Les mathématiques
et la pensée en mouvement

Alain Connes [1]

Le but de mon exposé, c'est de vous faire sentir deux choses : la première, c'est que je vais vous raconter un certain nombre d'histoires, sur des mathématiciens, et la deuxième, c'est de vous faire comprendre que les mathématiques sont une fabrique de concepts, mais de concepts absolument fondamentaux et de concepts qui ont trait, si vous voulez, à la vie, et qui ne sont pas du tout confinés a des calculs avec des nombres, ou des choses comme ça ; on a trop souvent l'impression que le mathématicien est quelqu'un qui fait des calculs ; bien sûr, ça lui arrive de faire des calculs, mais ce que je vais essayer de vous faire comprendre, justement, dans cet exposé, c'est à quel point justement, la technique mathématique débouche de temps en temps sur des concepts fondamentaux, sur des idées fondamentales, et ce sont des idées qu'on peut expliquer simplement et qui ont trait à la vie, c'est-à-dire si vous voulez, elles sont aussi importantes, je pense, pour des gens qui font des sciences humaines que pour des gens qui vont faire des sciences dures. Voilà, donc, il y aura une galerie de portraits. On va commencer par Galois.

Et si vous voulez, Galois, c'est le prototype du mathématicien qui a eu une vie absolument incroyable : il est né en 1811, et il avait 17 ans lorsqu'il a fait ses choses les plus importantes. Et ce qui s'est produit donc, il y a eu une succession d'incompréhensions, en fait. Si vous voulez, en 1829, Abel meurt. Et en gros, c'est Galois qui reprend le flambeau des idées d'Abel. Mais en fait, je me suis bien renseigné avec des spécialistes d'Abel. Abel était venu à Paris, mais il est absolument impossible qu'il ait rencontré Galois : Galois était trop jeune quand Abel est venu à Paris ; j'avais toujours imaginé qu'ils s'étaient rencontrés dans un café parisien, qu'ils avaient discuté tous les deux. Apparemment, ce n'est pas possible. Donc quand il avait 17 ans, Cauchy qui était un académicien, avait déjà fait en 1829, deux exposés sur les travaux de Galois, à l'Académie, au mois de mai et au mois de juin. Ca, c'était donc

1. Conférence du CPES (Cycle Pluridisciplinaire d'Etudes Supérieures), PSL (Paris Sciences et Lettres), le 12 novembre 2015.
Transcription de la conférence par Denise Vella-Chemla (31.1.2019).

en 1829. Et au mois de juillet 1829, le père de Galois se suicide parce qu'il avait été la victime d'une campagne de calomnie, qui avait été faite contre lui, et en plus, Galois échoue pour la deuxième fois à l'école polytechnique. Donc c'était la deuxième fois qu'il se présentait à l'école polytechnique. A l'époque, l'école polytechnique était au top des grandes écoles, donc c'est la deuxième fois qu'il échoue. C'est là qu'il y a eu la scène apparemment où il a balancé le chiffon à la tête de l'examinateur de mathématiques, parce que l'examinateur ne comprenait pas les explications de Galois sur le logarithme.

Mais heureusement, Galois est reçu à l'école normale. Et en janvier 1830, il y a une lettre de Cauchy à l'Académie qui dit qu'il va parler sur Galois. Ce serait donc pour la troisième fois, et puis finalement Cauchy renonce, et je pense, enfin on pense, et les historiens pensent, si vous voulez, qu'il s'était mis d'accord avec Galois parce qu'il y avait un Grand Prix de l'Académie qui devait être donné en 1830 et Cauchy avait convaincu Galois de réécrire son article, de réécrire ses articles et de se présenter pour ce grand prix. Alors là, ce qui s'est passé, c'était absolument dramatique parce que l'académicien qui devait rapporter sur l'article de Galois, c'était Joseph Fourier. C'est un très très grand mathématicien et Fourier apparemment, il était en haut de ses escaliers chez lui, il s'est pris les pieds dans sa robe de chambre et il a dégringolé l'escalier, il est mort. Donc, gros problème, gros problème, et si vous voulez, il y a eu un tel désordre à ce moment-là, que le manuscrit de Galois a été perdu. Alors, non seulement Galois n'a pas eu le prix, qu'il aurait peut-être mérité, le prix a été donné à Jacobi et Abel, bien sûr deux mathématiciens immenses. Jacobi était un mathématicien allemand, Abel était mort, il était mort en 1829, le prix a été donné à Abel à titre posthume.

Mais si vous voulez, Galois ne pouvait pas se plaindre de ne pas avoir eu son grand prix ; par contre, il pouvait se plaindre, à l'époque, il n'y avait pas de photocopieuse. Donc il avait écrit son manuscrit ; à l'époque, vous écriviez le manuscrit et puis c'était fini. Il l'avait donné à l'Académie mais manuscrit perdu. Donc il s'était plaint à plusieurs reprises à l'Académie, mais manuscrit perdu. Et donc en 1830, le grand prix a été donné en juin 1830 et en juillet 1830, c'est les Trois Glorieuses. C'est Les Trois Glorieuses, et Galois a été à l'école normale et là, il râlait parce que, à l'école normale, les élèves étaient confinés, ils ne pouvaient pas aller sur les barricades. Par contre, les élèves de l'école polytechnique, eux, ils pouvaient, donc alors là, Galois a commencé à vraiment se révolter. C'est très très bizarre, si vous voulez, bon, il avait à peine 18 ans. Donc il a commencé à se révolter et il s'est révolté contre le directeur de l'école normale. Et après l'été, donc, il a commencé à militer plus ou moins, et de fil en aiguille, il a réussi à se faire renvoyer de l'école Normale. Donc, il a été renvoyé de l'école Normale en janvier 1831, et il y a quelque chose d'incroyablement ironique, qui est que Galois était à la rue, si vous voulez, il n'avait plus de salaire parce qu'à l'époque, à l'époque et c'est encore le cas maintenant, les élèves de l'école Normale recevaient un petit salaire. Donc il était à la rue et alors pour gagner un peu d'argent, il avait créé un cours d'algèbre, cours d'algèbre qui réunissait un certain nombre de gens qui venaient l'écouter parce que c'était un magnifique mathématicien malgré son très jeune âge. Et l'ironie totale, c'est que son cours d'algèbre, il le donnait dans la rue qui maintenant, c'est une rue attenante à la Sorbonne, qui s'appelle la rue Victor Cousin. Pourquoi est-ce que c'est ironique ? C'est ironique parce que la personne qui a signé le renvoi de l'école Normale de Galois s'appelle Victor Cousin. Alors il y a quelques années, pour les 200 ans de la naissance de Galois, j'ai eu à donner l'exposé à l'Académie des Sciences sur Galois. Et à ce moment-là, j'ai voulu que tout le monde se mettent d'accord pour rebaptiser la rue Victor Cousin en rue Galois. Bon, ça n'a pas été possible, mais il faudrait quand même, c'est incroyable.

Donc voilà ce qui s'est passé. Alors après, donc, il faut bien dire que Galois, il est mort à 20 ans. Et les deux dernières années de sa vie, il n'a pas beaucoup fait de maths. C'est incroyable, c'est absolument incroyable. Et ce qui s'est produit, c'est qu'une fois qu'il a été renvoyé de l'école normale, il y avait quand même un autre académicien qui lui voulait du bien, il s'appelait Poisson. Et en mathématiques, il y a une formule bien connue qu'on appelle la formule de Poisson. Et si vous voulez, Poisson l'avait convaincu de réécrire son manuscrit et de le présenter à l'Académie. Donc Galois s'était exécuté. Il avait réécrit son manuscrit. Il avait travaillé, etc. Et entre temps, bien sûr, après Les Trois Glorieuses, tout le monde commençait à être extrêmement déçu par le nouveau pouvoir. Et Galois faisait partie de ces gens-là. Donc la première chose qu'il a faite, c'est pas très, pas très malin, enfin bon. Il était dans un banquet qui fêtait la libération d'opposants au pouvoir. Et alors, il était dans ce banquet, et il avait levé son verre à Louis-Philippe. Alors, tous les gens se disaient "il est complètement fou !" : il était dans un banquet contre Louis-Philippe et il levait son verre à Louis-Philippe. Et dans la main, il avait un couteau. D'abord, les gens n'avaient pas compris pourquoi il levait son verre à Louis-Philippe ; secundo, il y avait un espion qui était là et qui avait vu qu'il avait un couteau à la main. Il avait été arrêté, ça c'était au mois de mai 1831, il avait été arrêté, et il avait été jugé assez vite. Il avait été jugé par un jury populaire. Mais comme il avait été jugé par un jury populaire, les gens avaient vu qu'il était un peu bizarre, bon, enfin, je veux dire, il ne se défendait pas, en gros, il disait... Alors ils l'avaient acquitté. Je crois qu'il avait été acquitté en juin 1831. Et un mois après, il a reçu le rapport de Poisson sur son article. Alors là, catastrophe parce que Poisson disait que c'était sûrement une très très belle théorie, mais qu'il n'y avait pas assez de détails dans les démonstrations, etc. Donc il ne pouvait pas accepter l'article. Et Galois, quand il a reçu ce rapport, il a écrit à la main, dans la marge du rapport, il a écrit "Oh, chérubins !". Ca veut dire qu'il voyait que les gens ne comprenaient rien à ce qu'il faisait. A ce moment-là, il a un peu dérapé, c'est-à-dire que là, il s'est fait arrêter. Ca, c'était le 4 juillet qu'il a reçu le rapport de Poisson, il a été arrêté le 14 juillet à la tête d'une manifestation contre Louis-Philippe. Et là, il a été mis en prison pour de bon ; il a été mis dans une prison qui s'appelle Sainte-Pélagie ; et bon, il y a beaucoup d'entre vous sans doute, qui imaginent que s'ils étaient en prison, ils pourraient au moins réfléchir tranquilles avec des bouquins ; en fait, c'était pas du tout comme ça, parce que Galois, il était au milieu des condamnés et c'était absolument terrible parce que les autres condamnés l'obligeaient à boire de la liqueur très forte, etc. ; je veux dire que c'était absolument orthogonal à son... à ce qu'il faisait et en fait là, il a rencontré Nerval. Nerval l'a rencontré alors qu'il était en prison.

Et alors, c'est terrible, c'est terrible, parce que si vous voulez, Galois est resté en prison jusqu'au mois de mars de l'année d'après, 1832. Il n'avait pas 20 ans, toujours, euh, si, il avait 20 ans. Et en mars 1832, la raison pour laquelle il a été libéré, c'est qu'il y avait le choléra à Paris. Et qu'ils vidaient les prisons pour pas qu'il y ait trop de dégâts. Donc il a été mis dans une maison de santé et dans cette maison de santé, il est plus ou moins tombé amoureux d'une fille qui était là, sans se rendre compte qu'elle était déjà avec quelqu'un d'autre.

Et bon, tout ça a fini par un duel, d'accord. Et alors là, c'est pareil, si vous voulez, je suppose que chacun d'entre vous imagine que s'il était en devoir de se battre en duel, il aurait plus d'habileté que l'adversaire, donc ça irait quoi, il s'en sortirait. Malheureusement, le duel dans lequel Galois a été pris, il a essayé de s'en sortir avant. Il a essayé de dire que... Mais malheureusement, c'était un duel absolument terrible, c'était comme la roulette russe, c'était un duel dans lequel il y avait deux revolvers dont l'un seulement des deux était chargé. Et il fallait qu'ils se les mettent sur le ventre. Donc il a eu, bien sûr, une balle dans le ventre. A l'époque, et même maintenant, c'était mortel, et les autres l'ont laissé sur place.

Il a été retrouvé par un paysan sur place, qui l'a emmené à l'hôpital et il est mort le jours après. Bon. Et il a laissé une liasse de papiers, c'est ce qu'il dit, c'est ce qu'il dit dans ses trucs, donc c'était... Alors il y a des gens qui vous feront croire qu'il a trouvé tous ses résultats la veille de son duel. C'est absolument pas vrai, je veux dire, évidemment, il avait continué à réfléchir et c'était au point... il avait dû tellement se forcer à continuer à faire des maths pendant qu'il était dans des circonstances abominables, que des gens qui l'ont vu à sa sortie de prison disaient qu'il avait l'air d'avoir 50 ans alors qu'il avait 20 ans. D'accord, donc c'est vous dire un peu la passion qui l'habitait, et c'est un miracle, finalement, c'est un miracle qu'on ait eu ses travaux.

C'est un miracle absolu qu'on ait eu ses travaux. Donc ça, c'est ce qu'il écrivait et qu'il a laissé dans sa lettre-testament. C'est sa lettre-testament qu'il avait laissée à son frère, et à son ami, il avait un ami aussi.

Et ce qui s'est produit, donc, c'est que 10 ans ont passé. Et par un hasard extraordinaire, Liouville, qui était un contemporain de Galois, qui avait simplement deux ans de plus que Galois, a retrouvé les papiers de Galois. Et il a compris que c'étaient des choses absolument géniales. Et il en a parlé à l'Académie. Donc si vous voulez, 10 ans après la mort de Galois, c'est Liouville que voilà. Bon là, évidemment, il est beaucoup plus vieux mais c'était un contemporain de Galois, c'était quelqu'un qui était né en 1809, donc deux ans avant Galois. Et donc, Liouville a compris l'extraordinaire force des travaux de Galois si vous voulez.

Alors il a écrit ça, mais ça, je vous le montre écrit correctement, donc c'est comme ça.

Il en a parlé à l'Académie. Et puis, graduellement, les travaux de Galois ont été compris. Et alors ce que je vais faire, je ne veux pas vous embêter avec des mathématiques trop compliquées, je vais simplement vous donner l'essence de la théorie de Galois. Je vais vous donner l'essence en vous donnant un exemple. Ce que dit Galois dans sa lettre-testament, c'est quelque-chose d'incroyablement visionnaire, si vous voulez, ce qu'il dit, c'est :

"Tu sais mon cher Auguste, (il avait un ami qui s'appelait Auguste) *que ces sujets ne sont pas les seuls que j'ai explorés. Mes principales méditations depuis quelques temps ont étaient dirigées sur l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambiguïté."*

Donc Galois a découvert cette théorie de l'ambiguïté. Et dans cette lettre, à la fin de sa vie, il dit que non seulement, il l'a appliquée à des équations polynomiales. Mais en fait, il l'a appliquée à la théorie des fonctions transcendantes. Personne ne sait ce qu'il avait exactement en tête. Ca, personne ne peut dire que l'on sait, maintenant, ce que Galois avait en tête.

Par contre, on sait très bien ce qu'il avait en tête pour les équations polynomiales.

Et donc, pour les équations polynomiales, je vais vous expliquer ce qu'est la théorie de l'ambiguïté. Donc ce que Galois a compris, si vous voulez, c'est quelque-chose d'assez extraordinaire, c'est que lorsque vous vous donnez une équation algébrique, par exemple, je vous ai donné une équation donc, on sait la résoudre. Vous savez que maintenant, je veux dire avec l'ordinateur, vous pouvez contrôler tout ça, vous pouvez tracer le graphe d'une fonction, vous pouvez résoudre une équation polynomiale, et tout ça. Mais l'ordinateur ne vous donnera jamais les zéros qu'avec une certaine précision, il ne vous donnera jamais les racines qu'avec une certaine précision.

Alors, ce que dit la théorie de Galois, elle dit quelque chose d'extraordinaire : elle dit que quand vous prenez une équation comme celle-là, qui est irréductible, c'est-à-dire qu'on ne peut pas la factoriser en un produit de 2 facteurs avec des coefficients rationnels par exemple. Donc lorsqu'une équation est irréductible, ce que dit la théorie de Galois, c'est qu'il y a un groupe qui opère sur les racines, ici sur les 5 racines, et qui fait qu'on ne peut pas, si vous voulez, isoler une racine. C'est-à-dire qu'il y a une ambiguïté entre les racines ; ce groupe, il fait tourner les racines. Et toute relation qui est vérifiée entre les racines, toute relation rationnelle qui est vérifiée entre les racines, par exemple, avec l'ordinateur, vous pouvez voir que cette relation, elle est presque vérifiée, le fait que $E = 4C^2 + 2D^2$, vous pouvez vérifier ça. En fait, ce que dit la théorie de Galois, c'est qu'il y a un groupe qui permute ces racines, c'est-à-dire qu'elles peuvent bouger de l'une à l'autre. Et de telle sorte que si une relation comme ça a lieu, elle aura lieu pour les racines permutées. Et ce que dit la théorie de Galois, c'est que par ce groupe, vous pouvez transformer n'importe quelle racine en n'importe quelle autre. Alors ce que dit Galois après, en fait ce que je vous dis en particulier ici, c'est que c'est impossible d'avoir cette relation. Pourquoi est-ce impossible d'avoir cette relation ? Parce que si vous avez cette relation, vous voyez bien que les 5 racines, elles sont réelles. Ca, c'est pas du tout difficile à démontrer. Donc vous avez bien 5 racines qui sont réelles. Mais supposez que vous ayez une relation comme celle que j'ai écrite : $E = 4C^2 + 2D^2$. Eh bien à ce moment-là, comme E peut devenir n'importe laquelle des autres racines, C et D seront d'autres racines aussi. Et vous voyez bien que toutes les racines devraient être positives, puisque ce sont des sommes de carrés. Et donc ce n'est pas possible. Ce n'est pas possible. Donc, c'est extraordinaire !

Ca vous dit que sans calculer et sans se salir les mains, ni quoi que ce soit, on sait que cette relation n'est pas possible. C'est-à-dire qu'avec l'ordinateur, l'ordinateur va vous dire "Mais elle est vraie, elle est vraie !". Il va le dire avec des décimales et tout ça. Non ! Galois dit "c'est pas possible, cette relation n'est pas vraie !". Et elle n'est pas vraie par la pensée pure, c'est extraordinaire ! C'est quelque-chose d'extraordinaire ! Parce qu'il a compris que derrière une équation, il n'y a pas seulement la valeur numérique des racines. Non. Il y a les relations entre les racines qui peuvent exister, Et ce que fait la théorie de Galois, c'est de déceler exactement toutes les relations entre les racines. Et elles sont décelées par un groupe. Alors, ne croyez pas les gens qui vous diront que c'est Galois qui a inventé la théorie des groupes. Non, les gens comme Lagrange, etc., savaient ce que c'étaient que les groupes avant lui. Mais Galois est le premier mathématicien *moderne*. C'est-à-dire que c'est le premier mathématicien qui a eu cette fulgurance, si vous voulez, qui fait que certaines choses comme ça sont vraies sans qu'on ait à calculer ou quoi que ce soit, d'accord. On a une théorie abstraite, c'est une théorie de l'ambiguïté et résoudre une équation, c'est graduellement diminuer l'ambiguïté qu'il y a, pour que finalement, sur l'équation, on puisse affirmer telle racine, et telle racine, etc. D'accord. Donc c'est ça, la théorie de l'ambiguïté. Et ici, en l'occurrence, on peut calculer ce qu'est le groupe de Galois. Donc le groupe de Galois, vous voyez les 5 racines, elles sont indiquées ici. Le groupe de Galois, il va les permuter. Et puis, mais il les permute si vous voulez de manière transitive, c'est-à-dire que si on itère ces permutations, si par exemple, je prends la racine qui est en-haut au milieu, elle va aller sur la première ; et après, si je regarde où va la première, elle va sur la dernière ; après, si je regarde la dernière, elle va sur l'avant-dernière ; si je regarde l'avant-dernière, elle va sur la seconde. Donc vous voyez que vous avez fait tout le tour d'accord.

Donc bon, et ça, c'est toujours vrai, c'est-à-dire que quelle que soit l'équation que vous preniez, Galois vous dit que si elle était réductible, il y a un groupe qui permute les racines. Alors il y a beaucoup de mathématiciens qui croient connaître la théorie de Galois, parce qu'ils disent que Galois a réussi à démontrer qu'une équation est résoluble par radicaux si et seulement si son groupe de Galois est résoluble. Mais en fait Galois, à 17 ans, avait bien mieux que ça, il avait... un théorème...

Je vais vous effrayer mais ne vous inquiétez pas, on va passer à un autre sujet tout de suite. Donc ce que Galois démontre, c'est que si on prend une équation qu'il appelle primitive. C'est une certaine définition technique, pour qu'elle soit résoluble par radicaux, il faut et il suffit qu'on puisse indexer les racines par un corps fini. C'est Galois qui a inventé les corps finis. C'est assez amusant parce que les Français sont pudiques, parce que les Anglo-Saxons appellent ces corps finis les *Galois fields*. Si on traduit en français, ça se traduit par corps de Galois. Mais en France, on n'utilise pas cette terminologie : on parle de corps fini. Et alors le théorème de Galois, qu'il avait quand il avait 17 ans, c'est que pour qu'une équation primitive soit résoluble par radicaux, il faut et il suffit qu'on puisse indexer ses racines par un corps fini, de telle sorte que le groupe de Galois, alors là, tenez-vous bien, accrochez-vous, soit contenu dans le produit semi-direct du groupe affine du corps fini par le Frobenius, par les puissances du Frobenius. D'accord, d'accord, ok, bon.

(rires)

Et alors quand j'ai préparé mon exposé pour l'Académie, justement, je me suis aperçu qu'en fait, Galois connaissait un nombre incalculable de choses et qu'il connaissait par exemple, maintenant ce qu'on appelle la théorie de Sylow, qui est une théorie qui a été mise au point peut-être 50 ans après la mort de Galois. Donc c'est vous dire un peu à quel point il avait réussi à voir si loin. Et à la fin de mon exposé, je vous montrerai un texte de Grothendieck et c'est un texte qui est fondamental parce que ça s'applique merveilleusement au cas de Galois d'accord, et c'est un texte sur la créativité, sur la découverte et sur le fait que la vraie créativité, elle demande justement si vous voulez de retourner à cet esprit de l'enfant qui est à la fois libre, mais aussi qui n'accepte pas si vous voulez le poids des connaissances qu'on met sur lui. Donc on y reviendra à ça, d'accord.

Alors maintenant, j'en viens à un autre sujet, parce que je ne veux pas négliger la physique. Et à un autre sujet qui me tient à cœur aussi énormément et qui est celui, si vous voulez, d'un autre grand découvreur, dans le XX$^{\text{ème}}$ siècle, si vous voulez, c'est la découverte de la mécanique quantique. Maintenant, on va passer à Heisenberg et à la mécanique quantique. Donc on fait une pause si vous voulez. Ce que j'ai essayé de faire, c'est de choisir des sujets qui vous montrent, chacun, une nouvelle notion qui a été découverte, soit en faisant de la recherche mathématique, soit en faisant une recherche sur la nature, sur la physique. Mais chacune de ces notions est une notion qui a un sens, qui a un sens absolument fondamental.

Donc, l'histoire d'Heisenberg, elle est en fait reliée à un lieu, et ce lieu, c'est une île qui en allemand s'appelle Helgoland ; en français, on traduit Heligoland. C'est une île des pays nordiques. Et c'est une île qui a une particularité, je ne sais plus si cette particularité est encore vraie de nos jours ; en tout cas, elle avait une particularité dans les années 1925, qui était qu'elle n'avait pas de pollen. Il n'y avait pas d'arbres, il n'y avait pas de sources de pollen. Alors, quel est le lien avec Heisenberg ? Le lien, c'est que Heisenberg était un étudiant en physique, enfin, un étudiant, il avait déjà de la bouteille... Il était à Göttingen, je pense. Et à un moment donné, c'était au mois de mai, il a été pris d'une allergie terrible, le rhume des foins si vous voulez. Donc il avait la tête enflée, enfin tout ça quoi, et donc à l'époque, le seul remède, on ne donnait pas d'anti-histaminiques, le seul remède, c'était de l'envoyer à Heligoland. Donc il a été envoyé sur cette île. On lui a dit "il faut arrêter de faire vos cours, etc." et on vous envoie sur cette île. Et il est arrivé sur cette île. Il était logé par une vieille dame dans une maison, peut-être une des baraques qui sont là-haut, là. Et puis à l'époque, il cherchait... *(petit bruit circonspect interrogatif)*. A l'époque, il cherchait...

Il essayait de ... A l'époque, la mécanique quantique était à un stade préhistorique, c'est-à-dire qu'on avait décidé ce qu'on appelle certains principes, qui permettaient de calculer des énergies et tout ça, mais je veux dire que ce n'était absolument pas une vraie théorie. Et Heisenberg réfléchissait sur un problème. En gros, son problème, ça prendrait trop de temps de l'expliquer, si vous voulez, l'idée, en gros, à l'époque, on concevait l'atome comme un petit système solaire. Mais ça ne marchait pas. Parce que ce qui se passe dans un système comme le système solaire, c'est que, par exemple si l'électron tournait autour du noyau, il émet de l'énergie, et donc en fait, son orbite devrait se ratatiner sur le noyau. Et ça, c'est pas ce qui se passe en réalité. Donc il y avait des choses comme ça qui ne collaient pas du tout. Et donc, Heisenberg a réfléchi là-dessus. Il est parti des résultats expérimentaux, ce qu'on appelle le principe de Ritz-Rydberg. Et puis bon, il avait ce calcul qu'il voulait faire et quand il était sur cette île, il a commencé à faire ce calcul. Il y avait des choses qu'il ne comprenait pas, tout ça. Et puis un matin, à 4h du matin, tout a marché ! Il a eu cette révélation extraordinaire ! Et au lieu d'aller se coucher, il est allé grimper sur un des pics rocheux *(rires)* qui sont au bord de l'île. Il s'est installé en haut, et il a attendu le lever du soleil. Et dans ses mémoires, il décrit de manière extraordinaire si vous voulez, cette illumination qu'il a eue et il dit vraiment, et c'est vrai, qu'il a eu tout d'un coup devant les yeux un immense paysage qui s'est dévoilé à ses yeux, mais c'était un paysage intellectuel, bien sûr ; ce paysage, c'était l'essence de la découverte qu'il a faite, si vous voulez, c'est quelque-chose d'incroyable ! Il a découvert que quand on fait des calculs, voilà Heisenberg, et on y reviendra à ça. Ce qu'il a découvert, c'est que vous voyez, quand vous faites de la physique, bon par exemple, vous écrivez $e = mc^2$ ou des trucs comme ça. Vous pourriez écrire $e = c^2$ fois m, c'est du kif-kif, ce sont des nombres. Bon, eh bien, je veux dire, ça ne change rien. Ce qu'Heisenberg a trouvé, c'est quelque-chose d'incroyable. Heisenberg a trouvé que si vous essayez de manipuler la position et le moment, on parle de la vitesse, mais il faut parler du moment : le moment, c'est le produit de la vitesse par la masse, d'accord ? Donc, si vous essayez de manipuler à la fois la position et le moment, au niveau microscopique d'un tout petit truc, d'un atome ou d'un truc comme ça, eh bien, vous pourrez toujours faire tout ce que vous voulez, vous n'arriverez jamais à mettre en défaut ce qu'on appelle le principe d'incertitude d'Heisenberg, d'accord, qui est que $\Delta x \Delta p$... Δx, c'est l'incertitude sur la position, Δp, c'est l'incertitude sur le moment. Eh bien ça, c'est toujours plus grand ou égal à $\hbar/2$, qu'est-ce que c'est que $\hbar$, c'est la constante que Planck avait introduite au début du siècle, pour expliquer certains phénomènes physiques.

Alors là, il faut que je vous raconte une petite histoire, à propos du principe d'incertitude parce que bon, *(chuchotant)* je crois qu'il y a un bouquin d'ailleurs là-dessus, qui est pas mal, d'ailleurs... Mais en fait, sur le principe d'incertitude, si vous voulez vraiment ressentir en quoi ce principe a troublé les gens, il y a une histoire qu'il faut que je vous raconte. C'est que bien sûr, Einstein n'y croyait pas. Pourtant, Einstein est à l'origine de la théorie quantique, je veux dire, c'est Einstein qui a eu l'idée que le photon avait des niveaux d'énergie qui étaient quantiques. Donc Einstein n'y croyait pas. Donc Einstein avait imaginé un dispositif.

A l'époque donc, Heisenberg a trouvé son principe d'incertitude vers la fin des années 1920. A cette époque-là, il y avait ce qu'on appelait les congrès Solvay ; c'étaient des réunions de physiciens, en petit nombre, et bien sûr, ils discutaient entre eux.

Donc il y a eu un congrès Solvay, je crois que c'était en 1830, ou quelque-chose comme ça. Et donc Einstein avait imaginé la chose suivante ; il avait imaginé pour mettre en défaut le principe d'incertitude, mais pas sur la position et le moment, mais sur $\Delta t \Delta E$; c'est à dire que...*(soupir, soupir)*... le temps, c'est la variable duale de l'énergie, de même que la position est la variable duale du moment. Et le principe d'incertitude vous donne quelque chose de semblable pour $\Delta t \Delta E$. Quelque-chose comme $\hbar$ ou $\hbar/2$, ça dépend des unités. Donc Einstein ne croyait pas à ça. Et Einstein avait imaginé... Bien sûr, il faisait toujours la même chose, c'est-à-dire que quand il ne croyait pas à quelque chose, il imaginait une expérience de pensée. Une expérience de pensée, qu'est-ce que ça veut dire ? Ca veut dire que je vais vous faire un dessin très grossier : mais en fait, on peut très bien imaginer que cette expérience soit rendue de plus en plus précise. D'accord ? Donc le dessin très grossier, c'était le suivant : *(dessinant le dispositif au tableau)* là, on va mettre un petit ressort, et puis ici, on va mettre une boîte. Et puis on va mettre comme un coucou quoi. Et puis avec, il y aura l'heure ici, d'accord ?

C'était ça son système, et puis là, il y a une espèce de truc. Et puis, là, il y a des... Voilà le système.

Alors quelle était l'idée d'Einstein ? L'idée d'Einstein, c'est que Δt, eh bien, on va le contrôler puisqu'on à l'heure ici, d'accord. Donc ça, c'est le t donc. Et ΔE maintenant ? Donc, qu'est-ce que ça veut dire, qu'est-ce que j'ai dit ici *(montrant un endroit du dessin)* ? Ca veut dire qu'il y aura un moment donné où le coucou va faire “Touc !”. Il va émettre un photon. Et on saura à quelle heure il l’a émis puisqu’il y a ce truc qui marque l’heure, d’accord. Donc Δt, *(bruit pour exprimer qu’on ne sait pas quoi...)*. Alors maintenant ΔE. Eh bien le photon, ça, Einstein, il le sait, le photon, il pèse $h\nu$, où ν c’est la fréquence du photon. Donc ça, c’est e si vous voulez, c’est l’énergie. Donc quand le photon sort, ce truc-là, il devient un petit peu plus léger... *(voyant qu’il semble peut-être avoir un peu perdu la compréhension de son auditoire)* Est-ce que vous connaissez l’histoire du camion qui transportait des trous, non ? Vous ne la connaissez pas ? Il était en montagne, d’accord, puis à un moment donné, le chauffeur, il s’est senti plus lourd, il a reculé, il est tombé dans le trou, d’accord.

(rires).

Bon, je reprends, d’accord ? Donc, ici, une fois que le photon a été émis, d’accord, ce truc-là devient un petit peu plus léger, donc ça va, si vous voulez, l’aiguille, elle va monter un petit peu, et en regardant de combien elle est montée, on va connaître ΔE donc en fait, Einstein disait “bah on va connaître ΔE, on va connaître Δt, avec une précision aussi grande que l’on veut. Donc on aura pas le principe d’incertitude”. Alors il a dit ça. Et ça a fait terriblement peur à Bohr qui était en train de discuter avec eux, parce que Bohr croyait bien sûr au principe d’incertitude, ça lui a fait terriblement peur parce que... Quelle était la raison pour laquelle il avait peur ? La raison pour laquelle il avait peur, c’est que quand vous faites les calculs avec ce système, proposé par Einstein, ce qui va intervenir, c’est la constante de gravitation parce que vous voyez, l’horloge, quand elle monte un peu, elle est dans le champ gravitationnel, donc quand vous allez chercher de combien l’énergie a diminué, vous allez faire intervenir la constante de gravitation, donc évidemment, la constante de gravitation, elle rentre absolument pas dans le $\hbar$ de Planck etc. La théorie de Planck, elle est complètement disjointe de la gravitation. Donc Bohr se disait, c’est foutu !

Donc, il y a une photo extraordinaire, sur laquelle on voit Einstein sortir très fièrement de la salle de congrès Solvay et on voit Bohr qui le suit un peu comme un petit chien, et qui est, bon... Et alors ce qui s’est passé, c’est que ce n’est pas la fin d’histoire. La fin de l’histoire est absolument merveilleuse, parce que ce qui s’est passé, c’est que Bohr est rentré à son hôtel. Evidemment, il n’a pas dormi, il n’a pas dormi de la nuit parce que bon, je veux dire... Il n'a pas dormi de la nuit, et il a trouvé la réponse... Et la réponse est fantastique. La réponse est absolument fantastique, parce que, si vous voulez, bon, ça paraissait impossible, impossible ! Pourquoi ? Parce que, comme je le disais, il y aura la constante de gravitation quand vous allez faire le calcul et ça, c'est impossible que ça marche ! C'est impossible qu'on retrouve le $\hbar$. D'où il sort ? Ce qu'a trouvé Bohr pendant la nuit, il a trouvé que le même Einstein, en fait, il avait pondu la relativité générale. *(Alain Connes écrit les formules à la craie au tableau).* A l'époque ! Ca, vous savez, maintenant, cette année, au mois de novembre, il va y avoir un tas de célébrations de la découverte de la relativité générale par Einstein. Ca fait exactement 100 ans. C'est pour ça qu'il va y avoir toutes ces célébrations. Donc ça fait exactement 100 ans. Et c'était donc une dizaine d'années, ou même plus, une quinzaine d'années avant l'histoire en question. Qu'est-ce que ça à voir avec le truc ?

Ce que ça a à voir avec le truc, c'est la chose suivante : c'est que ce que dit la relativité générale, elle dit que le passage du temps, si vous écrivez la métrique, vous avez ce qu'on appelle la métrique de Minkowski, en fait, qui est dûe à Poincaré, donc de l'espace-temps si vous voulez. Lorsque ça, c'est l'espace-temps de la relativité restreinte, et si vous regardez la métrique de l'espace-temps de la relativité générale, en première approximation, ce qui se passe, c'est que la métrique ne change pas pour les coordonnées usuelles : on est dans un espace euclidien. Par contre, elle change pour le passage du temps, et la manière dont elle change, c'est que le coefficient dt^2 est multiplié par 1+ deux fois le potentiel Newtonien $V(x, y, z)$.

Vous inquiètez pas, c'est pas... bon. Qu'est-ce que ça veut dire ? Ca veut dire que le temps passe différemment selon l'altitude, ok ? Mais l'horloge, elle a changé d'altitude un petit peu *(Eclats de rires)*. Donc son temps a passé différemment. Vous faites le calcul et vous retrouvez le principe d'incertitude d'Heisenberg. C'est incroyable ! Ca veut dire que Bohr, si Einstein n'avait pas découvert la relativité générale *(Eclats de rires)* une quinzaine d'années avant, il aurait eu raison, d'accord ?... Personne n'aurait cru que le principe d'incertitude était valable. Mais, à cause de la relativité générale, que lui-même avait inventée, il a été battu, il a été mis en défaut. Donc le lendemain matin, Bohr est rentré, triomphant, je veux dire, c'est extraordinaire ! C'est vraiment extraordinaire, mais si vous voulez, tout ça, c'est pour essayer de vous faire sentir le fait qu'aucune de ces notions n'a été acceptée au début. Pas du tout ! Absolument pas. Il y a toujours une résistance absolument terrible, à des choses qui sont nouvelles comme ça... Et alors, ce qui est incroyable dans le quantique, ce qui est ahurissant dans le quantique, si vous voulez, et ça je pense que ce n'est pas vraiment passé dans les connaissances. Oui, alors, bon. J'en parlerai après de ça, j'en parlerai après. J'y reviendrai. Ce qui est incroyable dans le quantique, si vous voulez, c'est le fait que, et ça, ça vient du principe d'incertitude d'Heisenberg, c'est que, contrairement à la physique classique, quand vous faites une expérience dans le quantique, vous ne pouvez pas reproduire l'expérience. C'est quelque-chose de fondamental. Quand j'essayais de vous dire, si vous voulez, que j'allais vous expliquer des concepts ou des notions... Ce sont des notions qui font une telle cassure avec la vision classique, si vous voulez, que c'est énorme comme différence. Qu'est-ce que je veux dire par là ? Ce que je veux dire par là, c'est que si vous faites une expérience de nature quantique, par exemple vous envoyez un photon, et ce photon, il va passer par une toute petite fente qui est à peu près de la taille de sa longueur d'onde. Et après, vous allez le recevoir sur une cible. Eh bien, le fait que vous receviez le photon à un endroit x donné, cette expérience-là n'est pas reproductible. C'est-à-dire que vous pourrez refaire l'expérience avec autant de précision, donner les mêmes conditions initiales, etc., le résultat final ne sera pas le même. C'est incroyable, ça ! Et il ne sera pas le même à cause du principe d'incertitude de Heisenberg.

Alors, vous pouvez me dire “Bon bah d'accord bah bon moi, je m'en fiche, il y a un peu d'aléa, quoi ! Un aléa microscopique, je m'en fiche !”. Mais non ! Maintenant, ce qui se produit, c'est que le fait qu'il y ait cette incertitude fondamentale, si vous voulez, eh bien, ça a été utilisé pour produire des nombres aléatoires. C'est-à-dire qu'il y a des Suisses qui ont fabriqué un appareil qui marche, maintenant c'est avec une lampe LED, vous savez les petites lampes LED là, comme ça. Alors ces petites lampes envoient des photons sur une cible, voilà. On regarde à quel endroit le photon arrive, il arrive sur l'un des carreaux de la cible. Et à partir de là, on fabrique un nombre et comme c'est un phénomène quantique, c'est-à-dire que c'est un phénomène qui n'est pas reproductible, ça produit des nombres aléatoires, qui sont tellement aléatoires que, même si un attaquant voulait reproduire la même chose, ça veut dire s'il connaissait toutes les données sur le système, il n'arriverait pas à reproduire le même nombre. Alors qu'avec un ordinateur, si vous fabriquez des nombres aléatoires, si l'attaquant connaît votre système de fabrication, il arrivera à les reproduire, les nombres aléatoires, d'accord ? Donc c'est phénoménal, c'est phénoménal ! Alors, de là, si vous voulez de cette vérité extraordinaire, en fait, sort une idée, qu'on a commencé à exploiter et cette idée, c'est la suivante : vous voyez, nous, nous sommes habitués en physique a attribuer tout variabilité au passage du temps, c'est-à-dire que bon... Moi, je me souviens une fois mon prof, j'avais un prof, je ne sais plus si c'était en maths sup. Il m'a dit de passer au tableau, alors j'y passe.

Il m'interroge. Et puis, il me fait ça *(geste d'une courbe dessinée en l'air)* - Ouhouh ?! *(rires)*. Moi, je regarde comme ça... Il me dit "Monsieur Connes, quelle est la variable ?". Alors, moi, je faisais de la cinématique. Je réfléchis... Et puis au bout d'un moment, je lui réponds : "c'est le temps !". C'était la bonne réponse ! Vous voyez, normalement, il y a un tas de choses qui sont variables. Et toute la physique est écrite en notant d/dt de quelque-chose égale quelque-chose d'autre... Toute la physique est écrite en fonction du temps. Et en fait, si on réfléchit suffisamment, au niveau conceptuel, on s'aperçoit en fait, que la mécanique quantique occasionne immédiatement des paradoxes, des paradoxes très très violents, très très forts, si vous voulez, et qui viennent précisément du fait qu'on attribue la variabilité au passage du temps.

Et il y a une idée fondamentale qui a du mal à passer, mais qu'on a essayé de vulgariser etc., et cette idée c'est en fait que la vraie variabilité, c'est la variabilité quantique et que le temps en fait, émerge de cette variabilité-là. Ca veut dire que le temps n'est qu'un phénomène secondaire, n'est qu'un phénomène émergent, qui résulte de la variabilité quantique, mais qui n'est pas du tout fondamental d'accord.

Alors pour essayer de faire passer cette idée, en fait, je ne vais pas vous donner tous les détails, on a écrit un livre, donc, avec Danye Chéreau et Jacques Dixmier, on a écrit un livre ensemble, qui s'appelle Le Théâtre quantique. Et dans ce livre, vous verrez une introduction à cette idée-là, qui est, on l'espère, compréhensible quoique un peu cryptique évidemment, c'est-à-dire qu'on ne donne pas tous les détails etc. Mais l'idée vient d'un autre mathématicien tout à fait extraordinaire Von Neumann.

Cest-à-dire après la découverte de Heiseberg, si vous voulez, après la grande découverte de Heisenberg, bien sûr, les mathématiciens ont formalisé ce que Heisenberg avait trouvé. Ca a pris du temps. Ce que Heiseberg avait trouvé, donc je vous le rappelle, c'était que vous ne pouvez pas permuter les lettres, les variables comme $e = mc^2$, vous ne pouvez pas écrire $e = c^2m$. On ne peut pas faire ça, d'accord ? Alors il y a des gens qui vous diront "Ouh la la la la ! Qu'est-ce que ça va être compliqué tout ça !". Mais en fait, non, revenons à Heisenberg.

Vous voyez ces deux phrases, donc ça, c'est une anagramme qui a été trouvée par Jacques Perry-Salkow, qui est tout à fait extraordinaire et qui a été la naissance du bouquin que je vous ai montré. Mais que signifie une anagramme ? Elle signifie que si j'avais le droit de permuter les lettres, j'obtiendrai le même résultat : pas terrible ! *(rires) a2bcd...* Donc vous voyez, dans le commutatif, ça vous donne le même résultat. Mais bien sûr, nous sommes tous habitués à faire attention à l'ordre des lettres... Bien sûr, c'est le langage ! Le langage est fait pour ça. Et la découverte d'Heisenberg peut se dire incroyablement simplement : elle peut se dire en disant que Heisenberg, il a trouvé qu'il fallait faire attention à l'ordre des lettres, quand on fait des calculs avec les variables microscopiques, c'est merveilleux ! C'est quelque chose d'absolument merveilleux, d'accord ! Bon alors Von Neumann a élaboré là-dessus, il a trouvé qu'il fallait un formalisme mathématique qui s'appelle le formalisme des espaces de Hilbert, c'est un truc assez compliqué.

Alors, vous savez, dans mon introduction, j'ai dit que j'allais parler des algèbres de Von Neumann, d'accord. Alors justement là j'en parle, d'accord. Je ne vous donne pas trop de détails, bien sûr, pas trop de détails sur les types et tout ça. Mais maintenant, je vais vous parler d'un autre mathématicien, et qui a été le point de départ, vraiment de mon travail, de ma thèse, etc., et qui est l'outil qui a permis d'avoir, l'outil essentiel qui permet de donner un sens à cette idée que le temps, le passage du temps émerge à partir de l'aléa du quantique. Alors, la raison pour laquelle je vous montre sa photo, c'est que malheureusement il est mort, le 9 octobre, à l'âge de 91 ans ; sa photo a été prise quand il était venu à Bures-sur-Yvette il y a exactement 30 ans. Il a passé un an à Bures-sur-Yvette il y a 30 ans, et pourquoi c'est un personnage absolument extraordinaire ? C'est un personnage extraordinaire parce que par exemple, il était dans l'armée au moment de la guerre entre le Japon et les Etats-Unis, mais il était devenu sourd à l'âge de 2 ans. Donc il y a eu un moment donné où tous ses coréligionnaires couraient aux abris, quand il y avait un bombardement. Tomita ne bougeait pas, et quand ses coorélionnaires revenaient le voir, ils lui disaient "mais tu es fou ?...". Ils le secouaient, et il leur disait "Quel bombardement ?". C'était à ce point-là, il était connu comme ça. Et alors il y a eu un épisode où le gradé qui les commandait a dit que lui ne serait pas de l'expédition qu'ils allaient faire parce que, comme il était sourd, ça posait plutôt un problème. Donc il est resté et tous les autres sont morts. Et apparemment, mais ça j'en suis moins sûr, apparemment, il était le suivant sur la liste des kamikazes au moment où la guerre s'est arrêtée.

Ensuite, il a eu un prof, il faut dire que peu après la guerre donc, quand il était à l'université, au lieu de faire des cours, enfin au lieu d'aller écouter les cours, les étudiants allaient planter des pommes de terre tellement il y avait la famine. Ils allaient planter des pommes-de-terre tout près de l'université. Donc il avait un prof. Il avait un prof pour faire sa thèse, son prof s'appelait Ono, et son prof, la première fois donc Tomita va voir son prof, parce qu'il voulait faire une thèse ; son prof prend un gros gros bouquin, je n'en ai pas amené avec moi. Le prof lui donne un livre, oh ! plus que ça, deux fois ça facile, d'accord, il le donne à Tomita et il lui dit "Lisez ce bouquin et revenez me voir quand vous aurez tout compris". Alors ça va, comme ça. Alors pendant 2 ans, ils ne se voient pas. Et puis au bout de 2 ans, par hasard, Tomita rencontre son prof dans les couloirs de l'université. Son prof se souvenait quand même : "alors ce bouquin, ça avance ?". Et Tomita lui répond "je l'ai perdu au bout d'une semaine..." *(rires)* C'était un type absolument génial. Il racontait des histoires qui étaient absolument géniales. Il a fait une découverte absolument géniale. Seulement, comme il était sourd, si vous voulez, c'était très très très difficile de communiquer avec lui. C'était vraiment très très difficile, la plupart du temps, il coupait son appareil. *(rires)*. Moi, ça a été le point de départ de mes travaux si vous voulez. Le départ de mes travaux, ça a été le fait que donc Tomita et puis après Takesaki, qui avait repris les travaux de Tomita, avait trouvé que bon, sur une algèbre de Von Neumann, comme Von Neumann les avait définies, il y avait une évolution mais qui dépendait d'un état. Et alors, ce que j'ai démontré dans ma thèse, c'est qu'en fait, elle ne dépendait pas d'un état et qu'il suffisait d'avoir la non-commutativité, c'est-à-dire qu'il suffisait d'avoir une algèbre, de faire des calculs dans lesquels vous faites attention à l'ordre des termes, pour qu'il y ait une évolution dans le temps, donc pour qu'il y ait un temps qui passe. Bon alors après, il y a eu un tas de conséquences de ça, bien entendu. Et en fait, l'essentiel de mes travaux a été si vous voulez de développer la géométrie pour des espaces qui contrairement aux espaces de Descartes, parce que Descartes si vous voulez, avait réussi à comprendre qu'il y avait une dualité entre la géométrie et l'algèbre car Descartes avait compris qu'on pouvait encoder un espace géométrique par des coordonnées et puis faire des calculs algébriques au lieu de faire des calculs géométriques. Un exemple le plus simple possible : si vous voulez démontrer que les 3 médianes d'un triangle se coupent. Eh bien, il y a plusieurs manières de faire, mais la manière la plus simple, c'est de faire le calcul du barycentre. Vous prenez les coordonnées puis vous calculez le tiers de la somme des coordonnées. Quel est l'avantage de la démonstration algébrique sur la démonstration géométrique ? Vous pouvez bien sûr faire une démonstration géométrique du fait que les 3 médianes d'un triangle se rencontrent. Mais supposez que je vous demande de le démontrer en dimension n ? *(rires)*. Alors que la démonstration algébrique, elle est évidente, vous faites $1/n$ fois la somme des coordonnées et puis c'est tout, ça vous donne le point d'intersection et puis c'est terminé. Donc vous voyez la puissance de ce va-et-vient, entre d'un côté la géométrie, et de l'autre côté l'algèbre. Alors ce qu'a découvert Heisenberg, c'est qu'il y avait des espaces incroyablement naturels dans lesquels justement, les coordonnées ne commutent pas. Et ces espaces correspondent aux observables sur un système microscopique.

Et donc moi, l'essentiel de mes travaux, ça a été de développer la géométrie, pour de tels espaces.

Alors comme le temps est encore assez court, au lieu de vous parler de mes travaux, je vais vous parler d'un autre mathématicien absolument extraordinaire, qui s'appelle Alexandre Grothendieck, et qui est mort il y a un an, et la raison pour laquelle je vais vous en parler, ce n'est pas parce que je veux vous décrire la théorie des topos, parce que ça, c'est une merveilleuse théorie mais ça ne passerait pas, je n'ai pas envie d'en parler. Après peut-être... Mais c'est surtout pour vous expliquer, pour vous montrer ce que Grothendieck dit sur la créativité et sur ce besoin absolument nécessaire de retrouver, lorsqu'on est devant un problème très très difficile, son âme d'enfant et cette espèce de, justement, d'ouverture, de sensibilité, etc. qui est en fait trop souvent complètement gommée, complètement effacée par le poids des connaissances. Donc voilà ce que dit Grothendieck, je vais le lire avec vous, et puis on s'arrêtera là. Donc voilà Grothendieck quand il était jeune. Il a eu, lui aussi, une vie extrêmement tumultueuse.

Donc voilà ce qu'il écrit. Il écrit :

Dans notre connaissance des choses de l'univers, qu'elles soient mathématiques ou autres, le pouvoir rénovateur en nous n'est autre que l'innocence.

C'est l'innocence originelle, que nous avons tous reçue en partage à notre naissance, et qui repose en chacun de nous, objet souvent de notre mépris, de nos peurs les plus secrètes. Elle seule, (donc cette innocence) *unit l'humilité* (bien sûr, la recherche est une école d'humilité, l'école quotidienne de l'humilité) *l'humilité et la hardiesse qui nous font pénétrer au cœur des choses et qui nous permettent de laisser les choses pénétrer en nous, et de nous en imprégner.* (Ca, c'est la première chose qu'il dit. Ensuite il dit :) *Ce pouvoir-là,* (Ca, c'est très très important, maintenant.) *Ce pouvoir-là n'est nullement le privilège de dons extraordinaires.*

Vous voyez, lorsque parfois on assiste à des expositions, sur les mathématiques, vous avez l'impression que ouh ! Ce sont des extraterrestres ces gens-là, non il ne faut pas du tout avoir cette peur, absolument pas. Il arrive au contraire trop souvent que les gens trop intelligents aient une réaction immédiate et que cette réaction immédiate en fait, soit fausse. C'est-à-dire ils vous disent "ça va pas marcher pour telle et telle raison...". En fait, s'ils avaient réfléchi plus, il se seraient aperçus que ça marche, d'accord. Donc ce que dit Grothendieck, c'est que donc :

Ce pouvoir là mais nullement le privilège de dons extraordinaires, d'une puissance cérébrale, disons hors du commun, pour assimiler et pour manier avec dextérité et avec aisance, une masse impressionnante de faits, d'idées et de techniques connues. Ces dons sont certes précieux et sources d'envie sûrement pour celui qui, comme moi, n'a pas été comblé ainsi à sa naissance au-delà de toute mesure...

Là, il est vraiment ironique, ironique, j'aime pas dire le plus grand parce que le plus grand, qu'est-ce que ça veut dire..., on ne peut pas comparer des choses différentes, mais il a eu une influence phénoménale sur les mathématiques du XX$^{\text{ème}}$ siècle. Une influence phénoménale. Donc l'entendre lui, dire ça... c'est rassurant, disons ! *Ces dons sont certes précieux et sources d'envie sûrement pour celui qui comme moi n'a pas été comblé ainsi à sa naissance au-delà de toute mesure. Ce ne sont pas ces dons-là, pourtant, ni l'ambition même la plus ardente* (l'ambition ne suffit en rien) *l'ambition, servie par une volonté sans faille, qui font franchir ces cercles invisibles et impérieux qui enferment notre univers. Seule l'innocence les franchit, sans le savoir, ni sans s'en soucier, à l'instant où nous nous retrouvons seuls à l'écoute des choses, intensément absorbés dans un jeu d'enfant.*

Donc ce qu'il explique, c'est qu'il n'y a rien de plus fructueux que de se saisir d'une question et d'y réfléchir, mais de cette manière-là, d'une manière complètement indépendante du poids de la science, etc. d'accord. Bien sûr, bon, pour arriver au problème, il faut connaître un certain nombre de choses mais après, il faut y réfléchir comme ça. Et donc il continue en disant :

La découverte est le privilège de l'enfant. C'est du petit enfant que je veux parler, l'enfant qui n'a pas peur encore de se tromper, d'avoir l'air idiot, de ne pas faire sérieux...

Par exemple, tout à l'heure, il y aura des questions donc d'accord, attention à ça, il ne faudra pas avoir peur. Il y a même un proverbe chinois qui dit : "si je pose une question, j'ai l'air idiot pendant 5 secondes ; si je ne la pose pas, j'ai l'air idiot tout le reste de ma vie.". Donc voilà ce qu'il dit, donc, de ne pas faire sérieux, de ne pas faire comme tout le monde. Et c'est vrai quand-même qu'il y a une attitude typiquement française assez caractéristique dans une assemblée : on a peur de poser la question, sauf quand on connaît la réponse *(rires)*.

Il n'a pas peur non plus que les choses qu'il regarde aient le mauvais goût d'être différentes de ce qu'il attend d'elles, de ce qu'elles devraient être, ou plutôt de ce qu'il est bien entendu qu'elles sont, c'est-à-dire, ce que la majorité des gens vont lui avoir dit qu'elles seraient ; il ignore les consensus muets et sans faille, qui font partie de l'air que nous respirons, celui de tous les gens sensés et bien connus comme tels. Dieu sait s'il y en a eu, des gens sensés et bien connus comme tels, depuis la nuit des âges ; nos esprits sont saturés d'un savoir hétéroclite, enchevêtrement de peurs et de paresses, de fringales et d'interdits, d'informations à tout-venant et d'explications pousse-boutons...

Un exemple typique, c'est ce qu'on appelle l'effet papillon, le nombre de gens qui ont ressassé ça sans savoir que c'était une idiotie, c'est quelque-chose de considérable. Mais je veux dire, ça a perduré, ça a perduré longtemps d'accord. Alors je continue donc.

...espace clos où viennent s'entasser informations, fringales et peurs, sans que jamais s'y engouffre le vent du large, exception faite d'un savoir-faire de routine. Il semblerait que le rôle principal de ce savoir est d'évacuer une per-

ception vivante, une prise de connaissance des choses de ce monde.

C'est ça qui compte, c'est cette perception vivante. Par exemple, pour aimer les mathématiques, il faut en faire, bien sûr. Et peu importe le problème que vous regardez, mais ce qui est important, c'est que vous en fassiez, c'est pas que vous preniez comme... Si quelqu'un vous dit un théorème, par exemple, si vous voulez, il faut pas trop avoir la démonstration. Il faut la chercher par vous-même, même si vous ne la trouvez pas. Vous allez gagner. Pourquoi ? Parce que si vous la cherchez, par vous-même, quand on vous la dira, même si vous ne la trouvez pas, et bien vous direz "mais c'est bien sûr, c'était ça, et c'était ça !". Si vous ne la cherchez pas et si on vous la donne, ça rentre par une oreille et ça sort par l'autre, et puis vous aurez oublié au bout d'une demi-heure. Donc, c'est très très important d'**en faire**, d'accord. Donc donc... *Son effet est surtout celui d'une inertie immense.* Il parle du poids de ce savoir en commun, souvent écrasant.

Le petit enfant découvre le monde comme il respire. Le flux et le reflux de sa respiration lui font accueillir le monde en son être délicat et le font se projeter dans le monde qui l'accueille. L'adulte aussi découvre, en ces rares instants où il a oublié ses peurs et son savoir, quand il regarde les choses ou lui-même avec des yeux grand ouverts, avides de connaître, avec des yeux neufs, des yeux d'enfant.

J'espère que vous ressentez le plus important dans ce que j'ai dit. C'est que ça ne s'applique pas du tout qu'aux mathématiques ; c'est-à-dire que vous vouliez faire des sciences humaines, que vous vouliez faire de la linguistique, que vous vouliez faire quelque chose que ce soit, même peut-être de l'art, si vous voulez, c'est crucial que vous ayez compris le message. Et que vous ayez compris que, en particulier les mathématiques, elles ont une portée bien bien plus grande que de calculer avec des nombres, de calculer avec des chiffres, etc. C'est pas du tout ça, c'est une espèce de version de la philosophie qui est beaucoup plus dure parce qu'effectivement, pour arriver à un concept nouveau comme le concept de topos de Grothendieck, il a fallu des années et des années de réflexion... Mais ça donne des outils de pensée absolument fondamentaux. Et j'ai pas le temps d'en parler, mais le concept de topos, c'est un concept qui vous montre que la notion de vérité, quand on dit par exemple de manière courante de quelque chose que c'est vrai ou que c'est faux, eh bien, quand on regarde dans un topos, c'est un univers qui est différent de l'univers, eh bien une chose peut être partiellement vraie partiellement fausse, elle peut être vraie pour un certain point de vue, elle peut être fausse pour un autre point de vue, etc. Donc ça donne un outil de pensée qui est incroyablement adapté en fait à la vie, à la politique, à 36 choses, mais qui n'est pas encore passé dans le domaine commun. C'est une notion qui est encore une notion dans le domaine mathématique, qui n'est pas encore passée dans le domaine commun. Et on y gagnerait énormément si vous voulez à, justement, à ce que toutes ces choses merveilleuses qui ont été découvertes, deviennent maintenant, fassent partie du domaine commun. Donc mon laïus allait dans ce sens-là d'accord, d'essayer de vous faire voir, de manière un peu surréaliste si vous voulez, qu'il existe ces choses magnifiques mais que bon bien sûr, il faut faire un effort pour les apprendre et un effort pour les connaître. Voilà.

Séance de questions à l'orateur

- Merci beaucoup. Questions. Peut-être, donc, on fait ce qu'on a dit. Si vous avez des questions, des précisions sur ce qui a été dit, donc, questions qu'il ne faut pas avoir peur de poser, moi, j'en ai quelques-unes, mais je suis sûr que vous en avez aussi...

- Vous avez parlé de l'effet papillon... Et que ça n'existait pas.

- Je n'ai pas dit que ça n'existait pas. Mais j'ai dit que c'était une vaste fumisterie. Parce que ce que je veux dire, c'est comme si on disait qu'il y a un papillon qui va voler, puis l'avion qui suit un autre avion ne va pas décoller ; il y a un effet d'amortissement qui est colossal. Bien sûr qu'on peut faire un système mathématique qui dépend de peu de variables et qui est tel que, quand on fait bouger un petit peu une variable, ça va changer les résultats. Mais de là à faire croire qu'un petit papillon qui vole à un endroit, il va créer, je ne sais pas moi, un ouragan à un autre endroit, c'est ridicule... Bon on peut rappeler d'où ça vient, ça vient du fait qu'il y a des équations différentielles en mathématiques, qui sont telles que si on change un tout petit peu les conditions initiales, ça change le résultat de manière considérable, de manière exponentiellement plus grande. Ca, c'est vrai. Mais c'est vrai dans un modèle particulier. C'est vrai dans un modèle, dans lequel il n'y a pas d'amortissement, comme il se produit dans la nature. Dans la nature, heureusement, il se produit des amortissements, parce que sinon, dans la nature, on regarderait les papillons un peu partout, et puis on aurait la trouille *(rires)*. Heureusement que c'est comme ça. Mais c'est du bon sens, c'est du bon sens. Mais on a vu peut-être je ne sais pas combien de politiques ou des gens qui répétaient l'effet papillon sans rien comprendre, puisque s'ils avaient compris quoi que ce soit, ils se se seraient aperçus que c'était, hein, bon... C'est un exemple typique de gens qui répètent les choses sans les comprendre, simplement parce qu'ils se disent : "Ah ouais, c'est quelqu'un de puissant qui l'a dit, donc ça doit être vrai, quoi !"

- Merci.

- C'était une question sur le fait que vous aviez dit que souvent, les physiciens exprimaient tout en fonction du temps, et qu'on considérait souvent que c'était la variable...

- fondamentale.

- et vous disiez qu'en fait, il se trouve que la véritable variable, c'est la variable quantique, et je n'ai pas compris comment le temps découle de cette variable.

- Ca, c'est toute une histoire. En gros, c'est l'histoire de ma trajectoire. C'est-à-dire en fait ce qui se produit, mais c'est un peu expliqué dans le bouquin, mais c'est surtout bien expliqué dans un exposé que j'ai fait à l'IHES au mois de mai, et dont je pense qu'il doit être sur le site de l'IHES, il faut aller écouter cet exposé, je pourrais en dire deux mots. Mais bon, en gros, c'est que Von Neumann a créé les algèbres de Von Neumann comme étant des systèmes où on a une connaissance partielle de la réalité. Et avec le travail de Tomita, puis mes travaux pendant la thèse, on a compris que si on avait un système qui a une connaissance partielle de la réalité, à ce moment là, il y a un temps qui émerge. C'est-à-dire il y a une évolution dans le temps. Comme tout est quantique, et que la connaissance qu'on a de la réalité est effectivement partielle, c'est ça qui, avec les travaux que j'ai fait avec Carlo Rovelli, c'est ça qui devrait expliquer le passage du temps, c'est ce qu'on appelle le temps thermodynamique. Cette idée du temps thermodynamique, elle est bien expliquée dans notre bouquin à trois voix.

- Du coup, ma question rejoint un peu la question de Constantin tout à l'heure. Donc du coup, la constante fondamentale, il n'y en a plus maintenant, puisque finalement, tout repose sur une variabilité quantique ?

- Il y a une chose dont je n'ai pas parlé mais j'avais des transparents dessus donc je peux les montrer effectivement. C'est important, c'est important, c'est cette idée de variables. Parce que finalement, on revient à l'idée de variables. Qu'est-ce que c'est qu'une variable, vous voyez ? Nous, ce qu'on nous apprend en classe, ce que c'est qu'une variable réelle... Une variable réelle, c'est une application qui va d'un ensemble X dans les réels. C'est comme ça qu'on nous dit ce qu'est une variable réelle. Or si on regarde cette définition d'une variable réelle, on s'aperçoit en fait, avec un petit raisonnement, on s'aperçoit qu'on ne peut pas avoir coexistence de ce qu'on appelle des variables continues, des variables qui prennent par exemple un intervalle de valeurs, et des variables discrètes, qui prennent des valeurs discrètes. *(Il dessine un intervalle et des points au tableau).* Et la raison pour laquelle on ne peut pas avoir coexistence, c'est que si on prend une variable continue, l'ensemble X doit au moins avoir la cardinalité du continu mais s'il a la cardinalité du continu, on ne peut pas avoir une variable discrète, parce qu'il y aura des points qui seront atteints trop de fois. On ne peut pas avoir ça. L'extraordinaire valeur du formalisme quantique, tel que Von Neumann l'a développé, c'est que dans le formalisme quantique, tout est résolu : c'est-à-dire que dans le formalisme quantique, en fait, une variable, c'est le spectre d'un opérateur auto-adjoint dans l'espace de Hilbert, c'est un peu compliqué mais là, pour les opérateurs dans l'espace de Hilbert, on peut avoir des opérateurs qui ont un spectre discret et des opérateurs qui ont un spectre continu et qui coexistent. Et alors, ce qui est extraordinaire, c'est qu'en fait, ça rejoint exactement la pensée de Newton. C'est-à-dire que Newton, dans ses écrits, quand il essayait de définir ce que c'est qu'un infinitésimal par exemple, il a écrit exactement la bonne phrase, qui correspond au quantique. C'est-à-dire, il disait une variable est infinitésimale. D'abord il disait ce qu'était une variable. Or le formalisme quantique donne exactement la bonne réponse par rapport à Newton. Ca, c'est la première chose.

Et alors donc maintenant, ce qui se produit, c'est qu'une fois qu'on a ce formalisme, de ce que c'est qu'une variable, on s'aperçoit que bien sûr, les variables discrètes ne peuvent coexister avec les variables continues que par la non-commutativité, et on s'aperçoit que c'est cette non-commutativité qui crée le passage du temps, d'accord ? Donc en fait, le $\hbar$ existe toujours en fait, la constante de Planck est toujours présente, mais ce qui est extrêmement frappant, c'est qu'on ne doit pas considérer le temps comme étant une donnée fondamentale, mais comme une donnée émergente, et que si on avait une connaissance absolue de tout, le temps ne passerait pas. C'est incroyable de penser ça, d'accord, c'est-à-dire que la raison pour laquelle on a l'impression que le temps passe, etc., c'est parce qu'on a une connaissance partielle de l'univers, d'accord. C'est ça qui est formidable si vous voulez avec ce jeu de la physique. Dans le livre qu'on a écrit avec Danye Chéreau et Jacques Dixmier, il faut que je vous dise que Danye Chéreau c'est mon épouse *(rires)*, ce qu'on fait, c'est qu'on a trouvé une phrase très frappante qu'on a utilisée pour exprimer l'idée que je viens de vous dire. On a dit "L'aléa du quantique est le tic-tac de l'horloge divine". Vous savez, Einstein avait dit "Dieu ne joue pas aux dés" donc voilà la réponse. La réponse du héros du bouquin à cette boutade d'Einstein, c'est que "l'aléa du quantique est le tic-tac de l'horloge divine". C'est-à-dire que c'est parce qu'il y a constamment ces petits trucs complètement aléatoires, pop ! pop ! pop ! qui se produisent, que le temps passe. La nature a une imagination phénoménale. Et c'est ce que donne l'instrument pour mesurer des nombres aléatoires, c'est incroyable, ça veut dire "il prend le pouls de la nature", pop ! Allez ça, c'est un nombre aléatoire, pop ! un autre... Vous pouvez toujours essayer de les reproduire. Bon eh bien ça, c'est incroyable, c'est la phrase qui le dit, c'est "l'aléa du quantique est le tic-tac de l'horloge divine".

- Pour essayer de mettre un petit peu ça au clair, du coup, si, admettons, bon, on peut toujours hypothétiser, si par exemple, justement, cette nature quantique était stable, si elle ne bougeait pas, le temps ne passerait pas ?...

- Eh bien, non, justement, elle n'arrête pas de bouger !

- Mais admettons qu'on imagine qu'elle ne bouge pas. Ca veut dire que le temps ne passerait pas ?...

- Ah oui ! Non, non, non, c'est pas ça ; si on la connaissait complètement, si on avait toute la connaissance, là le temps ne passerait pas. Le temps passe parce qu'on a une connaissance partielle, c'est la thermodynamique, d'accord. La thermodynamique, ça nous dit, la thermodynamique, par le génie de Boltzmann, il nous dit que l'entropie, par exemple, c'est la connaissance partielle des choses, d'accord. Donc le passage du temps est relié à ça, d'accord. Mais la nature n'arrête pas de bouger, hein, d'accord ?!... *(rires)*

- J'ai une question parce que vous dites que pour votre thèse, vous vous êtes inspiré de Tomita qui a montré donc la non-commutativité...

- Non, non, c'est pas ça. Bon oui oui, c'est un détail... ! *(rires francs)*

- Est-ce que vous pourriez juste expliquer ce qu'on appelle les types ?

- Ah oui, les types ! ! Bien sûr, bien sûr, tout à fait, ben les trois types... Alors, les trois types. Où est-ce qu'ils sont, les 3 types ? Le premier type, c'est lui... *(Il montre une photo, éclats de rires.)*

Les 3 types, donc : le type I, c'est un système quantique tel qu'en fait, l'espace de Hilbert du système quantique se casse en un produit tensoriel de deux espaces, c'est-à-dire que c'est vraiment le cas le plus simple qu'on puisse imaginer, et c'était ce dont les gens avaient imaginé que ce serait toujours le cas. Ils imaginaient toujours que quand on prenait un sous-système d'un système quantique, on pourrait casser l'espace de Hilbert en un produit tensoriel de deux, de telle sorte que le premier système corresponde au premier espace de Hilbert, aux opérateurs dans le premier espace de Hilbert, et l'autre aux opérateurs dans le deuxième espace de Hilbert. Alors ce que Von Neumann et Murray ont découvert, c'est qu'en fait, il y avait deux autres types. C'est-à-dire qu'il y avait une manière d'avoir des sous-systèmes quantiques qui ne correspondait pas du tout à un scindage de l'espace de Hilbert en un produit tensoriel. Alors le premier type, il y avait les dimensions réelles. Et puis le type III qui restait, c'étaient les autres. Et avant Tomita, on n'avait aucun outil pour attaquer le type III, d'accord. Donc ce que Tomita a trouvé, c'est que dans le type III, il y avait ce groupe $\sigma_{t\phi}$ et puis ce que j'ai trouvé dans ma thèse, moi, après, c'était que le groupe qu'avait trouvé Tomita, en fait, il était unique modulo les intérieurs, c'est-à-dire qu'il définissait une vraie évolution, indépendante de toute autre chose. Donc ça, ça a donné quantité d'invariants, etc., ça a permis de tout débloquer. D'accord ! Donc mais c'est incroyable parce que Von Neumann avait défini ces sous-systèmes quantiques de manière complètement euh, comment dire, c'est dans les écrits de Von Neumann, de manière complètement abstraite. Et jamais on aurait pu penser à l'époque de Von Neumann que ça aurait été relié au temps, au passage du temps, je veux dire, c'est absolument incroyable. Ca veut dire la profondeur du quantique. Heisenberg a découvert que ça venait de la non-commutativité, Von Neumann l'a reformulé sous forme d'opérateurs dans l'espace de Hilbert, il s'est posé le problème des sous-systèmes, et de là sort le passage du temps, c'est fabuleux !

- Est-ce que vous pourriez nous expliquer pourquoi le principe de l'entropie résulte de la connaissance partielle qu'on a du monde ?

- Ca, c'est Boltzmann et le pauvre Boltzmann était tellement incompris à son époque qu'il a fini par se suicider. Il a eu une idée absolument... Il a fait graver sur sa tombe la formule qui est la suivante $S = k\ log\ n$. Ca, c'est gravé sur la tombe de Boltzmann. Il s'est suicidé près de Trieste. Cette formule, qu'est-ce qu'elle dit ? C'est une des formules les plus simples mais l'une des plus difficiles à comprendre. Qu'est-ce que c'est que l'entier n ? C'est le nombre de réalisations microscopiques d'un état macroscopique.

Il faut que je vous raconte un peu l'histoire : l'histoire, c'est à la période où les gens avaient découvert la machine à vapeur, et puis il y avait les locomotives et tout ça, et donc ce que les gens avaient découvert, c'était qu'il y avait un moyen de transformer la chaleur en énergie, en mouvement, en tout ce qu'on veut quoi. Et c'est comme ça que le chemin de fer a commencé, etc. Et ils s'étaient posé la question de ce qu'on appelait le rendement des machines et tout ça. Et donc bien sûr, si vous voulez, il y avait des quantités de chaleur dq donc qui étaient entre deux systèmes etc. Mais on s'était aperçu assez vite que si on prenait deux chemins différents pour aller d'un point à un autre, d'un état à un autre, l'intégrale de $\int dq$ si vous voulez, c'était pas préservé, c'est-à-dire qu'on ne peut pas définir la quantité de chaleur d'un objet. Par contre, on s'est aperçu que si on divisait dq par ce qu'on appelle la température absolue, eh bien ça, cette quantité-là si vous voulez, elle était bien définie, c'est-à-dire que quel que soit le chemin qu'on prenait, entre un état et un autre, l'intégrale de ce truc-là donnait le même résultat. Et c'est ça qui avait permis de définir l'entropie.

Mais cette entropie, elle était définie pour des systèmes macroscopiques qui étaient donnés par la température, la pression, le volume, enfin je sais pas quoi, si vous voulez un certain nombre de quantités macroscopiques, il n'y avait aucune interprétation, aucune, et ça s'appelait l'entropie. Ca s'appelait l'entropie, S. Mais cette entropie, elle n'avait aucune signification philosophique puisque justement, c'est de ça dont on parle, d'accord ? Et l'incroyable génie de Boltzmann, ça a été cette formule $S = k\ log\ n.\ dq + ds = log\ n$, c'est-à-dire ce qu'a compris Boltzmann, c'est qu'à chaque fois qu'on prend un état macroscopique donc un volume donné etc., on peut avoir le même état macroscopique, à partir d'états microscopiques totalement différents. C'est-à-dire que l'exemple le plus simple, c'est de prendre des boules rouges et des boules blanches, et de les empiler dans un réservoir. Et vous avez par exemple 50 boules rouges et 50 boules blanches. Vous voyez bien que vous pouvez les empiler de 36 manières différentes, d'accord. Mais l'état macroscopique correspondant vous dira qu'il y a la moitié de boules rouges et la moitié de boules blanches et puis c'est tout. Le reste, vous vous en foutez. Eh bien, ce qu'a compris Boltzmann et qui est incroyable, c'est que l'entropie, qui était définie de manière complètement ad hoc par les gens qui faisait des systèmes de machines à vapeur et tout ça, eh bien en fait, c'était simplement le logarithme du nombre de réalisations microscopiques d'un état macroscopique donné. Bien sûr, il fallait une constante devant. C'est ce qu'on appelle la constante de Boltzmann, c'est normal qu'elle porte son nom. Donc cette constante de Boltzmann, c'est pas la même chose que la constante de Planck, et elle est, bon, évidemment il faut que ça ait la dimension d'une entropie etc. etc. d'accord. Mais c'est la formule la plus incompréhensible, et la plus géniale qui soit, cette formule d'accord. Et elle est très difficile à comprendre. Ce qui est très difficile à comprendre, c'est que les lois de la physique, pas de la physique des particules, mais les lois de la physique ordinaire, sont invariantes quand on change t en $-t$. Et si vous voulez, ce qui est très difficile à comprendre, c'est qu'un des principes fondamentaux de la thermodynamique est que l'entropie s'accroît. Alors on dit : “Mais le temps, il va dans quel sens ?. Ca, ça a hanté les gens pendant des années et des années. Et Boltzmann, il avait compris un nombre incalculable de choses simplement à cause de cette idée. C'est un exemple merveilleux, de formule très simple, mais justement si vous voulez, ça, c'est aussi une chose très importante que je n'aurais pas voulu oublier de vous dire, qui est qu'il y a un certain nombre de notions mathématiques ou de notions de physique comme ça, qui ont une qualité extraordinaire, et cette qualité, c'est de mettre la pensée en mouvement. Cette formule c'est un exemple typique, vous regardez cette formule, vous essayez de la comprendre, voilà, votre pensée est en mouvement maintenant. Elle a un potentiel extraordinaire de mise en mouvement de la pensée. Parce que vous pouvez vous dire “Pourquoi ça augmente ?”. En gros, l'explication de

Boltzmann de la raison pour laquelle ça augmente, c'est que, en général, on va aller vers des états qui ont de plus en plus de réalisations microscopiques, c'est-à-dire qui sont de plus en plus probables. Et après, pour mettre ça sur des bases solides, c'est une autre histoire...

- Donc vous nous avez beaucoup parlé de la physique, et on sait qu'en ce moment la physique théorique, ça devient un peu un repaire de mathématiciens, par exemple avec la théorie des cordes, et du coup je me demandais si vous, en un sens, est-ce que vous pourriez vous considérer plutôt comme un physicien qui fait des mathématiques ?

- C'est une bonne question, j'avais des amis qui, connaissant mes opinions sur la théorie des cordes, disaient que j'étais un peu comme une machine où on met des sous, alors, mais si on met 1 euro, je vais parler pendant 10 minutes contre la théorie des cordes. Donc je vais vous épargner. Non, mais je vais vous citer une phrase de Hadamard. Il faut que je la trouve déjà *(rires)*. Attendez, il faut que je la trouve... Alors, je crois que je vais y arriver. Voilà, c'est une phrase sur le lien entre les mathématiques et la physique ; ce que dit Hadamard, pour caractériser la profondeur des concepts mathématiques qui viennent directement de la physique, il dit (je le dis en anglais donc, mais c'est très facile à traduire en français) :

...not this short lived novelty, which can too often only influence the mathematician left to his own devices, but this infinitely fecund novelty, which springs from the nature of things[2].

Donc voilà la réponse. La réponse, c'est qu'il n'y a pas d'un côté les mathématiques, et d'un autre côté la physique. C'est la même chose : on essaie tous de comprendre, d'accord. Et justement, il y a cette profondeur extraordinaire dans certains concepts mathématiques qui viennent directement de la physique. Comme Heisenberg. C'est inépuisable parce que c'est venu de quoi, c'est venu de l'expérience, c'est venu de la physique, c'est la nature qui nous parle, qui nous dit quelque chose d'accord. Ca, c'est inestimable ! Mais ce n'est pas le cas de la théorie des cordes, parce que la théorie des cordes,

2. ...non une brève nouveauté qui souvent influence le mathématicien rivé à ses propres préoccupations, mais une nouveauté infiniment féconde qui jaillit de la nature des choses. in Jacques Hadamard, Préface à l'introduction au calcul tensoriel et au calcul différentiel de G. Juvet, Albert Blanchard, Paris, 1922

c'est une déviance qui elle, est venue à partir de mathématiques abstraites etc., et qui elle n'a pas de contact avec l'expérience.

- Il y a un autre mathématicien, qui s'appelle Carlo Rovelli *(précision d'Alain Connes : "C'est un physicien, lui, c'est un physicien" (rires))* et il dit que pour lui, la beauté de la physique, c'est une idée simple, qui nous ouvre sur un monde totalement nouveau et en même temps, ce monde, il est réel, il est correct. Et je me demandais pour vous, ce que vous pensiez vous de la beauté mathématique...

- Ca, c'est une bonne question *(soupir)*. Bon d'abord, il y a beaucoup de gens qui, et je pense que c'est vrai, qui vous diront que la notion de beauté est une notion très relative, c'est-à-dire que chacun a sa notion différente etc. bien sûr. Mais bon moi, j'avoue que pour moi, la beauté mathématique, c'est quand, après des calculs terribles, terriblement compliqués, on arrive à la même chose, on arrive au résultat, mais par une idée d'une simplicité incroyable, un peu comme l'œuf de Colomb d'accord. Pour moi, c'est ça, la beauté mathématique, pour moi, la beauté, c'est la simplicité d'une idée, mais en fait, d'une idée qui va... Bon par exemple, je ne sais pas... quand on parlait de Galois, je vais vous fournir un exemple de cette beauté. Que dit Galois ? Galois dit quand on prend une équation, on prend une équation polynomiale. Alors, la première chose qu'on va faire, on va trouver une fonction des racines, qui quand on permute les racines, va prendre... Bon, par exemple, on prend une équation de degré 5. Il faut que quand on permute les racines de manière arbitraire, cette fonction prenne 120 valeurs différentes (5! valeurs différentes). Alors comment est-ce qu'il fait, Galois, pour trouver une telle fonction ? C'est très simple : il dit "si j'appelle les racines A, B, C, D, E, d'accord, je prends A plus 1 000 000 de fois B + 1 trillion de fois C etc. Evidemment, quand je vais les permuter, ça va prendre que des valeurs différentes. Ca va prendre 120 valeurs différentes". C'est la première chose. Deuxième chose, que dit Galois ? Il dit "eh bien, maintenant, prenons pour équation l'équation qui a pour racines ces 120 racines. On prend cette équation et on la décompose en facteurs irréductibles. On peut exprimer les racines de l'équation de départ en fonction de ces facteurs irréductibles et on va obtenir, en prenant ces facteurs irréductibles, des permutations des racines de l'équation. Théorème, voilà la beauté mathématique. Théorème : Le groupe de permutations obtenu ne dépend d'aucun des choix qu'on a faits. C'est-à-dire que si, au lieu d'avoir pris A plus 1 000 000 de fois B etc., j'avais pris 1 000 001 ou n'importe quoi, j'aurais obtenu le même groupe. Ca, c'est la beauté mathématique, c'est quelque chose d'incroyablement beau. Pourquoi ? Parce que ça veut dire qu'on a donné une recette, qui avait l'air complètement arbitraire, et on est arrivé à un invariant, on est arrivé à un groupe, qui est une caractéristique de l'équation, qui va donner tous les résultats qu'on veut, et qui est d'une simplicité biblique, à la fin, c'est-à-dire la manière dont il est défini, c'est d'une simplicité biblique. Pour moi, c'est ça, la beauté mathématique. Mais c'est un exemple, hein, je veux dire, la définir abstraitement, si on en donnait une définition abstraite, c'est évident qu'on pourrait trouver un contre-exemple et qu'on pourrait trouver... Mais c'est... En fait, si vous cherchez des choses générales sur la beauté en mathématiques, sur des choses comme ça, lisez *Récoltes et Semailles* de Grothendieck. Parce que c'est... Grothendieck n'était pas seulement un mathématicien, en fait, c'était un littéraire, et c'était quelqu'un qui a été capable dans ses écrits, d'aller très très loin dans l'analyse de ce que sont les mathématiques, de ce que c'est que la beauté en mathématiques, etc. Donc il a écrit 1500 pages, ces 1500 pages, vous pouvez les trouver sur internet, d'accord. Et n'écoutez pas les gens qui vous diront qu'il est fou parce que ce n'est pas vrai, ce n'est pas vrai : c'était quelqu'un qui était merveilleusement intelligent, et qui a écrit merveilleusement en tant que littéraire. Il a un vocabulaire extraordinaire, etc. J'ai fait un exposé, au séminaire d'Antoine Compagnon, sur Grothendieck et Proust, en les comparant justement, et je pense qu'il est disponible cet exposé, peut-être sur le site du Collège de France ou sur mon site. Donc, parce que je veux dire, parce que c'est très frappant, c'est très frappant de voir que ce sont deux individus qui ont réussi une chose que peu de gens réussissent, aussi bien l'un que l'autre, qui est non seulement une œuvre, pour Grothendieck, mais aussi si vous voulez ce que dit Grothendieck, ce qu'il explique, c'est qu'en fait la... En fait, si on veut se réaliser bien sûr, bon, c'est bien de faire une vraie mais en fait la principale difficulté qu'on a, c'est de se comprendre soi-même, et pour se comprendre soi-même, ça paraît idiot *(rires)*, n'est-ce pas ? Et pour se comprendre soi-même, il faut en gros s'auto-analyser, c'est ce qu'a fait Grothendieck et d'une certaine manière, c'est ce qu'a fait Proust aussi dans son livre. Ce sont aussi des gens qui, à partir d'un moment donné, ont arrêté de vivre et ont passé le reste de leur vie à ré-analyser leur vie passée, d'accord, et à la comprendre, etc. Et dans les deux cas, c'est merveilleux, le résultat est merveilleux, d'accord. Donc la meilleure réponse je crois, c'est celle-là, c'est d'aller voir dans *Récoltes et Semailles*, et de le lire, pas de le feuilleter, il faut le lire vraiment, il faut le lire attentivement, vous voyez, comme les passages que je vous ai lus tout à l'heure.

- Merci de préciser : *Récoltes et Semailles*, c'est le livre que Grothendieck a écrit et auquel on a accès depuis peu de temps, finalement...

- Non, pas peu de temps, ça fait très longtemps qu'on y avait accès mais bon, il a écrit d'autres livres. C'est un personnage, tous ces personnages-là ont des vies extraordinaires. Grothendieck a eu une vie extraordinaire parce qu'en gros, en 1970, il a quitté l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques (l'IHES) et il est redevenu, parce que c'était son tempérament fondamental je pense, un peu un paria si vous voulez. Et à partir de 1991, il s'est réfugié dans un village des Pyrénées. Et plus personne n'avait de nouvelle de lui, mais il continuait à travailler, il continuait à écrire. Et alors, il n'a pas seulement écrit *Récoltes et Semailles*, il a aussi écrit un autre texte magnifique, qui s'appelle *La clé des songes*. Et c'est un texte mystique, mais bon alors, je vais dire c'est pareil, je veux dire, c'est pareil... Mais c'est extrêmement intéressant, mais je pense que par exemple, pour des gens qui font de la littérature, ces textes-là ont une valeur infinie. Il y a des thèses à faire là-dessus, il y a 36 choses à faire, bien sûr...

- Alors moi j'avais vu quelque part sur internet je crois, je ne suis pas sûre de mes sources, qu'en fait vous pensiez que les mathématiques existaient sans les hommes en fait, que même ce n'étaient pas une invention faite par les hommes, et j'ai un peu de mal à comprendre ça en fait, parce que souvent, on voit les maths comme quelque chose de très abstrait qui n'existerait pas sans que les hommes les aient inventées, donc, pouvez-vous expliquer ça ?

- Bon, je peux vous donner la réponse. La réponse est très simple. Vous prenez, vous prenez la chimie. C'est un sujet que j'exécrais, moi, lorsque j'étais en maths sup et maths spé, donc vous avez tous ces trucs-là. Alors on a les corps composés puis on a les corps simples. Les corps simples, il y a le tableau périodique des éléments. Le tableau périodique des éléments, incroyable mais vrai, il y a le principe d'exclusion de Pauli, et une toute petite équation, qui vous le donne. Ca me suffit, moi. Pourquoi ? Parce qu'imaginons qu'il y ait un autre système planétaire etc. Si ce sont des êtres intelligents, ils vont comprendre la chimie, qu'il y a des corps simples, ce sera les mêmes, ils n'auront pas... je veux dire ils n'auront pas des corps chimiques, ils n'auront pas des corps simples différents des nôtres, donc ils vont comprendre les corps simples. Et puis, s'ils sont vraiment intelligents, ils vont essayer de trouver, bon, ils auront le tableau périodique des éléments. Ils vont essayer de trouver quelle est l'origine abstraite du tableau périodique des éléments. Ben, s'ils sont vraiment intelligents, ils trouveront la même chose, ils trouveront qu'il y a le principe d'exclusion de Pauli. Et puis, il y a cette petite équation... Qu'est-ce que ça veut dire ? Ca veut dire que, derrière l'apparente, comment dire, arbitraire du monde qui nous entoure, il y a des choses incroyablement simples qui le régissent, la chimie, l'itération puisque les arbres, tout ça, c'est régi par l'itération, et qu'en fait, il y a une manière de comprendre le monde, qui au lieu d'être un chaos, si vous voulez, est quelque chose de beaucoup plus structuré, et qui est structuré par les mathématiques. Et il n'y a aucune raison pour que, bien-sûr, les gens donnent le même nom aux concepts mathématiques qu'ils auront utilisés, mais c'est bien clair qu'ils utiliseront la... , s'ils sont des êtres différents et ils auront 1, 2, 3, 4, 5. Ils ne le diront pas de la même manière, mais ils utiliseront le langage mathématique, ce langage sera en correspondance avec le nôtre, comme le langage des chinois est en correspondance avec le nôtre.

Donc, c'est en ce sens-là, c'est en ce sens absolument fondamental, que je dis que les mathématiques pré-existent, pourquoi ? Parce que ce serait incroyablement prétentieux de dire que nous avons inventé les nombres entiers. Alors à ce moment-là, pourquoi la chimie aurait déjà utilisé ces choses-là pour exister ? Ca paraît complètement débile. Donc en fait, ce que je dis, c'est que, quand on a trouvé, quand Watson et Crick ont trouvé la structure en double hélice de l'ADN, ils ne l'ont pas *inventée*, personne ne va croire qu'ils l'ont *inventée* bien sûr, ils ont *découvert* ça. C'était une réalité, et cette réalité, elle pré-existait à eux. Eh bien, pour les mathématiques, c'est pareil, c'est exactement pareil, c'est-à-dire que nous découvrons, un peu comme un explorateur va découvrir quelque chose. Cet explorateur, il a un libre-arbitre, il peut aller à tel endroit ou à tel autre endroit. C'est ce qui fait croire à des gens qu'en fait, c'est comme l'art. Mais non ! Ce n'est pas de l'art, c'est de l'exploration. Et c'est une exploration d'autant plus... comment dire ? réelle, que cette réalité, elle résiste. Si c'était de l'art, on pourrait faire dire n'importe quoi, et n'importe quoi. Ce n'est pas le cas. Ce n'est pas le cas. Il y a une résistance terrible... Et alors un exemple, un autre exemple typique, c'est que si par exemple, j'écris une équation etc., et puis bon, par exemple, Galois avait dit que les calculs qu'on devait faire pour suivre sa méthode étaient impossibles à faire et à son époque, c'était impossible à faire. Et pour montrer que c'était impossible à faire, quand j'ai donné mon exposé à l'Académie, j'ai expliqué aux gens la méthode de Galois et je leur ai demandé "est-ce que vous pouvez me donner une idée... ?", bon, parce que chaque racine s'exprime comme un polynome en fonction des racines de l'équation auxiliaire. Je leur ai demandé, je leur ai donné une équation comme celle que je vous ai donnée tout à l'heure je leur ai dit "est-ce que vous pouvez me donner l'ordre de grandeur du coefficient d'ordre 0 du polynome qui exprime la première racine ?"... 1 million sur 1 million, ou quelque chose comme ça. Non, la réponse, c'est un nombre à 500 chiffres sur un nombre à 500 chiffres ! L'ordinateur le fait maintenant, et l'ordinateur vérifie que Galois avait raison d'accord ! Alors dire que Galois l'a inventé, je veux dire, c'est un peu gros, quoi ! Non, non, non ! Non, non, non ! On *découvre*, on *découvre*, mais exactement comme il avait fallu le microscope électronique, pour découvrir la structure en double hélice de l'ADN, le mathématicien invente des outils conceptuels pour réussir à percevoir cette réalité. Mais il invente des outils conceptuels bien entendu. Mais c'est une réalité qui est là, elle résiste, elle est complètement tangible et elle régit la nature. Elle est plus fondamentale, pour moi, cette réalité-là est plus fondamentale que la nature qui nous entoure. Elle pré-existe à ça d'accord. Si vous voulez, ce serait même... je pense que ce ne serait pas juste de dire que la nature est seulement écrite dans le langage des mathématiques ; les mathématiques, c'est plus que ça, c'est plus que ça. La nature est consubstantielle des mathématiques. Nous, on ne s'en rend pas compte parce qu'on n'est pas suffisamment intelligent pour se rendre compte de l'explication qui est derrière tous ces phénomènes. Si on s'en rendait compte plus, on le saurait beaucoup mieux. Et c'est d'autant plus vrai avec le quantique. Je veux dire, le quantique, là, c'est flagrant. Le quantique, c'est une réalité qu'on ne perçoit que par les mathématiques, on ne la perçoit absolument pas autrement. C'est-à-dire que les gens qui font des expériences avec le quantique, en optique quantique, ils comprennent ce que c'est que l'espace de Hilbert, ils le touchent comme ça, d'accord, c'est incroyable, ça, ça, c'est vraiment incroyable !

- Merci.

- Vous êtes prêt à répondre encore à quelques questions ?

- Oui, ça va, ça va.

- Pour que l'on ait plus de facilités par exemple avec les notions abstraites, en mathématiques ou en physique, ou même avec les raisonnements, qu'est-ce que vous préconiseriez dans l'éducation et dans l'enseignement, à présent, dans l'école primaire ou même dans le secondaire ?

- Je vais répondre, d'abord pas dans l'école primaire, ni dans le secondaire, je réponds pour vous, parce que c'est le plus utile. Donc pour vous, ce que je préconise, c'est la chose suivante. Pour répondre à une question, même une question de calcul compliquée, vous laissez tout en plan, vous allez faire un tour à pied, d'accord. Et la question, vous la gardez dans la tête, d'accord, vous la gardez dans la tête, et vous réfléchissez. Evidemment, ça peut être différent selon les individus, mais pour moi, c'est le grand secret. C'est-à-dire un calcul, aussi compliqué soit-il, vous pouvez vous dire "Oh ! Jamais je vais y arriver si j'essaie comme ça !" Non ! Vous partez faire un tour à pied, et vous réfléchissez à la structure du truc, et après quand vous reviendrez, bon, vous verrez que ça améliore drôlement les choses.

Bon alors maintenant, dans le primaire, j'en sais rien, moi, tout ce que je peux vous dire, c'est ma propre expérience, parce que je n'en connais pas d'autre. Mais ma propre expérience, c'est quand j'étais gamin, quand j'avais 5 ans, mon père nous imposait de faire des calculs. On était dans le jardin avec lui, il était avec nous, et il nous faisait faire des opérations, et à l'époque, on faisait les quatre opérations, c'est-à-dire on faisait la division, à 5 ans, on faisait la multiplication, on n'avait pas attendu la sixième pour apprendre la division, et tout ça donc, on faisait ça. Et après une autre expérience qui m'est arrivée... Et moi, j'adorais ça, c'était sans doute aussi ma relation avec mon père, il me faisait à la fois peur, mais j'étais content de lui faire plaisir, enfin bon, je ne sais pas, donc je ne sais pas, je ne sais pas comment expliquer ça : je vais dire que je pense qu'il y avait une vertu extraordinaire au fait de faire des opérations comme ça, c'est-à-dire d'apprendre par cœur la table de multiplication et puis, on ne l'oubliait pas la table de multiplication, si on faisait des multiplications et des additions à longueur de journée, on ne l'oubliait pas, on la savait après. Et ça devenait un automatisme absolu. Donc il y avait ça, et moi, ça me plaisait énormément. Une autre histoire que j'ai, c'est qu'une fois, ça, je trouve ça absolument extraordinaire, une fois, j'ai rencontré un ami que je n'avais pas vu, on jouait au foot ensemble, dans le temps, et puis peut-être 8 ou 9 ans après, je prends le TGV pour aller à, je crois que c'était à Rennes ou un truc comme ça, et puis je vais à ma place de TGV et puis, je regardais mon numéro, et je vois quelqu'un à côté qui regardait son numéro et c'était mon copain. On a commencé à discuter etc. Et puis alors, la discussion habituelle, tu as des enfants, il commence à m'expliquer qu'il a un fils, et que son fils est bizarre. Il faut dire que mon copain est littéraire. J'ai dit "pourquoi ?". Bon tu sais, bon d'abord, il avait été malade quand il était petit et puis une fois, quand il avait 5 ans, on était ensemble, on était sur la plage et puis il avait l'air souffreteux ; moi j'étais inquiet, je veux dire pendant une heure, il était là, au lieu d'aller se baigner, il était un peu blanc et puis au bout d'une heure, il vient me voir, donc c'est mon copain qui raconte, il vient me voir, et il me dit : "papa il n'y a pas de plus grand nombre !". Je lui dis "Ecoute, ton fils, il est génial !" *(rires).* Il me dit. "Ah oui, bien sûr !". Je lui ai demandé si son fils avait trouvé une démonstration et il avait trouvé une démonstration, qui n'est pas la démonstration usuelle, c'était pas rajouter 1, c'était multiplier par 2 ou quelque-chose comme ça, peu importe, il avait trouvé une démonstration. C'est incroyable, mais après, il me dit, "tu sais, il a eu des problèmes à l'école" *(francs éclats de rires).* Alors, il m'a raconté ses problèmes à l'école. Alors ça, ça va répondre à votre question pour l'école primaire. C'est qu'à l'école primaire, donc on lui avait posé le problème suivant : c'était "une fleuriste a 120 fleurs, elle fait 4 bouquets de 17 fleurs, combien lui reste-t-il de fleurs ?", d'accord. Alors lui, il avait eu "zéro, n'a pas le sens des opérations". Il était pas con, il lui en reste 120 puisqu'elle ne les a pas données *(rires de tous).* Quand il m'a eu raconté ça, j'ai dit "bah écoute ton fils, c'est un mathématicien". Et alors, on a organisé donc avec son père une rencontre au Tea Caddy à Paris, c'est un endroit charmant. Et son fils à l'époque avait 12 ans. Donc bon, les choses ont évolué, ça fait un certain moment, et maintenant, c'est un grand mathématicien qui est prof à Orsay. Alors incroyable, incroyable, incroyable ! Donc je crois que ce qui compte, c'est ce que dit Grothendieck, c'est de retourner dans cet état d'enfance et de se poser les bonnes questions, et puis de ne pas hésiter à être à contre-courant etc. Surtout je veux dire que le moment où on devient mathématicien, c'est le moment où on est capable de dire au prof qu'il a tort et pourquoi, ça veut dire être capable de résister à son autorité, pour dire qu'on a réfléchi, et qu'on n'est pas d'accord, et puis d'être sûr de soi, parce qu'on a réfléchi par soi-même, c'est hyper-important.

- Non en fait, j'ai une question, même si je pense que vous avez un peu répondu à cette question par vos propos, mais j'aimerais vraiment savoir pour vous quel est le but du travail d'un scientifique, enfin, si vous pensez que c'est plutôt d'augmenter, de faire avancer la connaissance fondamentale, ou de le rendre accessible à son public pour une éventuelle application.

- Il y a ces deux aspects, que l'on ne doit pas mélanger du tout, il y a ces deux aspects. Je pense que la vraie motivation, c'est de faire avancer la connaissance fondamentale. C'est-à-dire qu'en fait, la vraie motivation qui doit être justement indépendante de toute autorité, de tout désir de reconnaissance, etc., la vraie motivation, c'est d'essayer de comprendre, comprendre là où on est, là où on a atterri, d'accord, c'est ça, c'est tout simple à comprendre, c'est là où on est.

- Non mais sur cette question de la vulgarisation des savoirs et en particulier des savoirs mathématiques. A vous entendre, il y a un risque : l'effet papillon en est un. Moi j'allais dire ce que j'avais retenu, par exemple, de l'entropie, ce que les philosophes, ce que certains philosophes peuvent faire de l'entropie, il y a parfois effectivement un grand danger d'une espèce de ... et en même temps, vous semblez dire qu'il y a un besoin. Donc si on vous demandait en gros "comment faire pour éviter le danger et répondre au besoin", est-ce que vous seriez... ?

- Oui, oui, c'est une très bonne question. Il y a eu Sokal, il y a eu Deleuze. Il y a eu Lacan, je ne sais pas si vous savez, mais Lacan a dit dans un séminaire que le nombre $\sqrt{-1}$ est le symbole du sexe mâle, d'accord. C'est ce qu'on appelle le nombre imaginaire pur ! ! *(rires)*. Il fallait le faire quand-même, hein ? ! Et en plus, il a fait une fois un séminaire, où il avait un théorème d'accord, et son théorème, c'était que "Don Juan est compact". Quelqu'un lui avait dit la définition d'un espace compact en mathématiques. Donc ça, évidemment, c'est débile, d'accord, c'est absolument débile. Et qu'est-ce que c'est ? Ce sont des concepts mathématiques mal compris qui sont utilisés comme une autorité psychologique sur les autres, c'est-à-dire qu'ils sont utilisés parce que les gens ne comprendront pas et l'effet papillon en est un exemple flagrant, comme une autorité psychologique parce que les gens quand ils ne comprennent pas, ils sont en position d'infériorité, leur compréhension s'arrête, et si vous voulez, ils sont impressionnés etc. Donc, il y a cette manière terrible d'utiliser les mathématiques, qui est justement d'utiliser de grands mots, comme une espèce de pouvoir psychologique sur les foules. Alors ça, c'est à bannir à tout prix. Par contre, moi ce qui me désole si vous voulez, c'est que des concepts aussi beaux que le concept de topos de Grothendieck, ne soit pas plus connu par des gens qui en auraient besoin parce que comme je vous le dis, nous sommes tous maintenant victimes du scientisme qui consiste à croire qu'une chose est vraie ou fausse alors que dans la réalité, il y a des situations qui sont bien plus subtiles que ça, bien plus subtiles que ça et qui demandent un outil de pensée que la notion de topos donne et c'est une notion qui est délicate, qui est difficile, qui demande, pour la connaître, pour la comprendre, une connaissance mathématique. Donc ce que je dirai si vous voulez, c'est qu'il y a un magnifique boulevard qui est ouvert. Ce boulevard consiste à apprendre suffisamment de mathématiques pour après les utiliser de la bonne manière, dans d'autres domaines, mais il faut d'abord commencer par apprendre suffisamment de mathématiques, c'est ça le prix à payer, c'est absolument nécessaire d'accord.

- Moi c'était justement par rapport à la question de la vérité : à vous entendre, on a l'impression que vraiment les mathématiques, ça permettait d'atteindre cette vérité avec la physique quantique, et je voulais savoir, je crois que c'est Einstein qui disait que "le monde est un peu comme une horloge fermée", on peut juste voir ce qui se passe, mais on ne peut jamais être sûr que ce qu'on trouvera, c'est vrai. Et qu'est-ce que vous en pensez de ça, de l'idée que peut-être que tout ce qu'on explique, ce sont des théories qui sont finalement fausses comme par exemple, Einstein, qui a tout remis en cause dans la physique... ?

- Il y a toujours effectivement la possibilité d'une théorie au-dessus, qui simplifiera ce qui est à l'étage avant etc. Mais on voit quand même qu'on progresse, de ce point de vue-là. Ce que j'essayais de faire passer justement, c'est l'extraordinaire subtilité, la richesse de la nature, de là où on est, quoi. Le fait qu'à chaque fois, on aura des surprises et on aura des surprises extraordinaires. Puisqu'à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, il y avait des physiciens qui disaient qu'on avait tout compris. Et justement, on était avant l'ère quantique, avant tout ça, avant la relativité générale. C'est vrai, parfaitement vrai, ce que vous dites. Mais, j'insisterai plus sur la merveilleuse imagination de la nature, quoi, je veux dire, on est sûrement très, très loin, il y a peut-être des civilisations, il y a sûrement des civilisations, dans d'autres planètes habitées, dans lesquelles les gens ont été beaucoup plus loin que nous. Ca, c'est bien possible et ils nous prendraient pour des primitifs. C'est bien possible, c'est tout à fait possible.

- Vous avez dit que les mathématiques n'étaient pas dans le domaine du connu, et globalement, les sciences. Mais est-ce que vous ne pensez pas que c'est parce que les mathématiciens, les physiciens et autres, ne participent pas assez au débat, par exemple, lors de la définition de programmes scolaires, on entend des philosophes, des historiens...

- Ca, c'est vrai, il y a du vrai là-dedans, il y a du vrai. Mais d'un autre côté, c'est pas tellement le problème. Je ne dirai pas que le problème vient du fait que ce n'est pas assez vulgarisé. Je pense que le problème vient plus de la lenteur de l'absorption par l'ensemble de la société de notions élaborées. Par exemple, je prends un exemple typique, qui pour moi est important. Vous voyez, au moment où l'imprimerie a été découverte, la notion de nombre a été transmissible. C'est-à-dire, il y a eu des bouquins, etc., etc. Maintenant, on en est au point où ce n'est plus le nombre qui est transmissible, mais c'est la notion de fonction, de graphe, etc. Et il y a un vocabulaire qui est passé dans le grand public, par exemple, quand on dit qu'on va inverser la courbe du chômage *(rires)*. Alors ça, ça fait intervenir l'annulation de la dérivée seconde. Si on nous disait "on va faire annuler la dérivée seconde...", il y aurait de quoi se marrer *(rires)*. Bon, enfin, vous voyez un peu le genre... Donc c'est sûr que, si vous voulez, il y a maintenant certaines notions mathématiques, dont la notion de fonction de croissance, de décroissance, de dérivée première, d'annulation de dérivée première, etc. qui sont passées dans le grand public, d'accord, mais il y a des notions beaucoup plus subtiles, comme la notion de topos, comme les notions qui viennent du quantique etc. qui ont plus de mal à passer dans le grand public. Comment les faire passer dans le grand public ? Sans doute par l'éducation, mais à ce moment-là, il faudrait qu'on soit beaucoup plus courageux, dans le système scolaire, c'est évident, c'est absolument évident. Il faudrait qu'on ne soit pas dans le renoncement actuel qui est lamentable. Je sais qu'à mon époque, bon je veux dire, qu'on n'arrêtait pas, moi, je n'arrêtais pas et mes copains n'arrêtaient pas, de faire des problèmes de géométrie. On rentrait chez nous, et on faisait des problèmes, et c'étaient pas du tout des problèmes faciles. Et maintenant, c'est fini ! Maintenant, on apprend des recettes, on apprend à appliquer des recettes ; bien sûr, c'est beaucoup plus facile pour un prof. Un jour, quand vous aurez des enfants, vous vous apercevrez d'une chose qui est absolument fondamentale, c'est que quand vous avez un petit enfant, vous avez le choix. Le petit enfant, il essaie de faire quelque chose, vous avez deux possibilités : la première possibilité, c'est de faire cette chose pour lui, vous croyez que vous l'aidez, en fait, vous ne l'aidez pas du tout, vous lui nuisez, en faisant ça ; la deuxième chose, c'est d'être patient, et d'attendre qu'il y arrive par lui-même. Et là, vous faites quelque chose de vraiment utile, d'accord. Donc bon, dans ce qu'on fait dans le système scolaire actuel, qui est d'apprendre des recettes toute faites pour résoudre des problèmes tout faits, ça consiste à faire les choses à la place de l'enfant. C'est exactement ça qu'on fait, c'est exactement ce truc-là. Alors que la vraie découverte du travail, la vraie découverte de l'école, elle doit se faire entre 11 et 12 ans. Et elle doit se faire en séchant devant des problèmes dont on ne nous donne pas la solution, mais dont on vous demande de la trouver, d'accord, où l'on vous demande de sécher. Et à partir du moment où à cet âge-là, on a compris ce qu'est le vrai travail, ça va, ça va, c'est OK. Et ça, ce n'est pas le cas dans le système scolaire actuel. Bien sûr, loin de là, terriblement. Bien sûr. Il y a Laurent Lafforgue qui a essayé, et de toutes ses forces, d'aller dans ce sens-là, bon, il y a dépensé énormément d'énergie ; dire qu'il y est arrivé, ce ne serait pas vrai, je vais dire, en tout cas, il y a des gens qui ont fait un effort colossal pour aller dans le bon sens, maintenant après, il y a une résistance terrible du système.