Laplacien sur une variété riemannienne et spineurs

André Lichnerowicz

1. Soit V_n une variété différentiable orientée de dimension n, de classe C^∞ supposée munie d'une métrique ds^2 *de signature quelconque.* Sur les q-tenseurs antisymétriques U, G. de Rham a introduit le laplacien défini par :

$$\Delta U = (d\delta + \delta d)U \tag{1.1}$$

où d est l'opérateur de différentiation extérieure et δ celui de codifférentiation[1]

$$\delta : \quad U_{\beta_1 \dots \beta_q} \to -\Delta^\rho U_{\rho\beta_1\dots\beta_{q-1}}.$$

À partir du tenseur de courbure et du tenseur de Ricci, ΔU peut s'exprimer localement par :

$$(\Delta U)_{\beta_1\dots\beta_q} = -\nabla^\rho \nabla_\rho U_{\beta_1\dots\beta_q} + \sum_k R_{\beta_k\rho} U_{\beta_1\dots{}^\rho\dots\beta_q} - \sum_{k,l}^{k+l} R_{\beta_k\rho\cdot\beta_l\sigma} U_{\beta_1\dots{}^\rho\dots{}^\sigma\dots\beta_q} \tag{1.2}$$

J'ai adopté (1.2) comme définition du *laplacien d'un q-tenseur quelconque*[2]. L'opérateur (1.2) jouit des propriétés suivantes : il est autoadjoint, commute avec la contraction et préserve les symétries ou antisymétries possibles de U. J'ai ainsi annoncé, sans démonstration, le résultat suivant[3]

Théorème 1. *Si T est un tenseur à dérivée covariante nulle,*

$$\Delta(T \otimes U) = T \otimes \Delta U. \tag{1.3}$$

En effet, si T est un p-tenseur tel que $\nabla T = Q$ et U un q-tenseur, il résulte de (1.2) :

$$\Delta(T \otimes U) = T \otimes \Delta U + V \otimes U + W$$

avec :

$$V_{\alpha_1\dots\alpha_p} = \sum_k R_{\alpha_k\rho} T_{\alpha_1\dots{}^\rho\dots\alpha_p} - \sum_{k,l}^{k+l} R_{\alpha_k\rho,\alpha_l\sigma} T_{\alpha_1\dots{}^\rho\dots{}^\sigma\dots\alpha_p}$$

et :

$$W_{\alpha_1\dots\alpha_p\beta_1\dots\beta_q} = -\sum_{k,l} R_{\alpha_k\rho,\beta_l\sigma} T_{\alpha_1\dots{}^\rho\dots\alpha_p} U_{\beta_1\dots{}^\sigma\dots\beta_q}$$

Nota del Socio straniero M. André Lichnerowicz, Laplacien sur une variété riemannienne et spineurs, Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Serie 8 33 (1962), fasc. n.5, p. 187-191, présenté à la séance du 17 novembre 1962.

Référence : https://www.bdim.eu/item?id=RLINA$_1$962$_8$$_3$3$_5$$_1$87$_0$.

Transcription en Latex : Denise Vella-Chemla, mars 2024.

[1] ∇ est l'opérateur de dérivation covariante.

[2] *Propagateurs et Commutateurs en relativité générale*, "Publ. Math. Ins. Hautes Études Scientif.", n° 10, pp. 26-27 t . 36 (1961).

[3] (Ibidem, p. 36).

De l'identité de Ricci appliquée à T il résulte :

$$(1.4) \qquad (\nabla_\lambda \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\lambda) T_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = \sum_k R_{\alpha_k \rho, \lambda\mu} T_{\alpha_1 \ldots {}^\rho \ldots \alpha_p} = 0$$

et l'on en déduit $W = 0$. Par contraction de α_l et μ dans (1.4), puis substitution à λ de α_l, on obtient :

$$R_{\alpha_l \rho} T_{\alpha_1 \ldots {}^\rho \ldots \alpha_p} - \sum_k^{k+l} R_{\alpha_l \rho, \alpha_l \sigma} T_{1 \ldots {}^\rho \ldots {}^\sigma \ldots \alpha_p} = 0.$$

En sommant par rapport à l, il vient $V = 0$, ce qui démontre le théorème.

Corollaire. *Si $\mathscr{C}$ est une application linéaire définie par un tenseur à dérivée covariante nulle, du module des q-tenseurs dans le module des r-tenseurs, $\mathscr{C}$ commute avec Δ. En particulier les opérateurs de Chern* [4] *relatifs aux formes commutent avec Δ.*

Considérons en effet l'application $\mathscr{C}$ définie à partir du $(q+r)$-tenseur C à dérivée covariante nulle par :

$$\mathscr{C} : \qquad U_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \to C^{\alpha_1 \ldots \alpha_q}_{\beta_1 \ldots \beta_r} U_{\alpha_1 \ldots \alpha_q}.$$

De

$$\Delta(C) = C \otimes \Delta U$$

et de la commutation de Δ avec la contraction, il résulte :

$$\Delta \mathscr{C} U = \mathscr{C} \Delta U.$$

2. Nous supposons que la variété V_n *de dimension paire* $(n = 2\nu)$ est telle que du fibré principal $\mathcal{E}(V_n)$ des repères orthonormés, ou puisse déduire *par extension* un fibré principal $\varphi(V_n)$ - dit le fibré des repères spinoriels - admettant pour groupe structural Spin(2ν) (Ici Spin(2ν) est le revêtement universel du groupe pseudo orthogonal qui est le groupe structural de $\mathcal{E}(V_n)$). La variété V_n est dite admettre une *structure spinorielle* ; il existe sur V_n un vecteur spineur γ de type (1.1) à dérivée covariante nulle. Si $\gamma_\alpha = (\gamma^a_\alpha b)$ $(\alpha, \ldots, = 1, \ldots, n$ indice tensoriel ; $a, b, \ldots, = 1, \ldots, n$ indices spinoriels) est la matrice relative à l'indice α des composantes de γ en *repère spinoriel*, on a :

$$(2.1) \qquad \gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = -2\, g_{\alpha\beta}\, e \qquad (\gamma^\alpha = g^{\alpha\beta} \gamma_\beta).$$

Nous désignons par $\varphi^{(2)}$ le module des 2-spineurs de type (1.1). Tout élément ψ de $\varphi^{(2)}$ peut s'écrire d'une manière et d'une seule :

$$(2.2) \qquad \psi = \sum_{p=0}^{2\nu} \frac{1}{p!} \gamma^{\rho_1} \ldots \gamma^{\rho_p} \alpha^{(p)}_{\rho_1 \ldots \rho_p}$$

où $\alpha^{(p)}$ est une p-forme. Ainsi l'algèbre extérieure des formes de V_n et le module des 2-spineurs admettent, en tant que modules, un isomorphisme :

$$S : \quad \alpha = \sum_p \alpha^{(p)} \to \psi \in \varphi^{(2)}$$

[4] S.S. Chern. *Algebraic geometry and Topology, Symposium Lefschetz*, pp. 103-121. Princeton Univ. Press. (1957) ; André Weil, *Un théorème de Chern en géometrie riemannienne*, "Sém. Bourbaki", n°. 239, Mai 1962.

défini par (2.2).

Soit λ le spineur $\gamma^1 \dots \gamma^{2\nu}$ et posons :

$$B\psi = \lambda\psi \qquad \overline{B}\psi = \psi\lambda.$$

Si $\psi = S \sum \alpha^{(p)}$ on a :

$$B\psi = S \sum (-1)^{p(p-1)2/} (* \, \alpha^{(p)}) \qquad \overline{B}\psi = S \sum (-1)^{p(p+1)/2} (* \, \alpha^{(p)})$$

où $*$ est l'opérateur d'adjonction sur les formes.

Désignons par v l'opérateur sur les formes :

$$v : \qquad \alpha = \sum \alpha^{(p)} \to v\alpha = \sum (-1)^p \alpha^{(p)}.$$

Si P et $\overline{P}$ sont les *opérateurs différentiels de Dirac* sur les 2-spineurs définis par :

(2.3) $$P\psi = \gamma^\alpha \, \nabla_\alpha \, \psi \qquad \overline{P}\psi = -\nabla_\beta \, \psi \, \gamma^\beta$$

on vérifie aisément :

(2.4) $$PS\alpha = S(d\alpha + \delta\alpha) \qquad PS\alpha = Sv(d\alpha – \delta\alpha).$$

Il en résulte que les opérateurs P et $\overline{P}$ *commutent* et que l'on a :

THÉROÈME 2. *Le laplacien* $\Delta = P^2 = \overline{P}^2$ *sur les 2-spineurs de type* $(1,1)$ *est l'image par* S *du laplacien de G. de Rham sur les formes :*

$$\Delta S\alpha = S\Delta\alpha.$$

D'autre part B et $\overline{B}$ vérifient :

(2.5) $$BP = -PB, \qquad \overline{B}P = P\overline{B}, \qquad B\overline{P} = \overline{P}B, \qquad \overline{B}\,\overline{P} = -\overline{P}\,\overline{B}.$$

Posons :

$$M = \frac{1}{2}(P + \overline{P}) \qquad N = \frac{1}{2}(P - \overline{P}).$$

On a $NM = MN = 0$ et $\Delta = M^2 + N^2$. De plus :

(2.6) $$BM = -NB, \qquad BN = -MB, \qquad \overline{B}M = N\overline{B}, \qquad \overline{B}N = M\overline{B}.$$

3. À tout opérateur de Chern $\mathscr{C}$ sur les formes correspond un opérateur - noté encore $\mathscr{C}$ - sur les éléments de $\varphi^{(2)}$

$$\mathscr{C} : \qquad \psi^a_b \to C^{a\ r}_{b\ s} \psi^s_r$$

où C est un 4-spineur à dérivée covariante nulle. Des théorèmes 1 et 2, il résulte que $\mathscr{C}$ commute avec $\Delta = P^2$. Cherchons à quelle condition $\mathscr{C}$ commute avec P, il faut et il suffit que :

$$\gamma^a C_b^r = C_b^r \gamma^a,$$

donc que :

$$C_b^r = \varphi_b^r \delta_l^k$$

Ainsi l'opérateur $\mathscr{C}$ est défini à partir de l'élément φ de $\varphi^{(2)}$ à dérivée covariante nulle par :

$$\text{(3.1)} \qquad \mathscr{C}: \qquad \psi \to \psi\varphi \qquad (\nabla\varphi = 0).$$

Supposons que $\psi = S\alpha^{(p)}$, $\varphi = S\ \beta^{(q)}$ où $\alpha^{(p)}$ est une p-forme, $\beta^{(q)}$ une q-forme. On a :

$$\text{(3.2)} \qquad (-1)^{pq}\psi\varphi = \sum_h (-1)^{(q-1)h+\left[\frac{h}{2}\right]} S K_h(\beta^q)\alpha^{(p)}$$

où les $K_h(\beta^{(q)})$ sont des opérateurs associés à une q-forme $\beta^{(q)}$ et introduits antérieurement[5].

Théorème 3. *Sur une variété riemannienne $V_{2\nu}$ admettant une structure spinorielle, les seuls opérateurs $\mathscr{C}$ sur $\varphi^{(2)}$ commutant avec P sont ceux définis par (3.1). Ils proviennent par S selon (3.2) des opérateurs $|K_h|$ associés à des formes à dérivée covariante nulle.*

4. Nous supposons dans la suite $V_{2\nu}$ *compacte et sa métrique elliptique*. Un élément η de $\varphi^{(2)}$ est dit *harmonique* si $\Delta\eta = P^2\eta = 0$; η est l'image par S d'une forme harmonique, donc fermée et cofermée. De (2.4) il résulte que *pour que η soit harmonique, il faut et il suffit que* $P\eta = 0$.

D'après le théorème de Hodge-de Rham, toute forme α peut s'écrire

$$\alpha = \Delta\beta + \mu$$

où μ est une forme harmonique. On en déduit :

$$S\alpha = S\Delta\beta + S\mu = \Delta S\beta + S\mu = P(PS\beta) + S\mu.$$

On obtient aussi une traduction spinorielle de la décomposition de Hodge-de Rham.

Théorème 4. *Sur une variété proprement riemannienne compacte $V_{2\nu}$ admettant une structure spinorielle, tout élément ψ de $\varphi^{(2)}$ admet une décomposition unique :*

$$\psi = P\chi + \varphi \qquad (\chi, \varphi \in \varphi^{(2)} \text{ et } P\varphi = 0).$$

5. Sous les mêmes hypothèses, étudions l'espace E des solutions $\psi \in \varphi^{(2)}$ de

$$\text{(5.1)} \qquad (\Delta - \varepsilon^2)\psi = 0 \qquad (\varepsilon = \text{const.} \neq 0).$$

[5] Lichnerowicz, *Généralisation de la géométrie kählerienne*, "Coll. géom. diff. Louvain", pp. 677-679 (1951) et *Théorie globale des Connexions*, Cremonese, Roma 1955, pp. 198-199.

Toute solution de :

$$(5.2) \qquad (P-\varepsilon)\varphi = 0 \qquad \text{ou} \quad (5.3) \qquad (P+\varepsilon)\psi = 0$$

est solution de (5.1). D'après (2.5) les deux espaces E' et E'' de solutions de (5.2) ou (5.3) ont même dimension. De la considération de l'application

$$f : \qquad \psi \in E \to f\psi = \frac{1}{2\,\varepsilon}(P+\varepsilon)\psi \in E'$$

il résulte que $E = E' \oplus E$". On a un résultat analogue en substituant $\overline{P}$ à P. Ces deux opérateurs commutant, on voit que E est somme directe de quatre sous-espaces $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, $F^{(3)}$, $F^{(4)}$ correspondant aux solutions de :

$$(5.3) \qquad \begin{cases} (F^{(1)})(M-\varepsilon)\psi = 0 & (F^{(2)})(N-\varepsilon)\psi = 0 \\ (F^{(3)})(M+\varepsilon)\psi = 0 & (F^{(4)})(N+\varepsilon)\psi = 0. \end{cases}$$

D'après (2.6) ces 4 espaces ont même dimension.

Théorème 5. *Sous les hypothèses du théorème 4, l'espace des solutions de* $(\Delta - \varepsilon^2)\psi = 0$ *est la somme directe des 4 sous-espaces F(i) (i=1,2,3,4) de même dimension définis par (5.3). Ce résultat se traduit aisément en terme de formes.*

6. Remarque. Des résultats analogues sont valables en dimension impaire $n = 2\,\nu + 1$. On sait qu'il existe un isomorphisme S entre le module des formes de degré $\leq \nu$ et $\varphi^{(2)}$. Pour une ν-forme :

$$PS\alpha^{(\nu)} = S\delta\alpha^{(\nu)} + \frac{(-1)^{\nu(\nu+1)/2}}{i^{\nu-1}} S * d\alpha^{(\nu)}.$$

On en déduit que le théorème 2 est encore valable ainsi que ses conséquences.