TOPOLOGIE. - *Nombres semi-réels et espaces ultramétriques.*
Note[1] de M. Marc Krasner, présentée par M. Élie Cartan.

En vue d'applications ultérieures, je vais introduire certaines notions, qui ne sont pas, d'ailleurs, entièrement nouvelles.

I. *Nombres semi-réels.* L_0 étant l'ensemble des nombres réels (y compris $+\infty$ et $-\infty$), ordonné par l'ordre habituel, et Z étant l'ensemble des trois signes $\{+, n, -\}$, ordonné de manière que $+ > n > -$, les éléments du produit $L = L_0 \times Z$ des ensembles L_0, Z [c'est-à-dire les couples $\rho = (\rho_0, \zeta), \rho_0 \in L_0, \zeta \in Z$] ordonné lexicographiquement [autrement dit, si $\rho'_0 < \rho''_0$ avec $(\rho'_0, \rho''_0 \in L_0), (\rho'_0, n) < (\rho'_0, +) < (\rho''_0, -) < (\rho''_0, n)$] seront appelés *nombres semi-réels*[2] $[\rho] = \rho_0$ sera appelé la *valeur réelle* du nombre semi-réel $\rho = (\rho_0, \zeta)$, et $\langle\rho\rangle = \zeta$ sera appelé son *espèce*. Deux nombres semi-réels seront dits d'espèces non-opposées si ou bien $\langle\rho'\rangle = \langle\rho''\rangle$ ou bien un des $\langle\rho'\rangle, \langle\rho''\rangle$ est n. Si ρ', ρ'' sont d'espèces non opposées, on définira leur somme $\rho'+\rho''$ et leur produit $\rho'.\rho''$ comme les nombres semi-réels tels que $[\rho'+\rho''] = [\rho']+[\rho''], [\rho'.\rho''] = [\rho'].[\rho'']$ et $\langle\rho'+\rho''\rangle = \langle\rho'.\rho''\rangle = i(\langle\rho'\rangle, \langle\rho''\rangle)$, ou $i(+,+) = i(+,n) = i(n,+) = +, i(n,n) = n, i(n,-) = i(-,n) = i(-,-) = -$. Un nombre réel ρ_0 sera identifié avec le nombre semi-réel (ρ_0, n) [cette identification conserve l'ordre et les opérations rationnelles dans L_0], et l'on écrira $\rho_0^+, \rho_0, \rho_0^- (\rho_0 \in L_0)$ au lieu de $(\rho_0,+), (\rho_0,n), (\rho_0,-)$. $L_0 \bigcup [+\infty^+, -\infty^-]$ est dense sur P, et tous ses éléments sont isolés sur P.

II. *Espaces ultramétriques.*[3] Un espace métrique E est dit *ultramétrique* si, $d(a,b)$ désignant la distance des $a, b \in E$, on a, pour tous $a, b, c \in E, d(a,c) \leq \mathrm{Max}[d(a,b), d(b,c)]$. Si $\rho > 0$ est un nombre semi-réel tel que $\langle\rho\rangle \neq -$, et si $a \in E$, l'ensemble $C_E(a\,;\rho)$ des $e \in E$ tels que $d(a,e) < \rho$ sera appelé le *cercle de centre a et de rayon ρ dans E*. $C_E(a\,;\rho)$ sera dit *de 1re* ou *de 2de espèce* suivant que $\langle\rho\rangle = +$ ou n. Deux cercles d'un espace ultramétrique sont disjoints quand aucun d'eux ne contient l'autre ; quand ils sont d'un même rayon, ils sont disjoints ou coïncident, et tout point d'un cercle dans un espace ultramétrique en est un centre. $C_E(a\,;\rho')$ et $C_E(a\,;\rho'')$ sont dits *coradiaux* si $[\rho'] = [\rho'']$ sans que $\rho' = \rho''$. Tout ensemble ouvert d'un espace ultramétrique est une réunion de cercles disjoints de rayon $> 0^+$.

Si $E^* \subseteq E$, le plus grand nombre semi réel ρ tel que E^* soit une réunion de cercles de rayon ρ dans E sera noté $\underline{\rho}(E^*)$ et appelé le *rayon inférieur* de E^* et la borne supérieure sur L des ρ tels que E^* contienne un cercle de rayon ρ dans E sera noté $\overline{\rho}(E^*)$ et appelé le *rayon supérieur* de E^*. $\varepsilon \geq 0$ étant un nombre réel, E^* sera dit ε-régulier si $[\overline{\rho}(E^*)] - [\underline{\rho}(E^*)] \leq \varepsilon$. Si E^* est 0-régulier, il sera dit *régulier* tout court, et dans ce cas, $\overline{\rho}(E^*) = \underline{\rho}(E^*)$, et ce nombre, qui sera noté $\rho(E^*)$ sera appelé le *rayon* de E^*.

Si $E^{**} \subseteq E^* \subseteq E$, on appellera *ouverture* de E^*/E^{**} dans E la réunion des cercles dans E contenus dans E^* et non disjoints avec E^{**}.

---

[1]Séance du 23 octobre 1944.
Retranscription Latex Denise Vella-Chemla, 12.4.2022.

[2]Une construction analogue a été indiquée pour les ensembles ordonnés quelconques par G. Kurepa dans sa thèse, Paris, 1937 (*Publ. Math. de Belgrade*, **4**, 1935, p.1-138).

[3]Les seuls espaces ultramétriques considérés jusqu'à présent semblent être les corps et les algèbres valuées.

Une relation d'équivalence P dans un espace ultramétrique E sera appelée un *diviseur* de E si $a \equiv b\ (P)$ et $d(a', b') \leq d(a, b)$ $(a, b, a', b' \in E)$ impliquent $a' \equiv b'\ (P)$. On montre que les diviseurs sont des subdivisions P_ρ de E en cercles d'un même rayon ρ et inversement. Le minimum des ρ tels que $P = P_\rho$ sera noté $|P|$ et appelé *valuation* de P, et $\omega(P) = -\mathrm{Log}\, P$ sera appelé *ordre* de P. P sera dit de 1^{re} ou de 2^{de} espèce suivant que $\langle |P| \rangle = +$ ou n. Un diviseur P' sera dit *diviseur* d'un diviseur P'' si $|P'| \geq |P''|$. Le produit $P'P''$ de deux diviseurs P', P'' sera, par définition, le diviseur P_ρ tel que $\rho = |P'|.|P''|$.

A et B étant deux classes distinctes suivant un diviseur P, $d(a, b)$ est indépendant du choix des $a \in A, b \in B$, et peut être noté $d(A, B)$. Si l'on définit la distance dans l'ensemble quotient E/P comme égale à $d(A, B)$ si $A \neq B$ et égale à 0 si $A = B$, E/P devient un espace ultramétrique, qui est discret sauf (si $|P| = 0^+$) quand il est égal à E.

Si E est, de plus, un espace de Banach sur un corps valué k (autrement dit un espace vectoriel normé sur k tel que $d(a, b) = |a - b|$ et que, pour tous $\alpha \in k, e \in E, |\alpha e| = |\alpha|.|e|$, $|e| = d(e, 0)$ et $\omega(e) = -\mathrm{Log}\,|e|$ seront dits la *valuation* et l'*ordre* de $e \in E$. Dans ce cas tout diviseur $P = P_\rho$ peut s'identifier avec la classe $C_E(0\ ; \rho)$ de 0 suivant P, ce qui identifie l'ensemble des diviseurs de E avec celui des cercles de centre 0 dans E. En particulier, si E est un corps valué, ses diviseurs s'identifient ainsi avec ses idéaux, et cette identification conserve la divisibilité et la multiplication, et permet de caractériser un idéal par un seul nombre semi-réel (sa valuation ou son ordre)[4].

Une transformation T d'un espace ultramétrique E dans un espace ultramétrique E' sera dite *centrale* en un $a \in E$ si tout cercle de centre a dans E se transforme en un cercle de même espèce et de centre Ta dans $TE \subseteq E'$. Elle est dite *partout centrale* si elle l'est en tout $a \in E$. T est dite une *quasi-similitude locale en a* s'il existe un voisinage V de a dans E tel que le rapport $d(Ta, Te) : d(a, e)$ soit indépendant de $e \in V$. Ce rapport sera noté $\mu_0(T)$ et appelé le *rapport de quasi-similitude de T en a*, et l'ensemble des $e \in E$ tels que $d(Ta, Te) = \mu_0(T).d(a, e)$ sera noté $\mathcal{E}t_a(T)$ et appelé *l'étoile de quasi-similitude de T en a*. Si $\mathcal{E}t_a(T) = E$, T sera dite une *quasi-similitude en a*. Si $\mu_0(T) = 1$ on parlera de *quasi-congruence locale*, de *l'étoile de quasi-congruence* et de *quasi-congruence en a*. S'il existe un voisinage V de a dans E tel que $d(Te', Te'') : d(e', e'')$ soit indépendant des $e', e'' \in V$, T sera dite une *similitude en a*, dont $\mu_0(T)$ sera appelé le *rapport de similitude en a* ; le plus grand voisinage V satisfaisant à cette condition est un cercle $S_a(T) = C_E(a\ ; \rho_a(T))$ qui sera appelé *cercle de similitude de T en a*, et son rayon $\rho_a(T)$ sera appelé le *rayon de similitude de T en a*. En particulier, si $\mathcal{E}t_a(T) = E$, T sera dite une *similitude*, et si $\mu_0(T) = 1$, on parlera de *congruence en a* et de *congruence*.

[4]À notre avis, les valuations et les ordres semi-réels remplacent avantageusement la *fonction symbolique* de M. Krull. Voir, par exemple, son article sur la Théorie des idéaux dans le nouvelle édition de l'*Encycl. d. Math. Wiss.*