1-z)$). Les propriétés élémentaires de la fonction ζ de Riemann (voir par exemple [5]) permettent de vérifier d'une part que f appartient à l'espace de Hardy $H^{1/3}(\mathbf{D})$ et d'autre part que la mesure μ associée au facteur intérieur singulier de f est nulle (pour ce dernier point, il suffit de reprendre l'argumentation développée par Bercovici et Foias pour le facteur intérieur des fonctions $(\theta-\theta^s)\zeta(s)(s+1/2)/s$ au cours de la preuve de la proposition 2.1 de [1]). On vérifie également que

$$\int_{-\pi}^{\pi}\log|f^*(e^{i\theta})|d\theta = \int_{\Re(s)=1/2}\frac{\log|\zeta(s)|}{|s|^2}|ds|,$$

$$\log|f(0)| = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{\substack{|\alpha|<1\\ f(\alpha)=0}}\log\frac{1}{|\alpha|} = \sum_{\Re\rho>1/2}\log\left|\frac{\rho}{1-\rho}\right|.$$

Avec l'ensemble de ces informations, notre résultat découle de la formule (3).

Terminons par quelques remarques. On trouve des énoncés voisins du nôtre dans les travaux [7, 6] de Wang et Volchkov. Il est même possible que Jensen lui-même ait eu conscience de la formule (1) (le lecteur consultera avec intérêt l'article [3] où Jensen fait part à Mittag-Leffler de sa découverte de la formule (2)). Il nous paraît cependant intéressant de présenter les choses comme nous le faisons ici, et cela pour les trois raisons suivantes :

(a) la formule (1) est plus simple que celles qui apparaissent dans [7, 6];

(b) on montre ici que pour établir la formule (1), il est naturel de se placer dans le cadre des espaces de Hardy ;

(c) la forme de l'intégrale dans la formule (1) permet d'interpréter ce résultat à l'aide du mouvement brownien, comme nous le montrons ci-dessous.

Notons $Z = X + iY$ le mouvement brownien plan issu de 0 (ou de 1) et $Z_{T_{1/2}} = \frac{1}{2} + iY_{T_{1/2}}$ son premier point d'impact sur la droite critique $\Re s = 1/2$ où $T_{1/2} := \inf\{t \ : \ X_t = 1/2\}$. On sait que $Y_{T_{1/2}}$ suit une loi de Cauchy de paramètre $1/2$. Autrement dit, la loi de $Y_{T_{1/2}}$ a pour densité $1/2\pi(1/4 + t^2)$. Ainsi la deuxième partie du théorème peut s'énoncer de la manière suivante: l'hypothèse de Riemann est vraie si et seulement si

$$\mathbb{E}\left[\log|\zeta(Z_{T_{1/2}})|\right] = 0.$$

Remerciements. Nous remercions Luis Báez-Duarte, Michel Delasnerie, Catherine Donati, Laurent Habsieger, Aleksandar Ivić et Alain Plagne pour d'utiles conversations.

Références

1. H. Bercovici et C. Foias, A real variable restatement of Riemann's hypothesis, *Israel J. Math.* 48 (1984), 57-68.

2. K. Hoffman, "Banach Spaces of Analytic Functions", Dover, New York, 1988.

3. J. L. W. V. Jensen, Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions, *Acta Math.* 22 (1898-1899), 359-364.

4. E. C. Titchmarsh, "The Theory of Functions", 2nd éd., Oxford Science Publications, 1939.

5. E. C. Titchmarsh, "The Theory of the Riemann Zeta-Function" (révisé par D. R. Heath-Brown), Clarendon, Oxford, 1986.

6. V. V. Volchkov, On an equality equivalent to the Riemann hypothesis, *Ukrainian Math. J.* 47 (1995), 491-493.

7. F. T. Wang, A note on the Riemann zeta-function, *Bull. Amer. Math. Soc.* 52 (1946), 319-321.