# Un théorème arithmétique et sa démonstration

Leonhard Euler

J'ai précédemment communiqué à des collègues le théorème que je propose et démontre ici, il a été jugé très digne de mériter attention, spécialement car sa démonstration n'est pas évidente du tout, et il est possible que plusieurs aient cherché à le démontrer en vain [1]. J'énonce le théorème de la façon suivante : [2]

*Si plusieurs nombres différents sont donnés $a, b, c, d$ etc., et que l'on forme à partir d'eux des fractions dont le numérateur commun est 1, et que ces fractions sont telles que le dénominateur de chacune est le produit de toutes les différences d'un nombre et de chacun des nombres restants, de telle façon que les fractions sont*

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)\text{ etc.}},\ \frac{1}{(b-a)(b-c)(b-d)\text{ etc.}},\ \frac{1}{(c-a)(c-b)(c-d)\text{ etc.}}\ \text{etc.},$$

*alors la somme de toutes ces fractions est toujours égale à* $0$.

Ainsi par exemple pour les nombres donnés $2, 5, 7, 8$, les quatre fractions

$$\frac{1}{-3\cdot -5\cdot -6},\quad \frac{1}{3\cdot -2\cdot -3},\quad \frac{1}{5\cdot 2\cdot -1},\quad \frac{1}{6\cdot 3\cdot 1}$$

sont écrites ainsi, et se réduisent à

$$-\frac{1}{3\cdot 5\cdot 6},\quad +\frac{1}{3\cdot 2\cdot 3},\quad -\frac{1}{5\cdot 2\cdot 1},\quad +\frac{1}{6\cdot 3\cdot 1},$$

et par la force du théorème

$$-\frac{1}{90}+\frac{1}{18}-\frac{1}{10}+\frac{1}{18}=0.$$

Pour ne pas compliquer avec des signes négatifs, ces fractions peuvent être arrangées par ordre de grandeur du dénominateur, soit croissant, soit décroissant, et en alternant les signes $+$ et $-$.

Par exemple, si les nombres donnés sont

$$3,\ 8,\ 12,\ 15,\ 17,\ 18,$$

Publié initialement sous le titre *Theorema arithmeticum eiusque demonstratio*, Commentationes arithmeticae collectae **2** (1849), 588–592. E794 dans l'index d'Eneström.

Traduit du latin à l'anglais par Jordan Bell, Département de Mathématiques, Université de Toronto, Toronto, Ontario, Canada.

Consultable ici https://arxiv.org/abs/math/0502425

Traduction de l'anglais au français : Denise Vella-Chemla, janvier 2021.

1. Note du traducteur : voir les lettres de Euler à Goldbach en dates des 25 septembre 1762 et 9 november 1762.
2. Note du traducteur : Euler a démontré cela dans son *Institutionum calculi integralis volumen secundum*, 1769, E366, § 1169, qui est expliqué dans l'article de Ed Sandifer de mars 2005 *How Euler Did It*. Les *Opera omnia* font également référence à l'article E540 d'Euler, *Nova methodus fractiones quascumque rationales in fractiones simplices resolvendi* (1775) et à l'article E475, *Speculationes analyticae* (1774).

dont on obtient les dénominateurs

$$\begin{array}{r|rl}
3 & 5\cdot 9\cdot 12\cdot 14\cdot 15 & = 113400 \\
8 & 5\cdot 4\cdot 7\cdot 9\cdot 10 & = 12600 \\
12 & 9\cdot 4\cdot 3\cdot 5\cdot 6 & = 3240 \\
15 & 12\cdot 7\cdot 3\cdot 2\cdot 3 & = 1512 \\
17 & 14\cdot 9\cdot 5\cdot 2\cdot 1 & = 1260 \\
18 & 15\cdot 10\cdot 6\cdot 3\cdot 1 & = 2700
\end{array}$$

et on aura

$$\frac{1}{113400}-\frac{1}{12600}+\frac{1}{3240}-\frac{1}{1512}+\frac{1}{1260}-\frac{1}{2700}=0$$

ou en multipliant chacune par 36

$$\frac{1}{3150}-\frac{1}{350}+\frac{1}{90}-\frac{1}{42}+\frac{1}{35}-\frac{1}{75}=0,$$

et en réduisant ces fractions au même dénominateur 3150, il est directement clair que

$$\frac{1-9+35-75+90-42}{3150}=0.$$

En effet, dans le cas où seuls deux nombres sont donnés, le théorème n'a pas besoin de démonstration, puisqu'il est évident que

$$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-a}=0\,;$$

mais même dans le cas de trois nombres $a, b, c$, c'est mainteant plus subtil, car il n'est pas immédiatement évident que

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0\,;$$

et pour des nombres plus grands, et encore plus, même, en général, pour des nombres quelconques, savoir que cela est vrai pour les cas les plus simples n'offre que peu d'aide.

En effet, j'ai étendu ce théorème plus largement, et il peut être énoncé de la façon suivante :

## Théorème général [3]

*Si plusieurs nombres différents $a, b, c, d, e, f$ etc. sont donnés, dont le nombre $= m$, et que les produits suivants sont formés à partir des différences de l'un à tous les autres*

$$\begin{array}{rcl}
(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)(a-f)\text{ etc.} & = & A, \\
(b-a)(b-c)(b-d)(b-e)(b-f)\text{ etc.} & = & B, \\
(c-a)(c-b)(c-d)(c-e)(c-f)\text{ etc.} & = & C, \\
(d-a)(d-b)(d-c)(d-e)(d-f)\text{ etc.} & = & D, \\
(e-a)(e-b)(e-c)(e-d)(e-f)\text{ etc.} & = & E \\
\text{etc.} & &
\end{array}$$

3. Note du traducteur : Euler a en fait montré cela dans son *Institutionum calculi integralis volumen secundum*, 1769, E366, § 1169.

*chacun était constitué de $m-1$ factors, alors non seulement on aura, comme précédemment*

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}+\frac{1}{E}+\text{etc.}=0$$

*mais on aura également de façon générale*

$$\frac{a^n}{A}+\frac{b^n}{B}+\frac{c^n}{C}+\frac{d^n}{D}+\frac{e^n}{E}+\text{etc.}=0,$$

*à la condition que l'exposant $n$ soit un nombre positif entier moindre que $m-1$.*

Ainsi dans l'exemple ci-dessus, où les nombres donnés sont $3, 8, 12, 15, 17, 18$, non seulement a-t-on

$$\frac{1}{113400}-\frac{1}{12600}+\frac{1}{3240}-\frac{1}{1512}+\frac{1}{1260}-\frac{1}{2700}=0,$$

mais on obtient également la vérité des fractions suivantes

$$\begin{array}{lcl}
\frac{3}{113400}-\frac{8}{12600}+\frac{12}{3240}-\frac{15}{1512}+\frac{17}{1260}-\frac{18}{2700} & = & 0,\\
\frac{3^2}{113400}-\frac{8^2}{12600}+\frac{12^2}{3240}-\frac{15^2}{1512}+\frac{17^2}{1260}-\frac{18^2}{2700} & = & 0,\\
\frac{3^3}{113400}-\frac{8^3}{12600}+\frac{12^3}{3240}-\frac{15^3}{1512}+\frac{17^3}{1260}-\frac{18^3}{2700} & = & 0,\\
\frac{3^4}{113400}-\frac{8^4}{12600}+\frac{12^4}{3240}-\frac{15^4}{1512}+\frac{17^4}{1260}-\frac{18^4}{2700} & = & 0\ ;
\end{array}$$

mais on ne peut continuer avec des puissances plus grandes, puisque chaque dénominateur est constitué de cinq facteurs.

## Démonstration du théorème [4]

J'ai trouvé ce théorème en considérant la formule [5]

$$\frac{x^n}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ \text{etc.}},$$

ce qui, à chaque fois que l'exposant $n$ est un nombre entier positif moindre que le nombre de facteurs du dénominateur, est tel qu'on peut toujours l'écrire comme somme de fractions simples ainsi [6]

$$\frac{A'}{x-a}+\frac{B'}{x-b}+\frac{C'}{x-c}+\frac{D'}{x-d}+\text{etc.},$$

où les dénominateurs sont les facteurs du dénominateur initial, et où les numérateurs sont des quantités constantes, ne dépendant pas de $x$, chacune pouvant être définie de la façon ci-après.

---

4. Note du traducteur : cf. Gauss, *Travaux de Carl Friedrich Gauss, vol. III*, pp. 265–268.
5. Note du traducteur : Le dénominateur ici a seulement $m-1$ facteurs : c'est $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\cdots(x-v)$, où $v$ est l'avant-dernier des nombres. Pour le moment, $x$ est une variable, mais plus tard, nous prendrons $x$ comme étant le dernier des nombres.
6. Note du traducteur : Fractions partielles : voir Euler's *Introductio in analysin infinitorum*, vol. I, § 46.

Puisque la forme donnée est égale à ces fractions simples, en multipliant par $x-a$, on aura

$$\frac{x^n}{(x-b)(x-c)(x-d)\text{ etc.}} = A' + \frac{B'(x-a)}{x-b} + \frac{C'(x-a)}{x-c} + \frac{D'(x-a)}{x-d} + \text{etc.}$$

Cette égalité est vérifiée pour toute valeur prise par $x$, puisque les lettres $A', B', C', D'$, etc. ne dépendent pas de $x$. Par conséquent, cette équation sera vraie si on prend $x = a$, d'où

$$\frac{a^n}{(a-b)(a-c)(a-d)\text{ etc.}} = A',$$

et ainsi la valeur de $A'$ est connue. On voit de manière similaire que

$$B' = \frac{b^n}{(b-a)(b-c)(b-d)\text{ etc.}}, \quad C' = \frac{c^n}{(c-a)(c-b)(c-d)\text{ etc.}},$$

et la même chose pour les autres. Alors, en amenant les fractions simples du côté gauche,

$$\frac{x^n}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\text{ etc}} + \frac{A'}{a-x} + \frac{B'}{b-x} + \frac{C'}{c-x} + \frac{D'}{d-x} + \text{etc.} = 0,$$

et dans tous les cas, nous aurons, en voyant le nombre $x$ comme le dernier des nombres $a, b, c, d, \ldots, x$,

$$\begin{aligned}&\frac{a^n}{(a-b)(a-c)(a-d)\cdots(a-x)} + \frac{b^n}{(b-a)(b-c)(b-d)\cdots(b-x)}\\ &+ \frac{c^n}{(c-a)(c-b)(c-d)\cdots(c-x)} + \ldots + \frac{x^n}{(x-a)(x-b)(x-c)\cdots(x-\upsilon)} = 0,\end{aligned}$$

avec $\upsilon$ dénotant l'avant-dernier des nombres.

Ceci est la démonstration du théorème proposé, qui n'est ainsi pas si évident, de telle façon que sa vérité devrait être comptée parmi celles dont la règle se perçoit aisément, à moins peut-être qu'une démonstration plus simple ne soit trouvée ; [7] mais la nature de cette règle nous laisse difficilement espérer cela, parce que le théorème n'est pas vrai à moins que l'exposant $n$ ne soit un nombre entier positif, moindre que le nombre de facteurs dans chacun des dénominateurs.

Alors, puisqu'en prenant un nombre plus grand pour $n$, la somme de ces fractions ne s'évanouit plus, à partir de la même source dont nous avons tiré ce théorème, pour chaque cas, nous pourrons assigner la valeur de la somme, notamment en prenant le nombre de facteurs comme étant $= m-1$ et par conséquent, le nombre de tous les nombres donnés $a, b, c, d, \ldots, x$ comme étant $= m$. Si $n = m-1$, ou $n = m$, ou $n > m$, la fraction

$$\frac{x^n}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\text{ etc.}}$$

utilisée dans la démonstration sera vue comme impropre et interprétée comme s'il s'agissait d'une intégration par parties, [8] et la somme des fractions sera égale à la partie en question.

7. Note du traducteur : alors non seulement l'assertion de la preuve serait aisément perçue mais également la preuve serait aisément perçue ?

8. Note du traducteur : cf. vol. I, § 46 de l'*Introductio*. Si $\deg M \geq \deg N$ alors il y a une partie polynomiale dans la décomposition partielle en fraction de $\frac{M}{N}$. Dans le § 38, Euler définit ce qu'est une fraction “impropre” de polynômes.

Ainsi, dans le cas où $n = m - 1$, la partie entière vaut l'unité, et alors également la somme des fractions $= 1$. Par conséquent, dans l'exemple traité ci-dessus, où les signes sont changés selon la démonstration, on aura

$$\frac{18^5}{2700} - \frac{17^5}{1260} + \frac{15^5}{1512} - \frac{12^5}{3240} + \frac{8^5}{12600} - \frac{3^5}{113400} = 1.$$

Mais si $n = m$, la partie entière provenant de la fraction est

$$x + a + b + c + d + \text{etc.},$$

c'est-à-dire, la somme de tous les nombres donnés.

Par conséquent, puisque dans l'exemple ci-dessus, la somme de tous les nombres donnés est $= 73$, on aura

$$\frac{18^6}{2700} - \frac{17^6}{1260} + \frac{15^6}{1512} - \frac{12^6}{3240} + \frac{8^6}{12600} - \frac{3^6}{113400} = 73.$$

On peut facilement voir à partir d'ici comment on trouve les sommes suivantes. Notamment, d'abord, la somme de tous les nombres donnés $a, b, c, d, \ldots, x$ est prise, qu'on pose $= P$, alors la somme des produits de deux, qu'on pose $= Q$, puis la somme de trois, qu'on pose $= R$, de même pour quatre $= S$, pour cinq $= T$, et etc. Maintenant avec ceci fait, on forme la série [9]

$$1 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \text{etc.}$$

de telle façon que

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A} = P, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{A}P - Q, \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{B}P - \mathfrak{A}Q + R, \\ &\mathfrak{D} = \mathfrak{C}P - \mathfrak{B}Q + \mathfrak{A}R - S \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

et alors

| cas | somme des fractions |
|---|---|
| $n = m - 1$ | $1,$ |
| $n = m$ | $\mathfrak{A} = P,$ |
| $n = m + 1$ | $\mathfrak{B} = P^2 - Q,$ |
| $n = m + 2$ | $\mathfrak{C} = P^3 - 2PQ + R,$ |
| $n = m + 3$ | $\mathfrak{D} = P^4 - 3P^2Q + 2PR + Q^2 - S,$ |
| $n = m + 4$ | $\mathfrak{E} = P^5 - 4P^3Q + 3P^2R + 3PQ^2 - 2PS - 2QR + T$ |
| | etc. |

Or, si on met la somme des nombres $= \mathfrak{P}$, la somme de leur carré $= \mathfrak{Q}$, la somme de leur cube $= \mathfrak{R}$, la somme de leur quatrième puissance, $= \mathfrak{S}$, de leur cinquième puissance $= \mathfrak{T}$, etc., on obtiendra que [10]

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A} = \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{2}\mathfrak{P}^2 + \frac{1}{2}\mathfrak{Q}, \quad \mathfrak{C} = \frac{1}{6}\mathfrak{P}^3 + \frac{1}{2}\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \frac{1}{3}\mathfrak{R}, \\ &\mathfrak{D} = \frac{1}{24}\mathfrak{P}^4 + \frac{1}{4}\mathfrak{P}^2\mathfrak{Q} + \frac{1}{8}\mathfrak{Q}^2 + \frac{1}{3}\mathfrak{P}\mathfrak{R} + \frac{1}{4}\mathfrak{S} \quad \text{etc.,} \end{aligned}$$

9. Note du traducteur : plutôt on forme la fonction génératrice $1 + \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 + \mathfrak{C}z^3 + \mathfrak{D}z^4 +$ etc.

10. Note du traducteur : Les *Opera omnia* réfèrent à l'article E153 d'Euler, *Demonstratio gemina theorematis Neutoniani...*, dans lequel Euler démontre les identités de Newton. Les identités de Newton relient les coefficients d'un polynôme aux sommes des puissances des racines du polynôme.

dont les valeurs découlent de la loi

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= \mathfrak{P}, \\
\mathfrak{B} &= \frac{1}{2}(\mathfrak{P}\mathfrak{A} + \mathfrak{Q}), \\
\mathfrak{C} &= \frac{1}{3}(\mathfrak{P}\mathfrak{B} + \mathfrak{Q}\mathfrak{A} + \mathfrak{R}), \\
\mathfrak{D} &= \frac{1}{4}(\mathfrak{P}\mathfrak{C} + \mathfrak{Q}\mathfrak{B} + \mathfrak{R}\mathfrak{A} + \mathfrak{S}) \\
& \text{etc.}
\end{aligned}$$

Avec la vérité de notre théorème établie, je juge qu'il ne serait pas hors de propos que j'étudie avec attention la nature des formules sur lesquelles le théorème s'appuie. Donc, si les nombres $a, b, c, d$, etc. sont donnés, pour chacun d'entre eux on cherche quel sera le caractère de la formule $(a-b)(a-c)(a-d)$ etc., qui est le produit des différences de ce nombre avec tous les autres.

Alors en posant que le nombre des nombres donnés $= n$,[11] et en supposant que $z$ est une quantité variable, je fabrique ce produit à partir de lui

$$(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)(z-e) \text{ etc.},$$

qui par multiplication amène au développement

$$z^n - Pz^{n-1} + Qz^{n-2} - Rz^{n-3} + Sz^{n-4} - \text{etc.}$$

Alors en divisant ceci par $z-a$, on aura

$$(z-b)(z-c)(z-d) \text{ etc.} = \frac{z^n - Pz^{n-1} + Qz^{n-2} - Rz^{n-3} + \text{etc.}}{z-a}.$$

Si nous posons maintenant $z = a$, la forme en question $(a-b)(a-c)(a-d)$ etc. apparaît que j'ai dénotée ci-dessus par la lettre $A$. Alors en effet, pour l'autre côté, à la fois le numérateur et le dénominateur tendent vers zéro, et par conséquent, sa valeur sera

$$na^{n-1} - (n-1)Pa^{n-2} + (n-2)Qa^{n-3} - (n-3)Ra^{n-4} + \text{etc.},$$

qui, puisqu'il se trouve que

$$a^n - Pa^{n-1} + Qa^{n-2} - Ra^{n-3} + Sa^{n-4} - \text{etc.} = 0,$$

...[12]

11. Note du traducteur : Ce nombre était précédemment dénoté par $m$.
12. Note du traducteur : L'article s'arrête ici.