Une solution plus facile d'un problème diophantien à propos de triangles, dont les droites tirées des sommets bissectant les côtés opposés peuvent être exprimées rationnellement

Leonhard Euler

1. Les côtés d'un triangle ayant été placés de telle façon que $AB = 2c$, $AC = 2b$ et $BC = 2a$, si l'on appelle les bissectrices $AX = x$, $BY = y$ et $CZ = z$, il est clair du fait de la géométrie des carrés que ces trois droites peuvent s'exprimer de la façon suivante :

$$xx = 2bb + 2cc - aa$$
$$yy = 2cc + 2aa - bb$$
$$zz = 2aa + 2bb - cc,$$

et que ces équations peuvent ainsi être satisfaites par des nombres rationnels.

2. À partir de ces 3 équations, on génère ces 3 autres :

$$\text{I.}\quad xx - yy = 3(bb - aa)$$
$$\text{II.}\quad xx + yy = 4cc + aa + bb$$
$$\text{III.}\quad zz = 2aa + 2bb - cc.$$

On gère ces équations de la manière suivante.

3. On commence avec les premières équations, et de façon à éviter les fractions, on pose $xx - yy = 3(bb - aa) = 12fg(pp - qq)$; de là, avec ceci $bb - aa = 4fg(pp - qq)$, on obtient que $b+a = 2f(p+q)$ et que $b-a = 2g(p-q)$, d'où on tire $b = (f+g)p+(f-g)q$ et $a = (f-g)p+(f+g)q$. En effet, avec l'équation précédente $xx - yy = 12fg(pp - qq)$, on prend $x + y = 6g(p + q)$ et $x - y = 2f(p - q)$, d'où on peut obtenir que $x = (3g + f)p + (3g - f)q$ et $y = (3g - f)p + (3g + f)q$.

4. On gère maintenant la seconde équation :

$$xx + yy = 4cc + aa + bb,$$

et avec les valeurs qui viennent d'être déterminées, on découvre que :

$$xx + yy = 2(9gg + ff)(pp + qq) + 4(9gg - ff)pq.$$

Alors, en effet, on aura :

$$bb + aa = 2(ff + gg)(pp + qq) + 4(ff - gg)pq.$$

Délivré à l'Académie de St.-Pétersbourg le 12 août 1779. Publié initialement sous le titre *Solutio facilior problematis Diophantei circa triangulum, in quo rectae ex angulis latera opposita bisecantes rationaliter exprimantur*, Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg **2** (1810), 10-16, et réimprimé dans les *Leonhard Euler, Opera Omnia*, Série 1 : Opera mathematica, Volume 4, Birkhäuser, 1992. On peut trouver une copie du texte original dans le site Euler Archive, à l'adresse https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/. Cet article est référencé E732 dans l'index de Eneström.

Date de traduction en anglais : 2 mars 2005.

Traduit par Jordan Bell, en seconde année de Honours Mathematics, School of Mathematics and Statistics, Carleton University, Ottawa, Ontario, Canada.

Traduction effectuée sous la direction du Dr. B. Mortimer.

Consultable ici https://arxiv.org/abs/math/0503052.

Traduction de l'anglais au français : Denise Vella-Chemla, janvier 2021.

Par conséquent, avec ceci $4cc = xx + yy - (bb + aa)$, on aura :

$$4cc = 16gg(pp + qq) + (40gg - 8ff)pq,$$

grâce à quoi on obtient $cc = 4gg(pp + qq) + (10gg - 2ff)pq$, de telle façon que cette formule doit être transformée en un carré.

5. De là, la troisième équation est traitée, c'est $zz = 2(aa + bb) - cc$, dont on tire $2(aa + bb) = 4(ff + gg)(pp + qq) + 8(ff - gg)pq$ et $cc = 4gg(pp + qq) + (10gg - 2ff)pq$ et cela donnera

$$zz = 4ff(pp + qq) + (10ff - 18gg)pq,$$

qui est ainsi une autre formule que nous devons réduire à un carré.

6. Nous divisons la première de ces deux équations par $4gg$ et la dernière par $4ff$, de façon à pouvoir obtenir les formules suivantes, réduites à des carrés :

$$\frac{cc}{4gg} = pp + qq + 2pq\left(\frac{5gg - ff}{4gg}\right)$$
$$\frac{zz}{4ff} = pp + qq + 2pg\left(\frac{5ff - 9gg}{4ff}\right).$$

7. Pour abréger, on pose ici $\dfrac{5gg - ff}{4gg} = m$ et $\dfrac{5ff - 9gg}{4ff} = n$, de telle façon que maintenant le problème global est ramené à la résolution de ces deux formules :

$$\frac{cc}{4gg} = pp + qq + 2mpq = tt$$
$$\frac{zz}{4ff} = pp + qq + 2npq = uu,$$

et avec ça, nous aurons $c = 2gt$ et $z = 2fu$. À ce point, pour réduire ces deux formules à des carrés, il faut que $tt - uu = 2(m - n)pq$, et pour rendre ça pratique, on permet de traiter cela de telle façon que $t + u = (m - n)p$ et $t - u = 2q$, dont on tire $t = \frac{1}{2}(m - n)p + q$ et $u = \frac{1}{2}(m - n)p - q$.

8. Mais si l'on substitue ces valeurs à celles de t et u, il vient que les carrés apparaissent simultanément des deux côtés de l'équation :

$$pp\left(1 - \frac{1}{4}(m - n)^2\right) + (m + n)pq = 0,$$

et quand cette équation est divisée par p, on obtient :

$$p\left(1 - \frac{1}{4}(m - n)^2\right) + (m + n)q = 0,$$

d'où découle librement le rapport entre les lettres p et q : $\dfrac{p}{q} = \dfrac{4(m + n)}{(m - n)^2 - 4}$, en vertu de quoi on pourra prendre $p = 4(m + n)$ et $q = (m - n)^2 - 4$, ou des multiples équivalents, de telle façon qu'on peut en général prendre $p = 4(m + n)M$ et $q = ((m - n)^2 - 4)N$, et de cette façon, toutes les conditions sont pleinement satisfaites.

9. Maintenant qu'on a géré les lettres p et q, ce sera de $t = 2(m + n)(m - n) + (m - n)^2 - 4 = (m - n)(3m + n) - 4$ et $u = (m - n)(m + 3n) + 4$ dont comme précédemment on inférera ces déterminations :

$$\begin{aligned}&c = 2g(m-n)(3m+n) - 8g \quad \text{ et}\\ &z = 2f(m-n)(m+3n) + 8f.\end{aligned}$$

De plus, il est utile de sommer à la place de p et q leur valeur du § 7, de telle façon qu'on ait $c = g(m-n)p + 2gq$ et $z = f(m-n)p - 2fq$.

10. Maintenant on peut construire une solution à notre problème de la façon suivante :

1) Les lettres f et g sont librement choisies, à partir desquelles les lettres m et n peuvent être définies au moyen des formules $m = \dfrac{5gg - ff}{4ff}$ et $n = \dfrac{5ff - 9gg}{4ff}$.

2) Maintenant, comme précédemment, les lettres p et q sont recherchées grâce aux formules $p = 4(m+n)$ et $q = (m-n)^2 - 4$, grâce auxquelles on peut exprimer les droites bissectant les côtés du triangle de la manière ci-après.

3) Bien sûr, les côtés sont trouvés avec ces formules :

$$\begin{aligned}&a = (f-g)p + (f+g)q\\ &b = (f+g)p + (f-g)q\\ &c = 2g(m-n)(3m+n) - 8g = g(m-n)p + 2gq\end{aligned}$$

4) Par conséquent, finalement, les droites bissectrices elles-mêmes seront obtenues :

$$\begin{aligned}&x = (3g+f)p + (3g-f)q\\ &y = (3g-f)p + (3g+f)q\\ &z = 2f(m-n)(m+3n) + 8f = f(m-n)p - 2fg.\end{aligned}$$

11. De façon à pouvoir illustrer cela par un exemple, supposons que $f = 2$ et $g = 1$, et on obtiendra alors $m = \dfrac{1}{4}$ et $n = \dfrac{11}{16}$. De cela comme précédemment, on obtiendra que $p = \dfrac{15}{4}$ et $q = -\dfrac{975}{256}$, dont les valeurs, pour être réduites à des nombres entiers, peuvent être $p = 64$ et $q = -65$. Alors notre triangle sera déterminé ainsi :

$$\begin{aligned}&a = 131; b = 127; c = 158; \quad \text{ alors en effet,}\\ &x = 255; y = 261; z = 204.\end{aligned}$$

12. À cette occasion, comme cela a été noté pour l'exemple, il sera utile maintenant également de dénoter les côtés par les lettres x, y, z, en ayant en général :

$$\begin{aligned}&2xx - 2yy - zz = 9cc\\ &2yy + 2zz - -xx = 9aa\\ &2zz + 2xx - yy = 9bb,\end{aligned}$$

d'où il découle, en réduisant par 3 les nombres correspondant à x, y, z, que l'on obtient un triangle très simple, dont les côtés sont de longueurs 136, 170, 174.

13. À ce point, en ayant $m = \dfrac{5gg - ff}{4gg}$ et $n = \dfrac{5ff - 9gg}{4ff}$, on obtiendra d'abord

$$m + n = \frac{10ffgg - f^4 - 9g^4}{4ffgg} = -\frac{(gg-ff)(9gg-ff)}{4ffgg}.$$

Alors en effet, on aura $m-n=\dfrac{9g^4-f^4}{4ffgg}=\dfrac{(3gg+ff)(3gg-ff)}{4ffgg}$, dont on obtiendra que

$$m-n+2=\frac{9g^4+8ffgg-f^4}{4ffgg}=\frac{(gg+ff)(9gg-ff)}{4ffgg}$$

et

$$m-n-2=\frac{9g^4-8ffgg-f^4}{4ffgg}=\frac{(gg-ff)(9gg+ff)}{4ffgg}.$$

Au moyen de cela, ajouté au fait qu'on a trouvé que $p=4(m+n)M$, on aura alors :

$$\begin{aligned} p &= -\frac{(gg-ff)(9gg-ff)M}{4ffgg} \qquad \text{et,}\\ q &= ((m-n)^2-4)M=\frac{(g^4-f^4)(81g^4-f^4)}{16f^4g^4}M. \end{aligned}$$

14. Alors on réduit le rapport des lettres p et q aux termes minimum, et on prend $M=\dfrac{16f^4g^4}{(gg-ff)(9gg-ff)}$, et il découle de cela que $p=-16ffgg$ et $q=(gg+ff)(9gg+ff)$. De cela, parce qu'on avait $t=\dfrac{1}{2}(m-n)p+q$, il découle maintenant que

$$t=(gg+ff)(9gg+ff)-2(3gg+ff)(3gg-ff).$$

De façon similaire, on aura $u=\dfrac{1}{2}(m-n)p-q$, dont on déduira que :

$$u=-(gg+ff)(9gg+ff)-2(3gg+ff)(3gg-ff).$$

Alors, à cause de cela, découlera que $c=2gt$ et $z=2fu$.

15. Pour les variables restantes, on aura d'abord $a+b=2f(p+q)$ et $b-a=2g(p-q)$; alors en effet, on aura $x+y=6g(p+q)$ et $x-y=2f(p-q)$.

Cela ne pose pas de problèmes de résoudre de nombreux exemples juste au moyen de ces formules, jusqu'à ce qu'on obtienne des entiers ; puisqu'ils sont à tout point de vue déterminés par le rapport de nombres entiers f et g, on peut toujours supposer que ceux-ci sont des entiers.

16. On obtiendra $f=1$ et $g=2$, et $p=-64$ et $q=185$.

Par conséquent, on aura $t=-101$ et $u=-471$; alors en effet $c=-404$ et $z=-942$. Pour être sûr, comme précédemment, on aura $b-a=-996$ et $b+a=+242$; $x+y=1452$ et $x-y=-498$. Il en découlera par conséquent que :

$$\begin{aligned} &a=619; b=377; c=404\\ &x=477; y=975; z=942. \end{aligned}$$

On observe que les nombres x,y,z peuvent être utilisés plutôt que a,b,c, en divisant ceux-ci par 3, de telle façon que l'on obtient :

$$\begin{aligned} &a=159; b=325; c=314, \qquad \text{et on aura alors également,}\\ &x=619; y=377; z=404. \end{aligned}$$