Analyse mathématique. – *Sur une fonction uniforme.* Note de M. Stieltjes, présentée par M. Hermite.

Le caractère analytique de la fonction $\zeta(z)$, qui est définie pour les valeurs de z dont la partie réelle surpasse l'unité par la série

$$1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{4^z}+\ldots,$$

a été complètement dévoilé par Riemann qui a montré que

$$\zeta(z)-\frac{1}{z-1}$$

est holomorphe dans tout le plan.

Les zéros de la fonction $\zeta(z)$ sont d'abord

$$-2, -4, -6, -8, \ldots ;$$

il y en a, en outre, une infinité d'autres, qui sont tous imaginaires, la partie réelle restant comprise entre 0 et 1.

Riemann a annoncé comme très probable que toutes ces racines imaginaires sont de la forme $\frac{1}{2}+ai$, a étant réel.

Je suis parvenu à mettre cette proposition hors de doute par une démonstration rigoureuse. Je vais indiquer la voie qui m'a conduit à ce résultat.

D'après une remarque due à Euler,

$$1:\zeta(z)=\prod\left(1-\frac{1}{p^s}\right),$$

p représentant tous les nombres premiers, ou encore

$$1:\zeta(z)=1-\frac{1}{2^z}-\frac{1}{3^z}-\frac{1}{5^z}+\frac{1}{6^z}-\frac{1}{7^z}+\frac{1}{10^z}-\ldots.$$

C'est l'étude plus approfondie de la série qui figure ici dans le second membre qui conduit au but désiré. On peut démontrer, en effet, que cette série est convergente et définit une fonction analytique tant que la partie réelle de z surpasse $\frac{1}{2}$.

Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, 1885, 2$^{\text{ième}}$ semestre, (T. 101, N$^{\text{o}}$ 2, p. 153).

Il est évident, d'après cela, que $\zeta(z)$ ne s'évanouit pour aucune valeur de z dont la partie réelle surpasse $\frac{1}{2}$. Mais l'équation $\zeta(z) = 0$ ne peut admettre non plus des racines imaginaires dont la partie réelle est inférieure à $\frac{1}{2}$. En effet, en admettant l'existence d'une telle racine $z = z_1$, on aurait aussi $\zeta(1 - z_1) = 0$, comme le montre la relation entre $\zeta(z)$ et $\zeta(1 - z)$ établie par Riemann. Or la partie réelle de $1 - z_1$ est supérieure à $\frac{1}{2}$.

Par conséquent, *toutes les racines imaginaires de* $\zeta(z) = 0$ *sont de la forme* $\frac{1}{2} + ai$, *a étant réel.*