Histoire des mathématiques : pourquoi et comment
André Weil

Mon premier point sera un point évident. Contrairement à certaines sciences dont l'histoire complète consiste en l'assemblage de souvenirs de quelques-uns de nos contemporains, les mathématiques ont non seulement une histoire, mais elles ont même une histoire longue, qui a été écrite au moins depuis Eudemos (un élève d'Aristote). En effet, la question "Pourquoi ?" est peut-être superflue, ou serait mieux reformulée en "Pour qui ?"

Pour qui quelqu'un écrit-il une histoire générale ? Pour le profane éduqué, comme Hérodote l'a fait ? Pour les hommes d'état et les philosophes, comme Thucydides ? Pour quelques historiens, comme cela se fait la plupart du temps de nos jours ? Quelle est l'audience d'un historien de l'art ? Ses collègues, ou bien un public amateur d'art, ou encore les artistes (qui semblent n'en avoir que peu d'utilité) ? Qu'en est-il d'une histoire de la musique ? Concerne-t-elle principalement des amoureux de la musique, ou des compositeurs, ou des artistes en exercice, ou des historiens, ou est-elle une discipline totalement indépendante dont l'appréciation ne peut être que restreinte à ceux qui la pratiquent ? Des questions similaires ont été chaudement débattues pendant de nombreuses années parmi les historiens éminents des mathématiques, Moritz Cantor, Gustav Enestrém, Paul Tannery. Même Leibniz avait quelque chose à dire à ce propos, comme à propos de nombreux autres sujets :

> *"Son utilité n'est pas seulement que l'Histoire peut donner à chacun son dû et que d'autres pourraient souhaiter recevoir de telles louanges, mais également que l'art de la découverte doit être promu et que ces méthodes doivent être connues à travers des exemples illustres[1]."*

Que l'humanité puisse être aiguillée vers de plus hautes réalisations par la perspective d'une renommée éternelle est bien sûr un thème classique, hérité de l'antiquité ; il semblerait que nous y soyons devenus moins sensibles que nos aïeux ne l'étaient, même si cette idée n'a peut-être pas perdu toute sa force. Comme l'indique la dernière phrase de Leibniz, son objectif est clair. Il souhaite que l'historien des sciences écrive

---

Exposé au Congrès international des informaticiens en 1978 à Helsinki.

1. Utilissimum est cognosci veras inventionum memorabilium origines, praesertim earum, quae non casu, sed vi meditandi innotuere. Id enim non eo tantum prodest, ut Historia literaria suum cuique tribuat et alii ad pares laudes invitentur, sed etiam ut augeatur ars inveniendi, cognita methodo illustribus exemplis. Inter nobiliora hujus temporis inventa habetur novum Analyseos Mathematicae genus, Calculi differentialis nomine notum..." (Math, Schr., ed. C. I. Gerhardt, t. V, p. 392).

en premier lieu pour les scientifiques créatifs, ou potentiellement créatifs. C'était l'audience qu'il avait en tête en écrivant rétrospectivement à propos de son "invention la plus noble" du calcul différentiel.

D'un autre côté, comme l'a observé Moritz Cantor, on peut traiter l'histoire mathématique en la considérant comme une discipline auxiliaire, destinée à fournir aux vrais historiens des catalogues fiables de faits mathématiques, arrangés par dates, pays, sujets et auteurs. L'histoire mathématique serait alors une portion, et une portion pas vraiment significative, de l'histoire des techniques et des technologies, et il serait juste de la regarder alors complètement de l'extérieur. L'historien du XIX$^{\text{ème}}$ siècle a besoin d'avoir quelques connaissances sur les progrès qui ont été fait sur les moteurs de trains. Il dépend de spécialistes pour obtenir cette information, mais il se moque de la façon dont fonctionne un moteur, ou bien de l'immense effort intellectuel qu'il a fallu pour créer la thermodynamique. De manière similaire, le développement des tables nautiques et d'autres aides à la navigation est de peu d'importance pour l'historien du XVII$^{\text{ème}}$ siècle en Angleterre, mais l'importance de Newton dans ce domaine lui fournira au mieux une note de bas de page ; le fait que Newton ait été un "gardien de la Menthe" (une position honorifique anglaise de représentation de la Royauté) ou l'oncle de la maîtresse d'un grand gentilhomme, l'intéressera davantage historiquement que Newton le mathématicien.

D'un autre point de vue, les mathématiques peuvent occasionnellement fournir à l'historien de la culture une sorte de "traceur" pour étudier l'interaction entre différentes cultures. Avec cela, nous approchons d'éléments présentant un véritable intérêt pour nous les mathématiciens ; mais même là, nos attitudes diffèrent largement de celles des historiens professionnels. Pour eux, une pièce romaine, trouvée quelque part en Inde, a une signification précise ; c'est rarement le cas d'une théorie mathématique.

Cela ne signifie pas pour autant qu'il n'est pas possible qu'un théorème ne soit pas redécouvert de temps à autre, voire même dans des environnements culturels assez différents. Quelques séries de puissances semblent avoir été découvertes indépendamment en Inde, au Japon et en Europe. Des méthodes pour la solution de l'équation de Pell ont été exposées en Inde par Bhaskara au XX$^{\text{ème}}$ siècle, et ensuite à nouveau, à la suite d'un défi de Fermat, par Wallis et Brouncker en 1657. On peut même ajouter des arguments au sujet du fait que des méthodes similaires aient été connues des Grecs, peut-être par Archimède lui-même ; comme l'a suggéré Tannery, la solution indienne pourrait être d'origine grecque ; jusque là, cela reste une spéculation peu suivie. Il est certain que personne ne suggèrerait de connexion entre Bhaskara et nos auteurs du XVII$^{\text{ème}}$ siècle.

D'un autre côté, quand les équations quadratiques, résolues algébriquement dans des textes cunéiformes, refont surface chez Euclide, habillées d'un costume géométrique sans aucune motivation géométrique du tout, le mathématicien trouvera approprié de décrire ce dernier traitement comme étant de l'"algèbre géométrique" et il sera enclin à assumer la connexion avec Babylone, même en l'absence d'une évidence "historique" concrète. Personne ne demande de documents pour attester de l'origine commune du grec, du russe et du sanskrit, ou ne fait d'objection à leur désignation comme langages indo-européens.

Maintenant, laissant de côté les vues et souhaits des profanes et des spécialistes des autres disciplines, il est temps de revenir à Leibniz, et de considérer la valeur de l'histoire mathématique, à la fois intrinsèquement et de notre propre point de vue en tant que mathématiciens. En modifiant très légèrement le point de vue de Leibniz, nous pouvons dire que sa première utilité pour nous est de mettre ou de garder devant nos yeux des "exemples illustres" d'un travail mathématique de premier ordre.

Cela rend-il les historiens nécessaires ? Peut-être que non. Eisenstein est tombé amoureux des mathématiques très jeune en lisant Euler et Lagrange ; aucun historien ne lui a dit de le faire ou ne l'a aidé à les lire. Mais à son époque, les mathématiques progressaient d'une manière moins trépidante qu'aujourd'hui. Il ne fait aucun doute qu'un jeune homme peut de nos jours chercher des modèles et une inspiration dans le travail de ses contemporains ; mais cela se montrera rapidement comme étant une sévère imitation. D'un autre côté, s'il souhaite aller plus loin en arrière, il peut ressentir le besoin d'être quelque peu guidé ; c'est la fonction de l'historien, ou à tout niveau du mathématicien qui a un certain sens de l'histoire, de lui fournir une telle aide.

L'historien peut aussi aider d'une autre manière. Nous connaissons tous d'expérience ce qui peut être gagné à travers les connaissances personnelles quand nous souhaitons étudier le travail contemporain ; nos rencontres et conférences n'ont en fait aucun autre but. Les vies des grands mathématiciens du passé peuvent souvent avoir été ternes et peu excitantes, ou peuvent le sembler au profane ; pour nous, les biographies présentent moins de valeur pour nous rendre vivantes les personnes et leur environnement que leurs écrits. Quel mathématicien ne souhaiterait pas en savoir davantage sur Archimède que sa contribution supposée à la défense de Syracuse ? Notre compréhension de la théorie des nombres d'Euler serait-elle la même si nous n'avions pas ses publications à notre disposition ? L'histoire n'est-elle pas plus intéressante quand nous lisons son emménagement en Russie, ses échanges de lettres avec Goldbach, l'amenant presque accidentellement au contact du travail de Fermat, puis, plus tard dans sa vie, le début de sa correspondance avec Lagrange sur la théorie des nombres et les intégrales elliptiques ? Ne serions-nous pas ravis, qu'à travers ses lettres, un tel homme ne soit pas devenu pour nous comme un proche qui nous est plus intimement connu ?

Jusque là, pourtant, je n'ai fait qu'aborder la surface de mon thème. Leibniz suggérait l'étude d'"exemples illustres", non pour le plaisir esthétique que cela pourrait procurer, mais principalement de telle manière à "promouvoir l'art de la découverte". Ici, il est nécessaire de clarifier la distinction, dans les matières scientifiques, entre la tactique et la stratégie.

Par tactique, j'entends la gestion des outils quotidiens à la disposition des scientifiques ou des étudiants à un moment donné ; ils sont mieux appris d'un enseignant compétent et de l'étude du travail contemporain. Pour le mathématicien, cela peut inclure l'utilisation du calcul différenciel à un moment donné, ou de l'algèbre homologique à un autre moment. Pour l'historien des mathématiques, la tactique a beaucoup en commun avec celle des historiens. Il doit chercher sa documentation à sa source, ou aussi près d'elle que possible ; l'information de seconde main est de peu de valeur. Dans certains domaines de recherche, on doit partir à la chasse et lire des manuscrits ; dans d'autres, on peut se contenter des textes publiés, mais alors la question de leur fiabilité ou manque de fiabilité au contraire doit toujours être gardée à l'esprit. Une exigence indispensable est une connaissance adéquate de la langue des sources ; c'est un principe basique et sensé de toute recherche historique qu'une traduction ne peut jamais remplacer une œuvre originale quand cette dernière est disponible. Par chance, l'histoire des mathématiques occidentales après le XV$^{\text{ème}}$ siècle ne nécessite aucune connaissance en plus du latin et des langages modernes d'Europe de l'ouest ; pour de nombreux objectifs, le français et l'allemand, et parfois l'anglais, peuvent même être suffisants.

En contraste avec cela, la stratégie signifie l'art de reconnaître les problèmes principaux, de les attaquer sur leurs points faibles, de mettre en place les futures lignes à l'avance. La stratégie mathématique est concernée par les objectifs à long terme ; elle nécessite une profonde compréhension des grandes tendances et de l'évolution des idées sur de longues périodes. Elle est presque indiscernable de ce que Gustav Enestrém avait l'habitude de décrire comme l'objet principal de l'histoire mathématique, à savoir "les idées mathématiques, considérées historiquement"[2], ou, comme l'a noté Paul Tannery, "la filiation des idées et l'enchaînement des découvertes"[3]. Là nous sommes au cœur de la discipline dont nous discutons, et c'est un fait heureux que l'aspect vers lequel, selon Enestrém et Tannery, l'historien mathématique doit diriger principalement son attention est aussi celui de la plus grande importance pour tout mathématicien qui veut regarder au-delà de la pratique journalière de son métier.

La conclusion à laquelle nous sommes amenés a peu de substance, c'est vrai, à moins que nous soyons d'accord sur ce qui est et ce qui n'est pas une idée mathématique.

2. Die mathematischen Ideen in historischer Behandlung (Bibl. Math. 2 (1901), p.1).
3. cf. *La filiation des idées et l'enchaînement des découvertes* (P. Tannery, Œuvres, vol. X, p. 166).

A ce sujet, le mathématicien est très enclin à consulter les autres. Selon les mots de Housman (lorsqu'on lui demanda de définir la poésie), il est possible qu'il ne soit pas capable de définir ce qu'est une idée mathématique, mais il aime à penser que quand il en sent une, il la reconnaît. Il est susceptible de ne pas en voir une, par exemple, dans les spéculations d'Aristote à propos de l'infini, ou bien chez un certain nombre de penseurs médiévaux sur le même sujet, même si certains d'entre eux étaient plus intéressés par les mathématiques qu'Aristote ne l'était ; l'infini est devenu une idée mathématique après que Cantor ait défini les ensembles équipotents et prouvé quelques théorèmes à leur propos. Les idées des philosophes grecs à propos de l'infini peuvent être d'un grand intérêt en tant que telles ; mais sommes-nous prêts à croire qu'elles ont eu une grande influence sur le travail des mathématiciens grecs ? A cause d'elles, Euclide aurait dû s'abstenir de dire qu'il y a une infinité de nombres premiers, et aurait dû énoncer ce fait différemment.

Comment se fait-il alors que, quelques pages plus loin, il établisse qu'"il y a une infinité de segments"[4] incommensurables à un segment donné ? Certaines universités ont créé des chaires d'"histoire et philosophie des mathématiques" ; il est difficile pour moi d'imaginer ce que ces deux sujets peuvent avoir en commun.

Il est difficile de déterminer où ces "notions communes" (pour utiliser l'expression d'Euclide) s'arrêtent et où commencent les mathématiques. La formule pour la somme des n premiers entiers, liée de façon proche au concept "Pythagoréen" de nombres triangulaires, mériterait certainement d'être appelée idée mathématique ; mais que devrions-nous dire à propos de l'arithmétique commerciale élémentaire, comme elle apparaît dans tant et tant de livres depuis l'antiquité jusqu'au livre de recettes d'Euler sur le même sujet ? Le concept d'icosaèdre régulier appartient clairement aux mathématiques ; devrions-nous dire la même chose à propos du concept de cube, ou de celui de rectangle, ou de celui de cercle (qui ne doit peut-être pas être séparé de l'invention de la roue) ? Ici nous avons une zone de crépuscule entre l'histoire culturelle et l'histoire mathématique ; cela n'a pas trop d'importance de savoir où l'on place la frontière. Tout ce que le mathématicien peut dire est que plus son intérêt tend à fléchir, plus il se met à traverser cette frontière.

Cependant, une fois qu'on s'est mis d'accord sur le fait que les idées mathématiques sont les objets réels de l'histoire mathématique, il est possible d'en tirer des conséquences utiles ; l'une a été formulée ainsi par Tannery (*loc. cit.* note 3, p. 164). Il n'y a aucun doute, dit-il, sur le fait qu'un scientifique peut posséder ou acquérir toutes les qualités nécessaires pour faire un excellent travail sur l'histoire des sciences ; plus grand est son talent en tant que scientifique, meilleur sera son travail historique. Comme exemples, il mentionne Chasles pour la géométrie ; ainsi que Laplace pour l'astronomie, Berthelot pour la chimie ; peut-être pensait-il également à son ami Zeu-

4. traduction de la phrase en grec ancien (Bk. X, Def. 3).

then. Il aurait pu également mentionner Jacobi, si Jacobi avait suffisamment vécu pour publier son travail historique [5].

Mais les exemples sont grandement nécessaires. En effet, il est évident que la capacité à reconnaître les idées mathématiques sous une forme obscure et fruste, et d'en poursuivre la trace sous les nombreux déguisements qu'elles sont capables de prendre avant de sortir en pleine lumière, doit être associée à une compétence mathématique plus que moyenne. De plus, elle est la composante essentielle du talent mathématique en question, puisque pour une large part, la découverte consiste à saisir fermement les idées vagues qui sont "dans l'air", quelques-unes d'entre elles volant tout autour de nous, quelques-autres (pour citer Platon) flottant dans nos propres cerveaux.

Combien de connaissances mathématiques doit-on posséder pour traiter l'histoire mathématique ? Selon certains, on doit en connaître aussi peu que ce qui était connu des auteurs que l'on souhaite étudier [6] ; d'autres vont même jusqu'à penser que moins l'on en sait, mieux on est préparé à lire ces auteurs avec un esprit ouvert et à éviter les anachronismes. C'est plutôt l'opposé qui est vrai. Une compréhension en profondeur des mathématiques à une période donnée ne peut être obtenue sans une connaissance étendue bien au-delà de son sujet visible. Plus souvent que le contraire, ce qui rend une telle étude intéressante, c'est précisément l'occurrence tôt dans l'histoire de concepts et méthodes destinés à émerger seulement plus tard dans l'esprit conscient des mathématiciens ; la tâche de l'historien est de s'en désengager et de tracer leur influence ou leur manque d'influence sur les développements ultérieurs. L'anachronisme consiste à attribuer à un auteur une telle connaissance consciente qu'il n'a jamais eue ; il y a une grande différence entre le fait de reconnaître Archimède comme le précurseur du calcul différentiel et intégral, dont l'influence sur les découvreurs du calcul ne peut être sous-estimée, et avoir la fantaisie de le voir, comme cela a pu parfois être fait, comme un praticien ancien de tels calculs. D'un autre côté, il n'y a aucun anachronisme dans le fait de considérer Desargues comme le découvreur de la géométrie projective des sections coniques ; mais l'historien doit souligner que son travail, et celui de Pascal, seraient sûrement tombés dans l'oubli le plus total, et n'ont pu être sauvés de cet oubli qu'après que Poncelet et Chasles aient indépendamment redécouvert le sujet dans son ensemble.

De manière similaire, considérons l'assertion suivante : les logarithmes établissent

5. Jacobi, comme étudiant, avait hésité entre la philologie classique et les mathématiques ; il en a toujours gardé un profond intérêt pour les mathématiques grecques et l'histoire mathématique ; des extraits de ses écrits à ce sujet ont été publié par Koenigsberger dans sa biographie de Jacobi (incidemment, un bon modèle de biographie orientée vers les mathématiques d'un grand mathématicien) : voir L. Koenigsberger, *Carl Gustav Jacob Jacobi*, Teubner, 1904. pp. 385-395 et 413-414.

6. Cela semble être l'avis de Loria : "Per comprendere e giudicare gli scritti appartenenti alle età passate, basta di essere esperto in quelle parti delle scienze che trattano dei numeri e delle figure e che si considerano attualmente come parte della cultura generale dell'uomo civile" (G. Loria, *Guida allo Studio della Storia delle Matematiche*, U. Hoepli, Milano, 1946, p. 271).

un isomorphisme entre le semi-groupe multiplicatif des nombres entre 0 et 1 et le semi-groupe additif des nombres réels positifs. Cela aurait pu ne pas faire sens jusqu'à assez récemment. Si, pourtant, nous laissons les mots de côté, et regardons les faits derrière une telle assertion, il n'y a aucun doute qu'elle était bien comprise par Neper quand il a inventé les logarithmes, excepté que sa conception des nombres réels n'était pas aussi claire que la nôtre ; c'est pourquoi il dût utiliser les concepts cinématiques pour clarifier sa signification, de la même façon qu'Archimède l'avait fait, pour des raisons similaires, dans sa définition de la spirale [7]. Allons encore plus loin ; le fait que la théorie des rapports de grandeurs et des rapports d'entiers, telle que développée par Euclide dans les livres V et VII des Eléments, doive être regardée comme un chapitre du début de la théorie des groupes est mise hors de doute par l'expression "double ratio" qu'il utilise pour ce qu'il appelle le carré d'un rapport. Historiquement, il est plausible que la théorie musicale ait fourni la motivation originale de la théorie grecque des groupes de rapports d'entiers, en net contraste avec le traitement purement additif des fractions en Egypte ; si tel est le cas, nous avons là un exemple ancien de l'interaction mutuelle entre les mathématiques pures et les mathématiques appliquées. En tous cas, il est impossible pour nous d'analyser correctement le contenu des livres V et VII d'Euclide sans le concept de groupe et même sans celui des groupes d'opérateurs, puisque les rapports de grandeurs sont traités comme des groupes multiplicatifs agissant sur le groupe additif des grandeurs elles-mêmes [8]. Une fois que ce point de vue est adopté, ces livres d'Euclide perdent leur caractère mystérieux, et il devient facile de suivre la ligne qui amène directement d'eux à Oresme et Chuquet, puis à Neper et aux logarithmes (cf. NB, pp. 154-159 et 167-168). Ce faisant, nous ne sommes bien sûr pas en train d'attribuer le concept de groupe à l'un de ces auteurs ; on ne devrait pas non plus l'attribuer à Lagrange, même quand il faisait ce que nous appelons maintenant de la théorie de Galois. D'un autre côté, quand Gauss n'avait pas le terme, il avait certainement le concept clair de groupe commutatif fini, et avait bien été préparé à cela par son étude de la théorie des nombres d'Euler.

Laissez-moi citer quelques exemples de plus. Les écrits de Fermat indiquent qu'il connaissait la théorie des formes quadratiques $X^2 + nY^2$ pour $n = 1, 2, 3$, en utilisant des démonstrations par "descente infinie". Il n'a pas conservé ces preuves ; mais plus tard, Euler a développé cette théorie, en utilisant également la descente infinie, ce qui nous permet de supposer que les démonstrations de Fermat ne différaient pas beaucoup de celles d'Euler. Pourquoi la descente infinie réussit-elle dans ces cas-là ? C'est aisément expliqué par les historiens qui savent que les corps quadratiques ont un algorithme d'Euclide ; ce dernier, transcrit dans le langage et les notations de Fer-

7. cf. N. Bourbaki, *Eléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, 1960, pp. 167-168 et 174 ; cette collection d'essais historiques, extraites du livre *Eléments de mathématique* du même auteur sous un titre fallacieux, sera désormais dénotée NB.

8. Qu'Euclide ait cru ou non que le groupe des rapports de grandeurs soit indépendant du type des grandeurs étudiées reste un point discutable ; cf. O, Becker, Quellen u, Studien **2** (1933), 369-387.

mat et Euler, donne-t-il précisément leurs preuves par descentes infinies, exactement comme la démonstration de Hurwitz pour l'arithmétique des quaternions, transcrite de la même manière, fournit la preuve d'Euler (qui était peut-être aussi celle de Fermat) de la représentation des entiers en sommes de quatre carrés.

Prenons à nouveau la notation de Leibniz $\int y\,dx$ dans le calcul. Il insiste de manière répétée sur son caractère invariant, d'abord dans sa correspondance avec Tschirnhaus (qui n'en a pas montré sa compréhension), puis dans le *Acta Eruditorum* de 1686 ; il avait même un mot pour cela ("*universalitas*"). Les historiens se sont âprement opposés à lui notamment sur le résultat comparativement moins important que Leibniz avait découvert et qui, dans certains livres, est appelé "le théorème fondamental du calcul". Mais l'importance de la découverte par Leibniz de l'invariance de la notation ydx n'a pu être pleinement appréciée avant qu'Elie Cartan n'introduise le calcul des formes extérieures des différentielles et montre l'invariance des notations $ydx_1 \dots dx_m$, non seulement sous les changements de variables indépendantes (ou de coordonnées locales), mais même sous "pull-back" [9].

Considérons maintenant le débat qui eut lieu entre Descartes et Fermat à propos des tangentes (Cf. NB, p. 192). Descartes, ayant décidé, une fois pour toutes, que seules les courbes algébriques étaient un sujet valable pour les géomètres, inventa une méthode pour trouver leurs tangentes, basée sur l'idée qu'une courbe variable, intersectant une courbe C en un certain point P, devient tangente à C en P quand l'équation de leurs intersections a une racine double correspondant à P. Bientôt, Fermat, ayant trouvé la tangente de la cycloïde par une méthode infinitésimale, posa le défi à Descartes de faire de même avec sa propre méthode. Bien sûr, celui-ci ne put le faire ; étant l'homme qu'il était, il trouva la réponse (Œuvres, I, p. 308), en donna une démonstration ("plutôt courte et plutôt simple", en utilisant le centre de rotation instantané qu'il avait inventé pour l'occasion) et il ajouta qu'il aurait pu fournir une autre preuve "plus à son goût et plus géométrique" qu'il avait omise "pour se préserver de la fatigue de l'écrire" ; cependant, dit-il, "de telles lignes sont mécaniques" et il les excluait de la géométrie. Ceci, bien sûr, était ce que Fermat essayait de faire ; il savait, aussi bien que Descartes, ce qu'est une courbe algébrique, mais restreindre la géométrie à ces courbes était assez étranger à sa manière de penser et à celle de la plupart des géomètres du XVII$^{\text{ème}}$ siècle.

Acquérir des idées sur le caractère d'un grand mathématicien et sur ses faiblesses est un plaisir innocent que même les historiens sérieux ne peuvent nier eux-mêmes. Mais que pouvons-nous conclure d'autre de cet épisode ? Très peu, dans la mesure où la distinction entre la géométrie différentielle et la géométrie algébrique doit être clarifiée. La méthode de Fermat appartenait à la première ; elle dépendait des premiers termes de l'expansion en séries entières locales ; elle fournit le point de départ

9. Cf. NB, p. 208, et A. Weil, Bull. Amer. Math. Soc. **81** (1975), 683.

de tous les développements ultérieurs en géométrie différentielle et calcul différentiel. D'un autre côté, la méthode de Descartes appartient à la géométrie algébrique, mais, si on l'y restreint, elle reste une curiosité jusqu'à ce que le besoin se fasse sentir de méthodes valides sur les corps de base arbitraires.

En effet, le point en litige ne pouvait être et ne fut pas perçu correctement jusqu'à ce que la géométrie algébrique ne lui donne son sens complet.

Il y a également une autre raison pour laquelle le métier d'historien des mathématiques peut être mieux exercé par ceux qui sont ou ont été des mathématiciens actifs, ou au moins qui sont au contact proche de mathématiciens actifs ; il y a plusieurs types d'incompréhensions fréquentes dont notre propre expérience peut nous aider à nous préserver. Nous ne savons que trop bien, par exemple, que nous ne devrions pas supposer systématiquement qu'un mathématicien est toujours complètement au courant des travaux de ses prédécesseurs, même quand il inclut les travaux en question dans ses références bibliographiques ; lequel d'entre nous a-t-il lu tous les livres qu'il a listés dans les bibliographies de ses propres écrits ? Nous savons que les mathématiciens sont rarement influencés dans leur travail par des considérations philosophiques, même quand ils prétendent les prendre très au sérieux ; nous savons qu'ils ont leur propre manière de gérer les matériaux sur lesquels ils appuient leurs travaux, qui vont du mépris téméraire à l'attention critique la plus douloureuse. Par dessus tout, nous avons appris la différence entre une pensée originale et la sorte de raisonnement routinier qu'un mathématicien met souvent en œuvre lorsqu'il doit "faire tourner la machine" dans le but de satisfaire ses pairs, ou peut-être seulement de se satisfaire lui-même. Une démonstration fastidieusement laborieuse peut être un signe de ce que son rédacteur a été moins heureux à s'exprimer ; mais plus souvent que le contraire, comme nous le savons, elle indique qu'il a travaillé sous des contraintes qui l'ont empêché de traduire directement en mots ou en formules quelques idées très simples. Un nombre incalculable de tels exemples peuvent être fournis de cela, allant de la géométrie grecque (qui a peut-être été finalement étouffée par de telles limitations) jusqu'à ce qu'on appelle "epsilontic" et jusqu'à Nicolas Bourbaki, qui a même jugé pertinent d'utiliser un signe spécial dans la marge pour mettre en garde le lecteur de preuves de cette sorte. Une tâche importante d'un historien sérieux des mathématiques, et parfois l'une des tâches les plus difficiles qu'il ait à effectuer, consiste précisément à passer au crible de telles habitudes pour trouver ce qui était réellement nouveau dans le travail des grands mathématiciens du passé.

Bien sûr, le talent et l'expérience mathématique ne suffisent pas pour qualifier une personne d'historien des mathématiques. Pour citer à nouveau Tannery (loc. cit. note 3, p. 165), "ce qui est nécessaire par-dessus tout, c'est un goût pour l'histoire ; on doit développer un certain sens historique". En d'autres termes, une qualité de sympathie intellectuelle est requise, qui embrasse les époques passées aussi bien que l'époque actuelle. Même des mathématiciens très reconnus peuvent manquer de l'une et l'autre de ces qualités ; chacun d'entre nous pourrait peut-être nommer certains d'entre nous qui refusent résolument de se familiariser avec tout autre travail que le leur propre. Il est nécessaire de ne pas céder à la tentation (naturelle pour un mathématicien) de se concentrer sur les plus grands mathématiciens connus du passé et négliger le travail de valeur seulement subsidiaire. Même du point de vue du plaisir esthétique, on risque de perdre beaucoup par une telle attitude, comme le sait tout amateur d'art ; cela peut être historiquement fatal, car la rareté du génie prospère en l'absence d'un environnement adéquat et parce qu'une certaine familiarité avec le second est un prérequis essentiel pour une véritable compréhension et appréciation du premier. Même les livres en usage à chaque étape du développement mathématique devraient être examinés attentivement de manière à trouver, quand c'est possible, ce qui était et ce qui n'était pas, la connaissance commune à un moment donné.

Les notations aussi ont leur importance. Même lorsqu'elles semblent ne pas en avoir du tout, elles peuvent fournir des pointeurs utiles pour l'historien ; par exemple, quand il trouve que pendant longtemps, et également de nos jours, la lettre K a été utilisée pour dénoter les corps et les lettres allemandes pour dénoter les idéaux, il fait partie de sa tâche d'expliquer pourquoi. D'un autre côté, il arrive souvent que ces notations soient inséparables des avancées théoriques majeures. Cela a été le cas avec le lent développement des notations algébriques, amenées finalement à leur terme dans les mains de Viète et Descartes. Cela a également été le cas à nouveau avec la création hautement individuelle des notations pour le calcul par Leibniz (peut-être le plus grand maître du langage symbolique qui ait jamais existé) ; comme nous l'avons vu, ces notations incarnaient les découvertes de Leibniz si magnifiquement que les historiens après lui, déçus par la simplicité de ces notations, n'ont pas vu certaines des découvertes correspondantes.

Ainsi, l'historien a ses propres tâches, même si elles chevauchent celles du mathématicien et peuvent parfois coïncider avec elles. Ainsi, au XVII$^{\text{ème}}$ siècle, il arrivait que quelques-uns des meilleurs mathématiciens, en l'absence de prédécesseurs immédiats dans tous les champs des mathématiques sauf en algèbre avaient beaucoup de travail à faire qui, selon nous, étaient plutôt du ressort des historiens, de l'édition, de la publication, de la reconstruction du travail des Grecs, d'Archimède, Apollonios, Pappos, Diophante. Même de nos jours, l'historien et le mathématicien se rencontreront fréquemment sur des terrains communs en étudiant les productions mathématiques des XIX$^{\text{ème}}$ et XX$^{\text{ème}}$ siècles, sans parler de quoi que ce soit de plus ancien. De ma propre expérience, je peux attester de la valeur des suggestions trouvées chez Gauss et chez Eisenstein, et du fait que les congruences de Kummer pour les nombres de Bernoulli, après avoir été regardées comme pas grand chose de plus que des curiosités pendant de nombreuses années, ont trouvé une nouvelle vie dans la théorie des L-fonctions p-adiques, tandis que les idées de Fermat sur l'utilité de la descente infinie dans l'étude des équations Diophantiennes de genre 1 ont prouvé leur valeur dans le travail contemporain sur ce même sujet.

Qu'est-ce qui sépare, alors, l'historien du mathématicien quand tous deux étudient les travaux du passé ? En partie, sans aucun doute, leurs techniques, ou comme je l'ai proposé, leurs tactiques ; mais principalement, peut-être, leurs attitudes et motivations. L'historien tend à diriger son attention vers un passé plus lointain et vers une plus grande variété de cultures ; le mathématicien peut tirer moins de profit de telles études, si ce n'est la satisfaction esthétique qui en découle et le plaisir de découvertes vicariantes. Le mathématicien quant à lui, tend à choisir ses lectures en fonction d'un objectif précis, ou du moins avec l'espoir que des suggestions fructueuses en émergeront. Ici nous pouvons citer les mots de Jacobi dans ses jeunes années à propos d'un livre qu'il venait de lire : "Jusqu'à maintenant, dit-il, à chaque fois que j'ai étudié des travaux d'une certaine valeur, ils ont suscité en moi des pensées originales ; cette fois-ci, je me suis retrouvé un peu les mains vides" [10]. Comme cela a été remarqué par Dirichlet, à qui j'ai emprunté cette citation, il est ironique que le livre en question n'ait été autre que le livre de Legendre *Exercices de calcul intégral*, contenant son travail sur les intégrales elliptiques, source qui fournirait très vite à Jacobi l'inspiration pour ses plus grandes découvertes ; mais ces mots sont typiques. Le mathématicien choisit ses lectures la plupart du temps dans le but de stimuler des pensées originales (ou, pourrais-je ajouter, parfois pas si originales) ; il n'y a pas d'injustice, je pense, à dire que son but est plus directement utilitaire que celui de l'historien. Cependant, le travail essentiel de l'un comme de l'autre est d'étudier les idées mathématiques, celles du passé, celles du présent, et quand ils le peuvent, celles du futur. Tous peuvent trouver des apports de grande valeur et des éclaircissements dans le travail des autres. Ainsi ma question originale "Pourquoi une histoire des mathématiques ?" se réduit finalement à la question "Pourquoi les mathématiques ?", question à laquelle je ne me sens pas appelé à répondre.

10. "Wenn ich sonst ein bedeutendes Werk studiert habe, hat es mich immer zu eignen Gedanken angeregt... Diesmal bin ich ganz leer ausgegangen und nicht zum geringsten Einfall inspiriert worden". (Dirichlet, *Werke*, Bd, II, S. 231).