Compléments fournis par Pierre de la Harpe concernant l'expression du logarithme comme une série

On lira à profit cet article du site Images des mathématiques : https://images.math.cnrs.fr/wp-content/uploads/2025/03/2025_DE-LA-HARPE_nombre-Euler_A4.pdf.

La fonction logarithme naturel s'exprime par la série de Mercator :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k. \tag{1}$$

Cette série converge absolument lorsque $|x| < 1$ ainsi que pour $x = 1$.

Euler fournit une meilleure approximation dans la section 121 de l'*Introductio in analysin infinitorum*, volume 1, dont voici le texte latin :

> *Quoniam igitur est* $l(1+x) = \frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \&\text{c.}\right)$ *erit, posito* x *negativo,* $l(1-x) = -\frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \&\text{c.}\right)$. *Subtrahatur series posterior a priori, erit* $l(1+x) - l(1-x) = l\frac{1+x}{1-x} = \frac{2}{k} \times \left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \&\text{c.}\right)$. *Nunc ponatur* $\frac{1+x}{1-x} = a$, *ut fit* $x = \frac{a-1}{a+1}$, *ob* $la = 1$ *erit* $k = 2\left(\frac{a-1}{a+1} + \frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3} + \frac{(a-1)^5}{5(a+1)^5} + \&\text{c.}\right)$, *ex qua æquatione valor numeri* k *ex basi* a *inveneri poterit. Si ergo basis* a *ponatur* $= 10$, *erit* $k = 2\left(\frac{9}{11} + \frac{9^3}{3 \cdot 11^3} + \frac{9^5}{5 \cdot 11^5} + \frac{9^7}{7 \cdot 11^7} + \&\text{c.}\right)$, *cujus seriei termini sensibiliter decrescunt, ideoque mox valorem pro* k *satis propinquum exhibent.*

On a ainsi une meilleure approximation du logarithme népérien par la formule :

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \ldots\right). \tag{2}$$

Pierre de la Harpe réécrit la formule que j'ai obtenue par une méthode uniquement syntaxique (i.e. sans la démontrer : à partir de l'expression en série de l'exponentielle que fournissait Galois dans un petit encart, en utilisant le fait que exp et log sont des fonctions réciproques et en traversant les flèches de l'antécédent vers l'image de chacune des fonctions intermédiaires intervenant dans la formule de Galois dans leur sens inverse), formule qui était :

$$\ln x = \lim_{n\to\infty} \left((-1) + (x^{\frac{1}{n}})\right) \times n, \tag{3}$$

en

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\left((1+x)^{1/n}-1\right)\right)=\ln(1+x) \quad \text{pour} \quad |x|<1. \tag{4}$$

En appliquant la formule du binôme, on a

$$(1+x)^{1/n}=1+\frac{1}{n}x+\frac{\frac{1}{n}(\frac{1}{n}-1)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{n}(\frac{1}{n}-1)(\frac{1}{n}-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{\frac{1}{n}(\frac{1}{n}-1)\ldots(\frac{1}{n}-k+1)}{k!}x^k+\ldots$$

et donc

$$n\left((1+x)^{1/n}-1\right)=x-\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}x^2+\frac{(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})}{3!}x^3\mp\ldots+(-1)^{k+1}\frac{(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})\ldots(k-1-\frac{1}{n})}{k!}x^k+\ldots.$$

Si la limite du terme de gauche est bien la somme des limites des termes de droite, on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(n\left((1+x)^{1/n}-1\right)\right) &= x-\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}x^2+\lim_{n\to\infty}\frac{(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})}{3!}x^3\mp\ldots\\ &\quad +(-1)^{k+1}\lim_{n\to\infty}\frac{(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})\ldots(k-1-\frac{1}{n})}{k!}x^k+\ldots\\ &= x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\mp\ldots+(-1)^{k+1}\frac{1}{k}x^k+\ldots.\end{aligned}$$

On a donc bien (4).

Pierre de la Harpe fournit deux autres manières d'écrire $\ln x$ comme une limite telles que :

$$\forall x>0, \ln x=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^\varepsilon-1}{\varepsilon}$$

ou

$$\ln x=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}(x-1)^k\right).$$

On aimerait connaître une référence dans la littérature pour la formule :

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\left((1+x)^{1/n}-1\right)\right)=\ln(1+x) \quad \text{pour} \quad |x|<1.$$

ainsi que pour la formule

$$\ln x=\lim_{n\to\infty}\left((-1)+\left(x^{\frac{1}{n}}\right)\right)\times n,$$

à mettre en regard de la formule

$$\exp x=\lim_{n\to\infty}\left((+1)+\left(x\times\frac{1}{n}\right)\right)^n.$$