Un extrait de l'article d'Emil L. Post : Une théorie générale des propositions élémentaires

Systèmes de vérité m-valués.

11. Le système généralisé $(\sim, \vee)$. - Nous avons vu que la généralisation des tables de vérité, au moins par rapport aux systèmes complets, est incluse dans le développement des postulats. Nous montrons maintenant que ce dernier est plus général en présentant une nouvelle classe de systèmes, distincts des systèmes à 2 valeurs de la logique symbolique, qui peuvent être engendrés par un ensemble complètement fermé de postulats.

Dans ces systèmes, au lieu des deux valeurs de vérité $+, -$, on a m valeurs de vérité distinctes $t_1, t_2, \ldots, t_m$, où m est n'importe quel entier positif. Une fonction d'ordre n aura m^n configurations dans sa table de vérité, c'est-à-dire qu'il y aura m^{m^n} tables de vérité d'ordre n. En appelant système complet un système qui a toutes les tables possibles, nous montrons maintenant que les deux tables ci-dessous engendrent un système complet.

p	$\sim_m p$	p, q	$p \vee_m q$	
t_1	t_2	$t_1 t_1$	t_1	
t_2	t_3	$\ldots$	$\ldots$	
$\ldots$	$\ldots$	$t_{i_1} t_{j_1}$	t_{i_1}	$i_1 \leq j_1$
t_m	t_1	$\ldots$	$\ldots$	
		$t_{i_2} t_{j_2}$	t_{j_2}	$i_2 \geq j_2$
		$\ldots$	$\ldots$	
		$t_m t_n$	t_m	

Nous voyons que $\sim_m p$, la généralisation de $\sim p$ permute les valeurs de vérité de façon cyclique, alors que $p \vee_m q$, la généralisation de $p \vee q$ a la plus grande des deux valeurs de vérité [1].

Pour construire une fonction pour toute table du premier ordre, qui sont au nombre de m^m, notons que

$$'t_1(p). = .p\vee \sim_m p.\vee_m \sim_m^2 p : \vee_m \ldots \sim_m^{m-1} p \quad Df,$$

où $\sim^2 p. = . \sim\sim p \quad Df$, etc., a toutes ses valeurs de vérité t_1. Alors

$$\tau_{m_1}(p). = . \sim_m^{m-1} (\sim_m t_1(p). \vee_m .p) : \vee_m. \sim_m^{m_1} p) \quad Df$$

American Journal of Mathematics, vol. 43, n°3, juillet 1921, p.180 à 182

1. La plus grande valeur de vérité a le plus petit indice.

a toutes les valeurs t_m exceptée la première qui est t_{m_1}. Toute table du premier ordre

p	$f(p)$
t_1	t_{m_1}
t_2	t_{m_2}
$\dots$	$\dots$
t_m	t_{m_m}

peut alors être construite par la fonction

$$\tau_{m_1}(p). \vee_m .\tau_{m_2}(\sim_m^{m-1} p) : \vee_m.\tau_{m_3}(\sim_m^{m-2} p) : . \vee_m \dots \tau_{m_m}(\sim_m p).$$

Construisons maintenant une fonction pour la table

p	$\overline{\sim}_m\, p$
t_1	t_m
t_2	t_{m-1}
$\dots$	$\dots$
t_m	t_1

et définissons $p ._m q. = . \overline{\sim}_m\ (\overline{\sim}_m\ p. \vee . \overline{\sim}_m\ q)\quad Df$ qui est la généralisation de $p.q$ et qui a la plus basse des deux valeurs de vérité de ses arguments. Nous pouvons maintenant construire une table dont toutes les valeurs sont les t_m excepté pour une configuration $t_{m_1}, t_{m_2}, \dots, t_{m_n}$ quand elle vaut $t_{m_{m_1 m_2 \dots m_n}} = t_\mu$ par la fonction

$$\tau_\mu(\sim_m^{m-m_1+1} p_1) ._m \tau_\mu(\sim_m^{m-m_2+1} p_2) ._m \dots \tau_\mu(\sim_m^{m-m_n+1} p_n),$$

et ainsi n'importe quelle table en construisant une telle fonction pour toute configuration et en “sommant” par $\vee_m$.

12. Classification de fonctions - Analogie de l'espace de dimension m

La généralisation de la classification des fonctions en positive, négative et mixte est permise par le théorème suivant :

Théorème. *Une fonction contient au moins une fonction pour toute table de vérité dont les valeurs sont contenues parmi les valeurs de la table donnée.*

Soient $t_{m_1} \dots t_{m_\mu}$, les valeurs de vérité qui apparaissent dans la table d'une fonction donnée $f(p1, p_2, \dots p_n)$. Alors nous pouvons sélectionner μ configurations qui ont respectivement ces valeurs. Construisons des fonctions $\phi_i(p)$ telles que quand p a la valeur t_{m_j} de l'une de ces configurations, $\phi_i(p)$ a la valeur de p_i dans cette configuration. Il est alors facile de voir que $f(\phi_1(p), \ldots, \phi_n(p))$ a la valeur t_{m_j} à chaque fois que p a la valeur t_{m_j}. Si alors $\psi(q_1, q_2, \ldots, q_l)$ a une table dont les valeurs sont parmi les t_{m_j}, $f(\phi_1(\psi), \ldots, \phi_n(\psi))$ sera une fonction contenue dans la fonction donnée avec cette table.

Nous sommes alors amenés à une classification des fonctions au moyen de leurs tables de vérité de telle manière que l'ensemble des tables contenues dans une fonction donnée est la même pour toutes les fonctions dans une classe donnée. Nous avons alors m classes de fonctions à une seule valeur de vérité, $[m(m-1)]/2!$ avec deux valeurs de vérité, $[m(m-1)\ldots(m-\mu+1)/\mu$ avec μ valeurs de vérité, $\ldots$, une classe avec toutes les m valeurs de vérité. Nous avons ainsi $2^m - 1$ classes de fonctions qui lorsque $m = 2$ se réduisent aux trois classes de fonctions positives, négatives et mixtes.

Ces formules suggèrent une analogie qui, si elle est bien fondée, est d'un grand intérêt. Dans ce but, remplaçons l'ensemble des fonctions ayant un ensemble donné de μ valeurs de vérité par toutes les fonctions dont les valeurs sont parmi ces μ valeurs. Si alors nous comparons les fonctions de notre système complet à un espace à m dimensions[2], les m classes de fonctions à une seule valeur de vérité correspondront aux m axes de coordonnées, les $[m(m-1)]/2!$ classes de fonctions avec pas plus de deux valeurs de vérité aux $[m(m-1)]/2!$ plans de coordonnées, etc., de telle façon qu'excepté en l'absence d'origine, toutes les propriétés de détermination et d'intersection dans les configurations de coordonnées passeront. Si alors nous appelons notre système "espace de vérité à m dimensions", nous observons la différence suivante, qui est qu'alors qu'intuitivement, l'espace de points de la dimension la plus grande est 3, l'espace propositionnel intuitif de plus grande dimension est de dimension 2. Mais de la même façon que nous pouvons interpréter les espaces géométriques de plus grandes dimensions en utilisant d'autres éléments que les points, nous interprèterons plus tard les espaces de plus grandes dimensions de notre logique en prenant un autre élément que la proposition.

2. ou bien on peut prendre la table de vérité comme élément auquel cas le système est peut-être plus lisse que précédemment.