## Deux transcriptions
## Interview de Yuri Manin par Bernard Julia et Jean-Michel Kantor à l'IHES
## Entretien entre Yuri Manin et Jean-Pierre Serre au Collège de France
## 1989

### Manin à Paris

Voix off de Jean-Michel Kantor : Yuri Ivanovitch Manin, professeur à l'Université de Moscou, est l'un des maîtres de l'école mathématique soviétique. Ses travaux concernent l'arithmétique, la géométrie algébrique et depuis 1970, de nouveaux rapprochements qui se sont instaurés entre les mathématiques et la physique. Il est revenu à Paris en mai 1989, après 22 ans d'absence, l'occasion de revoir de vieilles connaissances, comme Jean-Pierre Serre, éminent mathématicien français, Professeur au Collège de France, et d'évoquer les changements profonds qui ont marqué les mathématiques depuis 20 ans, en particulier ces rapprochements fructueux entre les mathématiques et la physique, qui fait l'objet d'une discussion avec Bernard Julia, jeune chercheur du Centre de Physique théorique de l'École Normale Supérieure.

### Institut des Hautes Études Scientifiques, Bures sur Yvette, 12 mai 1989.

Bernard Julia : Dans votre livre *Mathématiques et Physique*, vous dites que chaque discipline a son propre corps de doctrine, ses propres images. Alors les physiciens peuvent travailler par analogie à l'intérieur de la physique, et la physique s'est développée longtemps comme ça, les mathématiques aussi. Et là, justement, ce qui est fécond en ce moment, c'est que les concepts sont partagés, ils deviennent plus larges et ils donnent des idées à la fois en mathématiques et en physique.

Yuri Manin : C'est ça. Par exemple, disons, l'idée de l'espace... Bon, oui... Peut-être que c'est un bon exemple. Considérons l'idée de l'espace physique. C'est quelque chose que nous avons en commun, n'est-ce pas ? L'espace physique, c'est quelque chose de dimension 3, c'est l'intérieur de cette pièce, par exemple, n'est-ce pas ? On peut s'imaginer qu'il est constitué de tout petits points, n'est-ce pas. Le point est défini par une idée physique, le point, c'est une toute petite place, dans laquelle vous pouvez mettre quelque chose qui est petit, je ne sais pas, *(Jean-Michel Kantor propose "un grain de sable" mais Yuri Manin choisit)* un petit livre, ou un petit bouton, ou quelque chose comme ça, n'est-ce pas. C'est une notion intuitive d'un espace. Alors un mathématicien vient et dit que c'est l'espace 3-dimensionnel, ça veut dire que vous pouvez faire des mesures ; il faut 3 coordonnées pour définir...

Jean-Michel Kantor : Oui, c'est Descartes qui...

Yuri Manin : Oui, c'est Descartes... évidemment, c'est Descartes !

Jean-Michel Kantor : Les coordonnées cartésiennes...

Yuri Manin : En fait, c'est peut-être une des plus importantes découvertes dans l'Histoire des sciences mathématiques et physiques, elle a été faite par Descartes : c'est qu'il faut décrire l'espace

Vidéo visionnable à l'adresse :
https://e.pcloud.link/publink/show?code=XZ6vFhZPSubSQd8x5JhGlq8hLYJA7dbMwjy.

par le moyen algébrique, par le moyen d'un langage discret, quelque chose comme ça, par les nombres, disons.

Après ça, un physicien dit que nous avons un espace, mais nous avons aussi le temps. On peut mesurer le temps, de la même manière : on a l'horloge, n'est-ce pas, on peut dire qu'une chose instantanée se passe dans un point de l'espace, et dans un moment donné du temps. On a 4 coordonnées.

Après ça, un mathématicien, en partant de la notion d'espace intuitive dit "Bon, pourquoi 3 ou 4 coordonnées ?". On peut imaginer un espace de 2 coordonnées, c'est le plan, c'est par ici (*désignant la surface du sol*), un espace en une coordonnée, c'est évidemment une droite, une ligne, quelque chose comme ça. Mais on peut aussi imaginer un espace à 5 dimensions, à 10 dimensions, à 1000 dimensions pourquoi pas, peut-être même à un nombre infini de dimensions.

Les mathématiciens commencent à investiguer, chercher, des propriétés communes de tous ces espaces, par exemple. Ils imaginent des figures qui peuvent exister dans des espaces d'un très grand nombre de dimensions, par exemple, des sphères de dimension un million ou quelque chose comme ça. Et quelle est la différence entre une telle sphère et la sphère habituelle en 3 dimensions ?

Après quoi, ils peuvent imaginer, disons, un système d'axiomes, qui décrit bien l'espace physique mais qui a aussi un contenu beaucoup plus vaste, donc qu'ils peuvent en principe appliquer à des situations tout à fait différentes.

Mais le physicien dit en même temps "non, ce sont des abstractions mathématiques, je n'en veux pas, parce que moi, j'habite dans l'espace de dimension 3". Il peut dire ceci pendant quelques années, disons même une dizaine d'années, avant disons, qu'il commence à comprendre que l'espace dans lequel un système quantique existe est beaucoup plus semblable à des espaces qui ont été inventés par des mathématiciens qu'aux espaces auxquels il songeait auparavant. Ce sera un tour nouveau de rapprochements des physiciens et des mathématiciens.

Bernard Julia : Avant de passer aux théories compliquées de la mécanique quantique, peut-être qu'on pourrait rester au niveau de la mécanique classique, c'est une vieille science, qui est un peu à cheval entre la physique et les mathématiques, on se l'arrache un peu, est-ce que vous pouvez commenter la découverte de la relativité, presque indépendamment par Einstein et Poincaré ? C'étaient d'un côté un physicien, de l'autre un mathématicien, et c'est pourtant Einstein qui a presque toute la gloire...

Yuri Manin : (*Il rit.*) Je ne veux pas faire de commentaires sur la gloire, n'est-ce pas ? Gloire, c'est un langage de politicien, disons, moi, je n'aime pas ça. Mais, en tout cas, bon, évidemment, la notion d'espace-temps... Donc, du point de vue d'un mathématicien, le contenu essentiel de la découverte de la relativité était que l'espace 3-dimensionnel, le temps uni-dimensionnel, sont en effet dans un modèle mathématique de l'espace-temps *unifiés* par le mouvement, disons. En fait, la notion d'espace-temps était plus ou moins connue d'un point de vue mathématique par Galilée. Mais pour lui, l'espace et le temps étaient tout à fait séparés. Chaque corps physique pour Galilée, existait dans l'espace et évoluait dans le temps, n'est-ce pas ? Donc, ce que nous disent Poincaré, Einstein, Lorentz, c'est qu'en fait, il faut s'imaginer un corps physique comme existant dans l'espace et le temps simultanément, n'est-ce pas, (*formant en l'air une sorte de cylindre avec ces mains en parties fermées*), quelque chose de dimension 4, et ce que nous apercevons comme un corps physique dans un moment du temps, c'est en effet une section de cette chose de dimension 4 (*il coupe avec sa main le cylindre verticalement en disant cela*). Mais si nous sommes en mouvement, alors cette section change (*il coupe avec sa main le cylindre par une section en biais*) et donc, ce que nous apercevons de ce corps physique dans ce nouveau point de vue, consiste en fait en certaines parties de ce corps physique considérées à ce moment, d'autres parties de ce corps physique, considérées, disons, une seconde plus tard, du point de vue d'un nouvel observateur. Mathématiquement, ça veut dire que la symétrie d'un espace-temps diffère de la symétrie d'un espace-temps considéré par Galilée, parce que le groupe des rotations 3-dimensionnelles dont on fait le produit par le groupe des translations par le temps, est en fait agrandi en un groupe de relativité qui contient aussi des choses bien étranges, du point de vue d'un écolier, disons, bien étranges car ce sont les rotations dans l'espace-temps de dimension 4, des choses comme ça.

Du point de vue d'un mathématicien, ce dessin est une généralisation bien simple du dessin habituel de dimension 3, n'est-ce pas ? Du point de vue d'un physicien, c'est un changement radical de notre conception de l'espace et du temps. Donc c'est aussi un bon exemple de la différence entre les systèmes de valeur d'un mathématicien et d'un physicien. Vraiment, ce qui n'est pas grand chose pour un mathématicien, c'est une très grande chose pour un physicien.

Bernard Julia : Quels ont été vos premiers pas en physique théorique ? Qu'est-ce qui vous a poussé à vous intéresser davantage à ce domaine. Est-ce que vous aviez une vocation cachée ?

Yuri Manin : (*Il rit.*) Peut-être, je ne sais pas. Mais j'ai toujours été intéressé par la physique, mais, évidemment, quand on est déjà professionnel dans un domaine, c'est toujours psychologiquement difficile de changer de métier, n'est-ce pas ? Donc peut-être que sans connaissance, j'ai attendu des possibilités de faire quelque chose en physique en utilisant ce que je connais en mathématiques, n'est-ce pas ? Je crois, je ne me souviens pas, si c'était le soliton ou si c'étaient les instantons, les solitons c'étaient les premières choses n'est-ce pas ?

Bernard Julia : C'était avant les instantons...

Yuri Manin : Avant les instantons. C'était une découverte faite par un ou deux groupes d'américains, qu'il existe des ondes non linéaires, qui sont très stables. C'est une chose bien étrange, l'histoire a commencé il y a une centaine d'années.

Jean-Michel Kantor : Oui, il y a une belle histoire d'un cavalier...

Yuri Manin : Une très belle histoire d'un cavalier,...

Jean-Michel Kantor :... le long d'un canal, il s'aperçoit qu'une espèce de houle se propage, et rencontre une autre houle, dans le canal, en Angleterre, et au lieu de se détruire, elles se traversent mutuellement.

YURI MANIN : Quelque chose comme ça, oui, en tout cas, il y a une notion d'onde non linéaire, vous pouvez imaginer l'onde, c'est comme quelque chose qui se propage dans un canal, quelque chose comme ça. Qu'est-ce que ça veut dire non linéaire, c'est beaucoup plus difficile de l'expliquer, en tout cas, ces ondes non linéaires ont une stabilité tout à fait remarquable, bien que, expérimentalement, on a vu des choses comme ça depuis beaucoup de temps, mathématiquement, ça n'a été l'objet d'une étude profonde que très récemment, il y a 20 ans ou quelque chose comme ça. J'ai une amie, à Moscou, Valodia Sakharev, qui est une physicienne très connue, et qui est en même temps poète, pas connue comme poète, mais une très bonne poète, son premier livre de poèmes va paraître bientôt, cette année, peut-être déjà, en tout cas, nous sommes amis depuis 30 ans, elle m'a montré l'article de Peter Lax sur les solitons, et elle m'a dit que c'était une chose très importante et qu'il faut *réfléchir*. Bon, j'ai réfléchi un tout petit peu, en fait (*riant*), je n'ai pas seulement réfléchi, mais j'ai donné un cours, à l'Université de Moscou, sur le soliton, j'ai écrit un petit livre, ou disons un grand article sur le soliton, j'ai commencé à travailler avec plaisir parce que j'avais le sentiment que maintenant, je pouvais vraiment faire quelque chose en physique théorique, en utilisant dans le même temps mes connaissances comme mathématicien. C'était, je ne sais pas, c'était une révélation, une petite révélation pour moi, grand plaisir ; après ça, ça a été l'histoire avec les instantons, qui ont les mêmes... qui ressemblent un peu aux solitons. En fait, c'est quelque chose de beaucoup plus abstrait, si on peut observer les solitons dans un canal rempli d'eau, n'est-ce pas, les instantons sont des choses dont on ne sait pas s'ils existent physiquement, même maintenant parce que, par définition, ils existent dans le temps imaginaire, n'est-ce pas *(riant un peu)*, en fait dans la théorie quantique des champs. On peut s'imaginer qu'ils décrivent des interactions fortes, ça veut dire les forces par lesquelles le noyau d'atomes garde sa cohésion. Mais en tout cas, mathématiquement, les instantons, des notions qui ressemblent bien à la notion de soliton, je pouvais... j'avais le bonheur d'être un membre de l'équipe internationale qui a fait un travail sur les instantons, et après ces deux exemples, évidemment, je me suis senti alors, dans une toute petite mesure, un peu physicien théorique, j'ai alors senti que j'avais un peu de confiance en moi, n'est-ce pas, dans ce nouveau rôle.

BERNARD JULIA : Il voulait vous poser des questions sur la mécanique quantique. C'est un domaine où il y a eu effectivement une collaboration très intense entre mathématiciens et physiciens au moment de la création du sujet. Et petit à petit les mathématiciens s'en sont désintéressés, ils en ont abstrait des outils, l'analyse fonctionnelle s'est développée, et maintenant, peu de mathématiciens acceptent de revenir, parce que la mécanique quantique, une théorie à un nombre infini de degrés de liberté, c'est ce qu'on est obligé de faire quand on étudie les outils de physique moderne, est très difficile. Elle fait intervenir des calculs qui pour les mathématiciens n'ont pas de sens et peut-être les physiciens sont plus courageux, ou bien ils sont forcés de faire des sauts dans l'inconnu, mais c'est une approche qui rebute un certain nombre de mathématiciens. Et comment est-ce que vous arrivez, quand même, à faire le saut, et à vous intéresser à ces problèmes difficiles de renormalisation ?

YURI MANIN : C'est précisément l'histoire de la formation de mon système de valeurs, parce que, disons, au bout de la deuxième ou de la troisième année d'études de physique, j'ai compris que la chose qui était la plus importante dans la physique moderne, c'est la théorie quantique des champs, n'est-ce pas, tous les autres domaines sont pratiquement dans un état bien stable, il ne s'y passe rien d'essentiellement nouveau du point de vue du mathématicien, on comprend les structures de base, on comprend les problèmes, on connaît plus ou moins le degré de difficulté de ces problèmes, donc si l'on est enclin à faire de la physique dans ces domaines, bon, il faut choisir un problème, et réfléchir, c'est tout. Mais dans la théorie quantique des champs, qui veut décrire le niveau le plus profond du monde réel, la situation est tout à fait différente : on utilise les mathématiques, en fait, on utilise les mathématiques les plus profondes qui existent, et ce qui est bien pire, ou beaucoup plus intéressant, on les utilise d'une manière qui est presque impossible à comprendre pour les mathématiciens, parce qu'on n'a pas de système fini de définitions après lequel on fait un travail logique, et systématique, des choses comme ça. Il faut utiliser l'intuition, pratiquement à chaque pas, en travaillant en même temps comme un mathématicien. Pour un mathématicien, c'est très étrange, parce que le mathématicien, par entraînement[1], préfère toujours voir les choses qui sont bien définies au commencement. Il peut même, bon, disons, prendre un système d'axiomes pour lesquels ils ne connaissent pas le continu, ou quelque chose comme ça, mais il veut toujours être logique, en commençant à partir d'un certain point. C'est précisément ce qu'on ne peut pas faire quand on travaille dans les théories quantiques des champs. Parce que, par exemple, une des notions mathématiques les plus importantes de la théorie quantique des champs, c'est une sorte de mesure dans l'espace de dimension infinie.

Jean-Michel Kantor : L'intégrale de Feynman.

Yuri Manin : L'intégrale de Feynman, précisément : il faut s'imaginer quelque chose par exemple comme un cube, ou une sphère, dans un espace de dimension infinie. Si vous prenez une figure, dans l'espace de dimension 3 par exemple, prenez une figure fixe, une boule, n'est-ce pas, si vous avez une boule de rayon $R$, son volume est $R^3$ ; si vous prenez une boule de rayon multiplié par 2, son volume sera 8 fois le volume de la boule initiale ; si vous prenez une boule de rayon 10 fois plus grand, le volume sera 1000 fois celui de la boule initiale. Mais dans l'espace de dimension infinie, tous ces coefficients deviennent infinis, ce qui se passe, c'est que si vous avez l'idée qu'une boule donnée, disons un domaine physique donné dans l'espace de dimension infini est un volume, disons, unité, alors la boule qui est d'un volume un peu moindre que celui de la boule initiale aura le volume 0, et la boule qui est un peu plus grande aura un volume infini. C'est la raison qui empêche de mesurer le volume dans l'espace de dimension infinie. Dans le même temps, la notion de volume généralisé, disons, dans l'espace de dimension infinie, c'est la notion-clé pour la théorie quantique des champs. Ce que nous faisons, les physiciens, ce sont des choses bien étranges pour les mathématiciens : nous prenons deux infinités, deux volumes infinis, le physicien divise un volume par l'autre volume, et il obtient quelque chose qui est fini ; il dit, ce que nous voulons, c'est le nombre que nous voulons, c'est un nombre qu'on peut mesurer, et des choses comme ça.

Et dans un seul calcul de quelque chose de mesurable, ils font parfois des choses comme ça, je ne sais pas, deux fois, cinq fois, une infinité de fois, pour obtenir des choses qui sont tout à fait indéterminées du point de vue du mathématicien, pour obtenir ces choses-là, un truc calculable, et puis mesurable.

Jean-Michel Kantor : Calculable et vérifiable, que l'expérience vérifie...

Yuri Manin : Oui, oui, oui, c'est très étrange, ce qu'on peut imaginer. Il y a une image intuitive pour toutes ces choses-là : l'image intuitive est que tout ce qu'on voit, tout le monde dans lequel nous habitons, toutes les choses finies qui sont commodes, confortables pour nous, ce sont en fait,

[1] *Yuri Manin a dit "traînage", ses interlocuteurs corrigent ce terme par le mot "expérience".*

les différences de deux infinités. Il faut s'imaginer que nous habitons sur une surface au-dessus d'un abîme, de profondeur infinie, en fait. Nous sommes, et tout le monde autour de nous, consiste en de très très petites ondes sur cet abîme, n'est-ce pas, et le monde, c'est cet abîme. Et quand nous mesurons quelque chose, nous mesurons toujours une différence entre deux infinis. Pour moi, cette image intuitive, elle est contenue bien sûr da,s la théorie des champs quantique n'est-ce pas.

Mais pour beaucoup de mathématiciens, c'est tout à fait inacceptable, pour des raisons esthétiques, pour des raisons intuitives, pour des raisons de formation, n'est-ce pas, des raisons personnelles ; pour moi, c'est un charme de la théorie quantique des champs.

Bernard Julia : Alors peut-être que justement la théorie des cordes, dont nous avions commencé à parler, qui veut être la nouvelle théorie d'unification de toutes les interactions, qui décrit les particules élémentaires comme des cordes étendues dans l'espace, permet la transition, entre l'approche des physiciens, qui sont obligés de faire leur quantification, ils ont aussi tous ces problèmes de divergence, mais à un degré moindre que pour les théories plus compliquées, comme la relativité générale seule. La relativité générale est une théorie plus petite, mais elle a des divergences, des problèmes d'infinités plus graves. Alors justement, peut-être que la théorie des cordes permet de restreindre les difficultés de la théorie physique de quantification et d'arriver à un domaine où les mathématiciens sont plus à l'aise, et arrivent à traiter correctement ces divergences.

Yuri Manin : C'est ça, c'est ça. Ce que Bernard dit, il a mentionné la théorie des cordes, qui est maintenant au centre de recherches d'une équipe internationale de mathématiciens et de physiciens, le but de la théorie des cordes est de décrire la réalité sur le niveau d'énergie de l'ordre de la masse de Planck, ce niveau d'énergie qui était essentiel dans l'histoire... En tout cas, ce n'est pas facile d'expliquer ce que c'est que la masse de Planck, mais en tout cas, c'est une énergie très élevée, la masse de Planck, c'est une concentration d'énergie beaucoup plus élevée que la concentration d'énergie qu'on peut observer disons dans une bombe atomique, ou quelque chose comme ça. C'est beaucoup beaucoup plus concentré. Donc on ne peut pas observer ceci dans le monde, comme nous le savons, mais on croit que ce niveau d'énergie est essentiel pour comprendre l'histoire du monde très très tôt.

Bernard Julia : Juste après le big-bang...

Yuri Manin : (*rectifiant*) Juste *avant* le big-bang, je voudrais dire juste avant le big-bang, n'est-ce pas *(riant)*

Bernard Julia : (*tout doucement*) On ne sait pas comment ça s'est passé...

Yuri Manin : Big-bang, c'était quelque chose, on peut dire big-bang quand les degrés de liberté de l'espace et du temps se sont déjà formés, et je crois que c'est avant le big-bang.

Bernard Julia : (*doucement*) Vous avez raison, oui.

Yuri Manin : Bon, mathématiquement, c'est une théorie bien profonde, bien plus fondée que la théorie quantique des champs classique. Ce que Bernard a dit, c'est que les divergences, ce sont ces infinités qu'il faut soustraire, le nom technique est "les divergences", mais Bernard a dit que les divergences ne sont pas aussi mauvaises dans la théorie des cordes que dans la théorie des champs quantique classique, disons. Mais moi, je ne regarde pas la théorie des cordes comme un dernier mot, en tout cas, je ne crois pas que le dernier mot en physique existe ou peut exister, en fait. Je crois qu'il y aura toujours un niveau plus profond que le niveau que nous comprenons déjà, mais la théorie des cordes hypothétique, c'est une chose qui est mathématiquement bien fondée, qui probablement va avoir des applications physiques, pour la compréhension du monde physique, n'est-ce pas ? Mais maintenant, bien sûr, tout l'intérêt de ces théories est que la mathématique nouvelle rencontre ici la physique nouvelle.

**Collège de France, 18 mai 1989.**

Yuri Manin : Ce n'est pas nécessaire de parler et de penser les mathématiques comme des choses qui consistent en des problèmes et des solutions. On peut considérer les mathématiques comme une science de la réalité platonique, n'est-ce pas ? On essaie de voir ce qu'est cette réalité platonique, on en voit quelques parties, on voit quelques plans, quelques dessins, mais psychologiquement, il est toujours difficile de voir ces choses-là, si l'on ne part pas au départ d'une chose très particulière, d'un problème peut-être simple, d'un problème qui est émotionnellement bon, ou les choses comme ça, tu vois.

Donc pour moi, par exemple, c'est toujours l'idée de ce dessin, qui est intéressante, plutôt que des exemples qui nous aident à imaginer les traits de ce dessin. Donc l'hypothèse de Fermat, c'est un beau problème, un bon problème, parce que l'histoire des mathématiques nous a montré qu'en réfléchissant sur le problème de Fermat, on voit beaucoup de choses qui n'étaient pas évidentes. Le problème de Fermat lui-même, est seulement une sorte de... comment ça se dit en français (*on l'aide à trouver le terme.*) prétexte, de curiosité, une chose comme ça. Et a priori, on ne sait jamais avec un problème donné de la théorie des nombres s'il peut nous aider à comprendre des choses vraiment profondes ou non.

Jean-Pierre Serre : En fait, Manin soulève une question beaucoup plus large, c'est l'aspect de ce qu'en mathématiques, on appelle des théories, ce que nous apprenons au lycée, ce que nous enseignons en faculté, et puis l'aspect problème. Et suivant les mathématiciens, c'est l'un ou l'autre qui est le plus important.

Yuri Manin : C'est ça, c'est ça.

Jean-Pierre Serre : Le cas extrême étant Grothendieck, par exemple, pour lequel il n'y avait pratiquement pas de problème concret. Il voulait développer des théories suffisamment larges pour que finalement, tout tombe !

Yuri Manin : Et tout de même, en 1967, il m'a parlé avec beaucoup d'élan du problème de Fermat. Donc on est plus disposé à considérer les mathématiques comme ensemble de problèmes, ou, comme ensemble de théories.

Jean-Pierre Serre : Mais je crois qu'il faut quand même insister sur le côté problèmes ici parce que l'enseignement, que ce soit élémentaire ou de faculté, insiste beaucoup trop sur le côté théorie. On n'enseigne pratiquement *que* de la théorie.

JEAN-MICHEL KANTOR : On n'enseigne jamais les problèmes. Vous suggériez dans un autre interview d'enseigner des problèmes non résolus, des problèmes qui n'ont pas encore de solution, mais ça, ça n'est jamais fait.

JEAN-PIERRE SERRE : Pas de les enseigner, mais de les mentionner.

YURI MANIN : On pourrait peut-être récompenser ces deux extrêmes par exemple en soulignant des connexions. Par exemple, sur les nombres premiers, je pourrais faire un cours plus ou moins élémentaire sur les nombres premiers, je pourrais toujours exprimer qu'à première vue, ce sont des choses qui sont très très symétriques, presque chaotiques, on voit les tables de nombres premiers, on ne voit pas de loi du tout. Mais quand même, dans le théorème de Kronecker et Weber, les nombres premiers sont les générateurs d'un groupe de symétrie, ce qui est absolument fantastique. Donc, si l'on essaie vraiment d'expliquer ces choses-là, par exemple en partant de la théorie de Gauss de construction à la règle et au compas, où on voit les symétries engendrées par les nombres premiers, et pas les symétries qu'on voit par les yeux, c'est fantastique, vraiment. C'est une chose extrêmement intéressante. Et ça vous aide à comprendre les différences, l'incompatibilité entre un problème (le problème de Gauss, disons) et une théorie (la théorie des symétrie).

JEAN-PIERRE SERRE : Peut-être qu'il faut expliquer qu'il s'agit là du problème de la construction du polygone régulier à 17 côtés, à la règle et au compas, et où effectivement, les symétries sont des symétries de nature arithmétique, qui ne sont pas celles que l'on voit quand on dessine le polygone, non, non, ce ne sont pas celles-ci, ce sont d'autres types de symétries,...

YURI MANIN : J'ai toujours été si fasciné par cette découverte de Gauss.

JEAN-PIERRE SERRE : D'ailleurs Gauss lui-même était très très content quand il a découvert...

YURI MANIN : *(riant)* à 17 ans...

JEAN-PIERRE SERRE : Oui à 17 ans, et c'est ce qui l'a convaincu de faire des mathématiques.

YURI MANIN : Ce qui était une surprise même pour moi, c'est quand j'étudiais un tout petit peu la théorie des champs quantiques, n'est-ce pas, après la théorie des cordes, j'ai compris que, disons en lisant les travaux de Polyakov, de Belavine, de Witten, j'ai compris qu'ils ont une intuition, disons, sur l'espace des modules de courbes ... *(inaudible)*, quelque chose comme ça, que je n'ai pas. Ils me posent des questions que je ne me posais pas parce que je n'ai pas compris que ça, c'est important, que ça existe, les... sur les formes de Mumford. Il y a beaucoup de questions tout à fait concrètes sur les objets, qui étaient méconnues pendant des années, et que je n'ai pas posées. Je n'ai même pas pensé à ces questions-là. J'ai vu qu'ils ont une intuition sur ces choses-là, sur les variétés MG que tu connais si bien...

JEAN-PIERRE SERRE : Non.

Yuri Manin : En tout cas ils ont des questions, ils ont une intuition, que moi je n'avais pas... et c'est très très intéressant...

Jean-Pierre Serre : Oui, et ça, j'ai le sentiment que c'est nouveau, ça, tu vois, qu'il y a une vingtaine ou une trentaine d'années, ou quarante, enfin, depuis 1920 ou 1930, les physiciens ne posaient plus de problèmes intéressants aux mathématiciens, ou peut-être en hydrodynamique, ou dans les questions de ce genre, en mécanique des fluides.

Yuri Manin : Mais ça, ça a changé, c'est précisément les questions en géométrie algébrique, et très profondes en fait, très profondes.

Jean-Pierre Serre : Non, très profondes, je n'irai pas jusque là parce que...

Yuri Manin : Oui, elles sont très profondes.

Jean-Pierre Serre : Tu ne peux pas le dire, pour l'instant, ce ne sont pas des questions qui ont attendu le temps suffisant pour que tu saches qu'elles sont profondes.

Yuri Manin : Non, parce que par exemple, la compréhension d'un espace de modules MG ou de l'union de ces choses-là, comme une chose qui est analogue à un espace homogène, sur lequel tu peux construire la théorie du type de Weil de représentations d'algèbres de Virasoro, c'était suggéré par les physiciens *(Jean-Pierre Serre fait le signe qu'il ne connaît pas.)* C'était, tu vois, le dessin que nous voyons maintenant en mathématique est profond. Mais c'était suggéré par les physiciens, en fait, par la théorie des cordes.

Jean-Pierre Serre : Non, là, je ne connais vraiment pas.

Yuri Manin : C'est très étrange, c'était très essentiel pour moi psychologiquement parce que je voyais que la physique donne une intuition tout à fait nouvelle sur la partie des mathématiques dont je croyais que je la connaissais, bon, plus ou moins bien. C'était tout à fait fantastique.

Jean-Pierre Serre : Oui, ça, c'est une expérience qui ne m'est pas arrivée : en théorie des nombres, proprement dite, non, on ne peut pas dire que...

Yuri Manin : Proprement dite, non, mais la géométrie algébrique...

Jean-Pierre Serre : Même la théorie des formes modulaires, non plus.

Yuri Manin : Psychologiquement, pour moi, une chose primaire, ça n'est pas une structure, une chose dont je dis que c'est un objet mathématique ; par exemple, ce n'est pas une chose conventionnelle, n'est-ce pas, je dis que par exemple, pour moi, un objet mathématique est la somme des carrés. La somme des carrés, je peux partir de ceci, et je peux expliquer un tas de choses autour des sommes de carrés en partant du théorème de Pythagore, du groupe orthogonal, des $\theta$-fonctions, de mécanique quantique, tout un tas de choses. Mais d'autre part, à n'importe quelle époque, il y a un langage commun pour une société de mathématique ; ce langage, quand même, peut changer. Et par exemple, le langage du milieu de ce siècle a été créé par Bourbaki. Ce qui est très essentiel, c'est le langage commun, c'est précis, c'est très vif, il se développe aisément. Évidemment, il est fondamental, parce qu'il arrive vraiment à exprimer le contenu essentiel de choses sur lesquelles les mathématiciens réfléchissent. Je peux imaginer tout à fait théoriquement un autre langage commun. Mais historiquement, c'est Bourbaki.

Jean-Pierre Serre : Citons une chose assez bête, par exemple, les notations, dans les années 1930 ou 1920, le corps des nombres rationnels s'appelait $R$ par exemple en Allemagne, il s'appelait je ne sais pas comment en Russie, en France, il n'avait pas de nom.

Yuri Manin : Peut-être qu'il s'appelait $R$ en Russie aussi parce que c'était bien influencé par l'Allemagne.

Jean-Pierre Serre : Et Bourbaki a unifié ça, maintenant, dans le monde entier, le corps des rationnels s'appelle $Q$ majuscule, et puis, voilà, et $R$, c'est les nombres réels.

Yuri Manin : C'est pas grand chose.

Jean-Pierre Serre : C'est important quand même.

Yuri Manin : C'est important quand même mais ce qui me semble plus important, c'est que Bourbaki nous a dit qu'il faut commencer, pour chaque définition, pour chaque introduction d'une nouvelle notion, par l'interpréter comme une chose consistant en une famille d'ensembles, avec des relations, des choses comme ça ; indépendamment de ce que vous faites, vous commencez par ceci. Ce qui est très essentiel, parce que c'est économique, vous ne devez pas faire des choses qui ne sont pas essentielles, vous pouvez imaginer un dessin géométrique, tout de même, vous avez un langage algébrique, qui vous donne la possibilité d'exprimer toutes les choses clairement, universellement compréhensibles. C'est un vrai principe. Après ça, vous devez choisir des lettres, des mots, des choses comme ça...

Jean-Michel Kantor : Mais qu'est-ce que vous pensez de cette croissance exponentielle des publications, des travaux...

Jean-Pierre Serre : *(catégorique[2])* Elle n'est pas exponentielle.

Jean-Michel Kantor : Elle n'est pas exponentielle ?

Jean-Pierre Serre : Non, là, vous tombez dans le défaut qui est en général celui des journalistes ou des hommes politiques, de croire que toutes les fonctions sont ou bien linéaires, ou bien exponentielles, auquel cas, on arrive toujours à prédire des catastrophes (*Yuri Manin rit.*) effectivement de telles fonctions... (*Jean-Pierre Serre fait le geste avec son bras d'une fonction croissante et il rit, lui aussi.*).

[2] *Note de la transcriptrice : sans jeu de mot, comprenne qui sait.*

Jean-Michel Kantor : Non, mais je l'ai lu, c'est Shafarevich qui prétend qu'il y a un problème...

Jean-Pierre Serre : Ce n'est pas vrai, on avait cette impression là dans les années 1950-1960 (*s'adressant plutôt à Yuri Manin*), que le nombre de mathématiciens augmentait, puis visiblement, la courbe a baissé. Donc cette croissance existe encore, mais elle n'est pas du tout aussi rapide qu'avant.

Jean-Michel Kantor : Et pourquoi est-ce qu'elle a baissé, il fallait ?...

Jean-Pierre Serre : Il fallait bien qu'elle baisse, tout le monde ne peut pas faire des mathématiques, non, ça, c'est une question d'encombrement écoutez, *packing, sphere packing*...

Non, il y a de plus en plus de mathématiciens, et Weil avait fait une remarque que j'avais beaucoup appréciée, qui était celle-ci : à une époque, il trouvait qu'on risquait d'être envahis par les *mauvais* mathématiciens. Et récemment, il a dit : "ce qui est bien plus grave, c'est qu'il y a de plus en plus de très bons mathématiciens.".

Jean-Michel Kantor : Donc on utilise les ordinateurs d'une manière... on fait des expériences. L'ordinateur remplace l'addition, la multiplication...

Yuri Manin : C'est très utile de faire des expériences mathématiques.

Jean-Michel Kantor : Et ça, je crois que vous-même, vous ne travaillez pas directement sur l'ordinateur, mais...

Yuri Manin : *(s'adressant à Jean-Pierre Serre)* à part ce petit truc, j'ai vu que tu l'as apporté à Moscou, je l'ai vu.

Jean-Pierre Serre : Ah, j'ai une petite machine comme ça (*dessinant avec ses mains un rectangle format paysage fin*), oui, elle m'est très utile.

Yuri Manin : C'était agréable pour toi, je l'ai vu.

Jean-Michel Kantor : Et est-ce que ça a changé quelque chose dans votre manière de percevoir les...

Jean-Pierre Serre : Oui, certainement. Il y a des types de calculs que je n'aurais pas essayé de faire, trop ennuyeux, des calculs simples. Et alors, il y a aussi des choses réellement compliquées, mais alors là, *(désignant quelqu'un dans la salle)*, ce sont des choses pour lesquelles je demande à Maistre de faire le calcul sur de grosses machines. Et quelquefois, d'ailleurs, Maistre m'a dit : "Non, trop compliqué pour la machine !" et j'ai dû le faire à la main. Et j'y suis arrivé. *(s'adressant un peu à Maistre en quelque sorte)* J'avoue, j'ai jamais compris comment vous faites ça.

Il y a par exemple des cas où j'avais des conjectures dont j'étais raisonnablement certain dans certains cas mais j'ai voulu les pousser un petit peu au-delà de leur cadre, par exemple des extensions totalement réelles, alors que je n'avais pas de raisons sérieuses de penser que ça marchait, et puis Maistre a fait les calculs sur machine, et ça a marché à chaque fois, il n'y a aucun doute. Maintenant la conjecture doit être complétée, elle est meilleure que ce que je pensais.

Jean-Michel Kantor : Donc la conjecture est confirmée par la machine, reste à la démontrer, bien sûr.

Jean-Pierre Serre : Oh, ça, je ne m'en occupe pas, de la démontrer. Il faut visiblement une idée nouvelle pour attaquer ce genre de choses donc tant qu'on ne l'a pas, cette idée, ça ne m'intéresse pas. J'essaye de cerner, de bien préciser la conjecture en question, le mieux possible.

Jean-Michel Kantor : Donc en fait, le traitement avec la machine, ça vous a donné un nouveau type d'intuitions des problèmes ?

Jean-Pierre Serre : Non, l'intuition pas du tout, non mais des garanties. C'étaient par exemple des conjectures que j'avais faites il y a une quinzaine d'années à peu près, et quand je les avais faites, j'en avais parlé à Deligne, qui est un des meilleurs spécialistes, qui m'a dit : "Oui, mais enfin, ça entraîne ceci, et il n'y a vraiment pas de raison pour que ceci soit vrai.". Je lui ai dit : "Bon.". Dans les 15 ans qui se sont passés, j'avais fait quelques exemples qui montraient que ça se passait toujours. Mais quand ensuite, sur machine, on a vu que vraiment ça se passait toujours, sur de grandes quantités d'exemples, alors, j'ai eu davantage confiance que l'objection de Deligne ne tenait pas.

Yuri Manin : Non, la conjecture de Birch-Swinnerton-Dyer qui a motivé beaucoup de travail en théorie des nombres pendant une vingtaine d'années, n'est-ce pas, donc ça, ça s'était fait en partant des machines, peut-être, ce que je peux dire pour moi, c'est que les conjectures de mon dernier article étaient motivées par une conclusion fort simple en fait, mais qui m'a donné l'intuition de ce qui se passe sur les nombres premiers.

Jean-Michel Kantor : Vous travaillez aussi sur machine...

Yuri Manin : Un tout petit peu. Mais pour moi, c'était vraiment le commencement de la compréhension de ce qui se passe.

Jean-Pierre Serre : Tu parles du travail sur les points rationnels de hauteur quelque chose. *(Yuri Manin acquiesce.)* Oui, alors ça, ce sont des résultats asymptotiques, c'est moins probant que les résultats dont je parle parce que ce dont je parle, ce sont des questions oui ou non.

Yuri Manin : C'est ça, c'est ça, évidemment.

Jean-Pierre Serre : Quand on se trompe et qu'on trouve que l'entier n'est pas 0 mais qu'il est 1, c'est une catastrophe, alors on se téléphone, et on arrive toujours à comprendre pourquoi l'un de nous a fait une erreur, soit théorique de mon côté, soit expérimentale de la part de la machine, et on se réconcilie.

Jean-Michel Kantor : ça, c'est vraiment une nouvelle forme d'expérimentation.

Jean-Pierre Serre : ça, c'est très fréquent à l'heure actuelle en théorie des nombres, ça a complètement changé le... Il faut bien dire que dans les travaux disons, même bons, d'il y a 20 ou 30 ans, beaucoup de formules n'étaient pas correctes. Il y avait des petits détails qui ne marchaient pas très bien et... les limites de sommation flottaient un petit peu... Tandis que maintenant on n'a plus d'excuses du tout, parce que quand un spécialiste écrit une formule comme ça, immédiatement, il doit pratiquement la mettre sous[3] machine et faire des tables et voir ce que ça donne, et il voit instantanément que c'est faux.

Yuri Manin : Tu es un peu idéaliste.

Jean-Pierre Serre : Oui, disons qu'il devrait faire ça.

Yuri Manin : Il devrait peut-être, oui.

Jean-Pierre Serre : Mais je connais un très bon mathématicien, que je ne nommerais pas, dont les formules sont toujours un peu fausses, il a des idées absolument extraordinaires, et un jour, on lui a demandé : "Mais pourquoi vous ne faites pas des essais sur machine, ou sur des simulateurs numériques" et il a dit "non, ça ne marche jamais !" *(Yuri Manin rit.)*.

Jean-Michel Kantor : Est-ce qu'on peut conclure en essayant de faire un peu de prospective, sur les années qui viennent ?

Yuri Manin : Non, je ne sais pas ce que je pourrais prédire, c'est que les choses iront comme elles vont maintenant.

Jean-Pierre Serre : Oui, ça, c'est la façon dont les Russes faisaient leurs plans quinquennaux, je crois. Tu prédis ce que tu peux faire à l'instant donné, oui. Non mais par exemple, si vous prenez la question de la conjecture de Mordell, justement. Eh bien, il y a 5 ans ou 6 ans, vous demandiez aux spécialistes, et ils vous déclaraient tous que c'était inaccessible.

Yuri Manin : Non, moi, j'ai dit à Piatetski[4] qu'il nous manque une ou deux idées et que ça sera fait en dix années. Et Piatetski m'a dit ça aux États-Unis.

Jean-Pierre Serre : Il a raison, je lui avais écrit à l'époque, et il me l'avait dit ça. Tandis que moi, j'étais pessimiste et je pensais qu'elle était fausse, j'ai essayé de faire des contre-exemples. Et puis un mathématicien est venu, Faltings, qui a réuni les différents fils qui traînaient à droite et à gauche, qui les a alignés, et ça a donné une démonstration, un éclair est passé, là, vraiment, Faltings, ça a été ça, un éclair, et qui a liquidé la chose. Et ça, on ne peut pas le prévoir, tout de même : si on essaye de prévoir ça, on se trompera à coup sûr. Alors *(s'adressant à Yuri Manin)* essaye de prévoir. Toi tu prévoierais que Fermat, je crois, sera résolue d'ici peu, hein... si tu essayais de...

[3] sic !

[4] Ilya Piatetski-Shapiro, mathématicien russe, 1929-2009.

Yuri Manin : Maintenant, oui.

Jean-Pierre Serre : Moi, je suis moins optimiste.

Yuri Manin : Quand j'ai donné...

Jean-Pierre Serre : Ah, alors, peut-être, si tu as des raisons, alors...

Yuri Manin : Quand j'ai donné des prédictions sur Mordell, j'ai dit dans le même temps que Fermat sera beaucoup plus difficile, que Mordell est déjà en voie, mais pas Fermat. Maintenant, je dis qu'on voit Fermat.

Jean-Pierre Serre : Ah, c'est exact, maintenant, on voit Fermat.

Yuri Manin : Ce que peut-être je pourrais dire sur le futur, c'est qu'il faut, et peut-être qu'on comprendra, les intégrales de Feynman, en mathématiques. Ce n'est pas le même problème, on ne peut pas dire qu'est-ce que c'est, mais évidemment, c'est maintenant un point de concentration de beaucoup de mathématiciens et de physiciens théoriques, et on voit qu'il y a quelque chose de très profond et extraordinairement important, dans cette chose-là.