

CHAPITRE IX
EULER
L'analyse incarnée

L'histoire montre que ces chefs d'empire qui ont encouragé la culture des mathématiques, la source commune de toutes les sciences exactes, sont aussi ceux dont les règnes ont été les plus brillants et dont la gloire est la plus durable.

MICHEL CHASLES.

“Euler calculait sans effort apparent, comme les hommes respirent, comme les aigles planent dans le vent”, a dit Arago ; ce n'est pas là une exagération quand on songe à la facilité incomparable qu'avait Léonard Euler (1707-1783) pour les mathématiques ; ce fut le mathématicien le plus prolifique de l'histoire : ses contemporains l'ont appelé “l'analyse incarnée”. Euler a écrit ses fameux mémoires aussi aisément qu'un écrivain à la plume facile rédige une lettre à un ami intime. La cécité totale qui l'affligea pendant ses dix-sept dernières années ne ralentit pas sa fécondité sans pareille ; au contraire, la perte de la vue aiguïsa ses perceptions dans le monde interne de son imagination.

On ne connaît pas encore de nos jours l'étendue de l'œuvre d'Euler, mais on a estimé qu'il faudrait soixante à quatre-vingts volumes in-quarto pour recueillir la totalité de ses œuvres. En 1909, l'Association Helvétique pour les Sciences Naturelles entreprit de rassembler et de publier les mémoires épars d'Euler, grâce à l'appui financier de plusieurs personnalités et sociétés scientifiques du monde entier, prétendant avec raison qu'Euler appartient au monde civilisé et non pas seulement à la Suisse. Les évaluations attentives de la dépense probable pour ce travail (environ 400 000 francs-or) ont été dépassées, lorsqu'on eut découvert à Léninegrad une quantité insoupçonnée de manuscrits d'Euler.

La carrière mathématique d'Euler a débuté l'année de la mort de Newton. On n'aurait pu choisir une époque plus propice pour l'essor d'un génie de cette envergure : la géométrie analytique, rendue publique en 1637, était appliquée depuis quatre-vingt dix ans, le calcul différentiel et intégral depuis environ cinquante ans, et la loi de la gravitation universelle de Newton, la clef de l'astronomie physique, avait été présentée au monde mathématique depuis quarante ans. Dans chacun de ces domaines, on avait résolu un très grand nombre de problèmes isolés, avec, de-ci de-là, des essais remarquables d'unification, mais nul n'avait encore entrepris d'aborder systématiquement l'ensemble des mathématiques, pures et appliquées, telles qu'elles existaient à cette époque. En particulier, les méthodes analytiques fécondes de Descartes, Newton et Leibniz n'avaient pas été poussées jusqu'à la limite dont elles sont susceptibles spécialement en mécanique et en géométrie.

À un niveau en dessous, l'algèbre et la trigonométrie étaient alors en voie de systématisation et d'extension, la seconde surtout était mûre pour l'achèvement essentiel. Dans le domaine de l'analyse

Référence :

<https://www.bibliotheque.nat.tn/KHNU/doc/SYRACUSE/90812/e-t-bell-les-grands-mathematiciens-zenon-eudox-archimede-descartes-kummer-et-dedekind-poncare-cantor?lg=fr> = *fr - FR*.

Transcription : Denise Vella-Chemla, août 2023.

diophantienne de Fermat et des propriétés des nombres entiers ordinaires, une perfection temporaire de cette nature n'était pas possible (et elle ne l'est pas encore) ; mais ici aussi Euler se montra un maître. En fait, un des traits les plus remarquables du génie universel d'Euler fut sa puissance égale dans les deux domaines principaux des mathématiques, le continu et le discret.

Comme algorithme, Euler n'a jamais été dépassé et probablement même jamais approché de près, sauf peut-être par Jacobi ; on appelle algorithme le mathématicien qui imagine des "algorithmes" pour la solution de problèmes d'espèces spéciales. En voici un exemple simple : supposons (ou démontrons) que tout nombre positif réel a une racine carrée réelle ; comment calculer cette racine ? Il y a plusieurs manières connues ; un algorithme imagine des méthodes praticables. Ou encore, dans l'analyse diophantienne, comme dans le calcul intégral, la solution d'un problème ne peut pas apparaître tant qu'on n'a pas procédé à quelque substitution ingénieuse (souvent simple) d'une ou plusieurs variables par des fonctions d'autres variables ; un algorithme est un mathématicien à qui de pareils artifices ingénieux viennent naturellement à l'esprit. Il n'y a pas d'ailleurs de procédé uniforme : l'algorithme, comme le poète, naît tel, mais ne le devient pas.

Il est de mode aujourd'hui de mépriser l'algorithme pur : cependant, lorsqu'un Ramanujan surgit subitement on ne sait d'où, des analystes distingués le saluent comme un don du ciel ; son intuition tout sauf surnaturelle, de formules apparemment sans aucun lien entre elles révèle des voies cachées conduisant d'un territoire à un autre, et la tâche de l'analyste est d'éclairer ces voies nouvelles. L'algorithme est un formaliste qui aime les belles formules pour elles-mêmes.

Avant d'aborder la paisible mais intéressante existence d'Euler, il nous faut citer deux caractéristiques de son temps qui ont favorisé sa prodigieuse activité et contribué à la diriger.

Au XVIII^e siècle, les universités d'Europe n'étaient pas les centres principaux des recherches ; elles auraient pu le devenir plus vite qu'elles ne l'ont fait sans la tradition classique et sans leur hostilité à l'égard de la science, qui peut s'expliquer. Les mathématiques avaient des contacts assez étroits avec l'antiquité pour être respectables, mais la physique, étant plus récente, était suspecte. En outre, dans une université de l'époque, on attendait d'un mathématicien qu'il appliquât ses efforts surtout à l'enseignement élémentaire ; ses travaux de recherche, s'il en exécutait, étaient considérés comme un luxe sans profit, absolument comme dans l'enseignement supérieur américain de nos jours.

Les membres des universités pouvaient certes fort bien se livrer à des travaux de leur choix, mais bien peu se décidaient à faire un choix, et ce qu'ils faisaient, ou manquaient de faire, n'affectait pas leurs moyens d'existence. Sous un pareil régime d'indifférence ou d'hostilité ouverte, il n'y avait aucune raison pour que les universités prissent la direction d'un mouvement scientifique et, effectivement, elles n'en dirigèrent aucun.

Cette direction était assumée par les diverses Académies Royales soutenues par des souverains généreux, à l'esprit largement ouvert au progrès. Les mathématiques ont une dette impossible à acquitter envers Frédéric le Grand de Prusse et la Grande Catherine de Russie : ce sont eux qui ont rendu possible tout un siècle de progrès mathématiques au cours d'une des périodes les plus actives de l'histoire des sciences. Dans le cas d'Euler, Berlin et Saint-Pétersbourg ont fourni le nerf

de la création mathématique. C'est l'ambition effrénée de Leibniz qui a été l'inspiratrice de ces deux foyers de production créatrice ; les Académies dont Leibniz avait établi les plans ont procuré à Euler l'occasion d'être le mathématicien le plus prolifique de tous les temps ; ainsi, en un certain sens, Euler a été le petit-fils de Leibniz.

L'Académie de Berlin dépérissait lentement depuis quarante ans lorsqu'Euler, à l'instigation de Frédéric le Grand, lui rendit la vie et l'Académie de Saint-Pétersbourg, que Pierre le Grand n'avait pas réussi à organiser selon les vues de Leibniz, fut fondée par son successeur sur des bases solides.

Ces académies ne ressemblaient pas à celles de nos jours, dont la mission principale est de décerner des fonctions de membre en reconnaissance de travaux bons et bien faits ; au XVII^e siècle, elles étaient des organismes de recherches qui payaient leurs membres marquants pour exécuter des recherches scientifiques ; les traitements et indemnités étaient suffisants pour assurer au savant et à sa famille une existence confortable. La maison d'Euler ne compta pas moins, un moment, de dix-huit personnes ; néanmoins il avait de quoi soutenir ce train. Un autre côté attrayant de la vie d'un académicien au XVIII^e me siècle, c'est que ses enfants, pour peu qu'ils en fussent dignes, étaient assurés d'entrer dans de bonnes conditions dans la vie.

Et nous arrivons à la deuxième influence qui exerça une action prédominante sur le rendement mathématique d'Euler. Les souverains qui payaient avaient, bien entendu, besoin de quelque chose de plus que la culture abstraite ; mais il faut souligner que lorsqu'ils avaient obtenu un profit raisonnable en retour de leurs capitaux, ils n'exigeaient pas que leurs subordonnés consacrent le reste de leur temps à un labeur "productif" ; Euler, Lagrange et les autres furent libres de faire ce qui leur plaisait ; on n'exerçait pas sur eux la moindre pression pour en exprimer des résultats immédiatement applicables dans la pratique et que l'État pût utiliser. Dans cette génération, les dirigeants des académies, plus sages que bien des directeurs de nos Instituts de Recherches d'aujourd'hui, suggéraient simplement, à l'occasion, ce qu'ils jugeaient utile, et laissaient la science suivre son cours. Ils semblent avoir senti instinctivement que la recherche dite "pure" donne souvent, sous forme de sous-produits, les résultats immédiatement applicables que l'on désire, si de temps à autre on donne quelque suggestion.

Ce tableau général comporte cependant une exception, qui ne confirme ni n'infirme la règle. Il est arrivé que, du temps d'Euler, le problème capital, dans les recherches mathématiques, coïncidât par hasard avec ce qui était probablement le premier problème pratique de l'époque, la souveraineté des mers. Ce serait la nation dont la technique en navigation surpasserait celle des pays rivaux qui dominerait inévitablement les ondes ; mais, en dernier ressort, la navigation est une question de détermination exacte d'une position en mer à des centaines de lieues de la côte, et il s'agit de le faire mieux que les concurrents sous peine de se trouver en infériorité sur le théâtre d'un combat naval. La Grande Bretagne, comme chacun sait, possède la souveraineté des mers ; elle le doit, dans une large mesure, aux applications pratiques que ses navigateurs ont été capables de déduire des recherches purement mathématiques en mécanique céleste au XVI^e siècle. Une de ces applications a intéressé directement Euler. Le fondateur de la navigation moderne est naturellement Newton, bien que personnellement il ne se soit jamais creusé la tête à ce sujet et qu'il n'ait jamais, autant que nous le sachions, mis les pieds sur le pont d'un navire. La position en mer est déterminée par des observations des corps célestes ; après que la loi de Newton eut suggéré qu'avec une patience

suffisante on peut calculer la position des planètes et les phases de la lune un siècle d'avance si c'est nécessaire, ceux qui voulaient dominer les mers ont mis leurs calculateurs à dresser des tables des positions futures des astres.

Dans une entreprise pratique de ce genre, la lune présente un problème délicat, celui de trois corps s'attirant l'un l'autre selon la loi de Newton. Ce problème se représentera plusieurs fois au fur et à mesure que nous avancerons ; Euler fut le premier à développer une solution calculable du problème de la lune ("la théorie lunaire") ; les trois corps en question sont la lune, la terre, et le soleil. Bien que nous devions reporter aux chapitres suivants le peu qu'il y a à dire ici sur ce problème, notons qu'il est un des plus difficiles de toutes les mathématiques. Euler ne l'a pas résolu, mais sa méthode de calcul approximatif (remplacée aujourd'hui par de meilleures) était suffisamment pratique, puisqu'elle permit à un calculateur anglais d'établir les tables des mouvements lunaires pour l'Amirauté anglaise : le calculateur reçut pour son travail 5 000 livres (c'était une somme à cette époque !) et Euler un cadeau de 300 livres.

Léonard Euler, fils de Paul Euler et de sa femme Marguerite Brucker, est probablement le plus grand homme de science que la Suisse ait jamais produit. Il était né à Bâle le 15 avril 1707, mais dès l'année suivante il partit avec ses parents pour le village voisin de Riehen, où son père devint le pasteur calviniste du lieu. Paul Euler était lui-même un mathématicien accompli il avait été l'élève de Jacques Bernoulli ; il destinait Léonard à marcher sur ses traces et à lui succéder à l'église du village, mais heureusement il commit l'erreur d'enseigner à l'enfant les mathématiques.

Le jeune Euler sut de bonne heure ce qu'il voulait faire ; néanmoins il se soumit aux désirs de son père et en entrant à l'Université de Bâle il étudia la théologie et l'hébreu. En mathématiques, il attira bientôt l'attention de Jean Bernoulli, qui lui donna gracieusement une leçon par semaine ; Euler passait le reste de la semaine à préparer la leçon suivante de manière à pouvoir aborder son professeur en lui posant le moins de questions possible. Bientôt son application et ses capacités notoires furent remarquées par Daniel et Nicolas Bernoulli, qui devinrent rapidement ses amis.

Léonard eut la permission de se distraire jusqu'au moment où il obtint son brevet de professeur en 1724, à l'âge de dix-sept ans. alors que son père insistait pour qu'il abandonnât les mathématiques et consacraât tout son temps à la théologie ; mais Paul Euler céda lorsque les Bernoulli lui déclarèrent que son fils était destiné à devenir un grand mathématicien et non pas pasteur de Riehen. Bien que la prophétie se trouvât réalisée, l'éducation religieuse première d'Euler exerça son influence sur toute son existence et il ne s'écarta jamais le moins du monde de sa foi calviniste : il présidait aux prières en commun de toute sa maisonnée et les terminait habituellement par un sermon.

Euler fit son premier travail indépendant à dix-neuf ans. On a dit que ce premier effort révélait à la fois la force et la faiblesse de ses travaux postérieurs. L'Académie des Sciences de Paris avait proposé comme concours pour l'année 1727 le problème du mâtage des navires ; le mémoire d'Euler n'obtint pas le prix mais reçut une mention honorable ; il se rattrapa plus tard en remportant le prix douze fois. Le mérite du travail était l'analyse (mathématique technique) qu'il contenait, sa faiblesse l'absence de toute considération d'ordre pratique : ceci n'est pas très surprenant si nous nous rappelons les plaisanteries traditionnelles sur la marine helvétique ; Euler pouvait avoir vu quelques bateaux sur les lacs suisses, il n'avait pas encore vu de grand navire. On lui a reproché,

parfois à juste titre, d'avoir laissé les mathématiques lui enlever son sens de la réalité : l'univers physique était pour Euler une occasion de faire des mathématiques, mais avait rarement pour lui un intérêt propre, et si l'univers ne s'accordait pas avec ses calculs, c'était l'univers qui avait tort.

Se rendant compte qu'il était né mathématicien, Euler demanda une chaire à Bâle ; ne l'obtenant pas, il continua ses études, soutenu par l'espoir de rejoindre Daniel et Nicolas Bernoulli à Saint-Pétersbourg : ceux-ci lui avaient généreusement offert de lui trouver une place à l'Académie et ne l'oubliaient pas. À cette époque de sa vie. Euler paraît avoir été singulièrement indifférent à l'égard de ce qu'il ferait, pourvu que ce fût quelque chose de scientifique. Lorsqu'un Bernoulli lui écrivit qu'il y avait un espoir pour une chaire à la section de médecine, Euler se mit à faire de la physiologie à Bâle et à suivre les cours de médecine. Mais il ne lâchait pas pour cela les mathématiques : la physiologie de l'oreille lui suggéra des recherches mathématiques sur le son, qui à leur tour le conduisirent à d'autres études concernant la propagation des ondes, et ainsi de suite ; et ce travail de jeunesse ne cessa de ramifier pendant toute la carrière d'Euler.

Les Bernoulli ne perdaient pas de temps : Euler fut appelé à Saint-Pétersbourg en 1727, officiellement, comme adjoint à la section de médecine de l'Académie. Par une sage précaution, tout membre étranger devait prendre avec lui deux élèves.

La joie d'Euler fut vite troublée ; le jour même de son arrivée en Russie, l'impératrice Catherine, d'idées libérales, décédait. Catherine, maîtresse de Pierre le Grand avant de devenir son épouse, semble avoir été une femme aux idées larges dans plus d'un domaine ; au cours de son règne de deux années seulement, elle réalisa le désir de Pierre de fonder l'Académie. A la mort de Catherine, le pouvoir passa entre les mains d'une faction qui, durant la courte minorité du tsarevitch (il mourut, peut-être heureusement pour lui, avant d'avoir régné) gouverna avec une brutalité extraordinaire. Ces nouveaux maîtres de la Russie considéraient l'Académie comme un luxe inutile et pendant quelques mois songèrent à la supprimer et à renvoyer tous les membres étrangers chez eux. Telle était la situation lorsqu'Euler arriva à Saint-Pétersbourg ; au milieu de la confusion générale, on ne parla plus des fonctions à la section de médecine et il passa à la section des mathématiques ; un moment, de désespoir, il avait presque accepté un poste de lieutenant dans la marine.

Les choses se rétablirent peu à peu et Euler se mit au travail ; pendant six ans, il resta le nez sur ses calculs, non pas parce que les mathématiques l'absorbaient entièrement, mais parce qu'il n'osait pas se mêler à la vie sociale par crainte des espions qui pullulaient.

En 1733, Daniel Bernoulli regagna la libre Helvétie, écoeuré de la sainte Russie, et Euler, alors âgé de vingt-six ans, prit la direction de l'enseignement mathématique à l'Académie. Présentant qu'il était fixé à Saint-Pétersbourg pour le reste de sa vie, il épousa une fille du peintre Gsell, que Pierre le Grand avait emmené en Russie avec lui. Cependant, les conditions politiques empiraient, et Euler songeait plus que jamais à s'échapper ; mais la venue successive de plusieurs enfants le liait de plus en plus sur place et il se réfugiait et se consolait dans son labeur incessant. Certains biographes attribuent la fécondité sans égale d'Euler à son premier séjour en Russie ; il est évident que la plus élémentaire prudence l'obligeait à s'occuper exclusivement de son travail.

Euler compte parmi les grands mathématiciens qui pouvaient travailler n'importe où dans n'importe

quelles conditions. Il était fou des enfants (il en a eu treize, dont huit moururent tout jeunes), et il écrivait souvent ses mémoires avec un bébé sur ses genoux pendant que les autres jouaient autour de lui. La facilité avec laquelle il écrivait sur les sujets de mathématiques les plus difficiles est inimaginable.

On a bâti plusieurs légendes sur sa facilité extraordinaire. On a dit qu'il écrivait un rapport mathématique dans la demi-heure entre le premier et le deuxième coup de cloche du repas. Dès qu'un mémoire était terminé, il le posait sur le dessus du tas qui attendait l'imprimeur ; lorsqu'on avait besoin de copie pour les volumes de Rapports de l'Académie, ce dernier prenait les feuilles du dessus de la pile ; et c'est ainsi que les mémoires furent souvent publiés en sens inverse de leur ordre de rédaction ; comme Euler avait l'habitude de revenir à plusieurs reprises sur un sujet pour l'éclaircir ou le compléter, il arrive qu'on regarde une série de mémoires sur un sujet donné, souvent par le gros bout de la lunette.

À la mort du tsarevitch, en 1730, Anna Ivanovna, nièce de Pierre le Grand, devint impératrice et, en ce qui concerne l'Académie, les choses s'améliorèrent considérablement ; mais sous le gouvernement indirect d'Ernest Jean de Biron, amant de la tsarine, la Russie traversa une période des plus sanglantes de son histoire et Euler se confina dans ses travaux silencieux pendant dix ans. Vers la moitié de cette période, il subit son premier grand malheur ; il s'était mis à concourir pour le prix de l'Académie des Sciences de Paris ; il s'agissait d'un problème d'astronomie pour lequel certains mathématiciens éminents avaient demandé trois mois (comme nous traiterons d'un problème analogue à propos de Gauss, nous n'en parlons pas ici). Euler le résolut en trois jours. Mais cet effort extraordinaire lui valut une maladie au cours de laquelle il perdit l'œil droit.

Observons que la grande critique moderne, qui s'est attachée à discréditer toutes les anecdotes intéressantes dans l'histoire des mathématiques, a montré que le problème d'astronomie n'était en rien responsable de la perte d'un œil d'Euler. Mais c'est un mystère dont on pourrait proposer la solution à l'esprit de David Hume, contemporain d'Euler, que de savoir comment les critiques érudits, et les autres, connaissent si bien la loi de la cause et de l'effet.

Sous cette réserve, nous raconterons une fois de plus la fameuse histoire d'Euler et du philosophe athée (ou peut-être seulement panthéiste) Denis Diderot (1713-1784). Nous violons ici l'ordre chronologique, car l'histoire date du second séjour d'Euler en Russie. Invité par la grande Catherine à visiter sa cour, Diderot consacrait ses loisirs à essayer de convertir les courtisans à l'athéisme ; avertie, l'impératrice chargea Euler de museler ce philosophe vain. C'était une mission facile, car les mathématiques étaient de l'hébreu pour Diderot. De Morgan nous raconte (Sac de paradoxes, 1872) ce qui se passa : Diderot fut avisé qu'un mathématicien de talent possédait une démonstration algébrique de l'existence de Dieu et l'exposerait devant toute la Cour, s'il désirait l'entendre : Diderot accepta avec plaisir. Euler s'avança vers Diderot et lui dit gravement, sur un ton de parfaite conviction :

“Monsieur, $\frac{a + b^n}{x} = n$, donc Dieu existe : répondez !”

Cela avait l'air d'être sensé, aux oreilles de Diderot. Humilié du fou rire qui salua son silence embarrassé, le pauvre philosophe demanda à Catherine la permission de retourner en France, ce

qu'elle lui accorda de bon cœur.

Mais, non content de son succès, Euler, avec le plus grand sérieux, se mit à orner son bouquet de démonstrations solennelles de l'existence de Dieu et de l'immatérialité de l'âme. On dit que les deux démonstrations furent publiées dans les traités de théologie de l'époque ; ce sont probablement les fleurs de choix du côté mathématiquement peu pratique de son génie.

Toute l'activité d'Euler pendant son séjour en Russie ne fut pas absorbée par les mathématiques. Toutes les fois que le Gouvernement lui demandait d'appliquer ses capacités mathématiques à des problèmes pas trop distants de ce domaine, il s'empressait de satisfaire ce désir ; c'est ainsi qu'il écrivit les manuels de mathématiques élémentaires pour les écoles russes, qu'il révisa le département de géographie du Gouvernement, qu'il collabora à la réforme des poids et mesures, et qu'il imagina des moyens pratiques de vérifier les balances. Ceci n'est d'ailleurs qu'une faible partie de son activité ; quelle que fût la somme de travail étranger à fournir, Euler continuait à déverser des flots de mathématiques.

Un de ses plus importants travaux de cette époque est son traité de 1736 sur la mécanique ; remarquons que cette date précède d'un an celle du centenaire de la publication de la géométrie analytique de Descartes. Le traité d'Euler a fait pour la mécanique ce que celui de Descartes a fait pour la géométrie ; il l'a libérée des chaînes de la démonstration synthétique et en a fait une science analytique. Les Principia de Newton auraient pu être écrits par Archimède, la Mécanique d'Euler n'aurait pas pu être rédigée par un Grec. Pour la première fois, toute la puissance du calcul infinitésimal se trouvait appliquée à la mécanique et l'ère moderne de cette science fondamentale commençait. Euler devait être dépassé dans cette voie par son ami Lagrange, mais c'est à Euler qu'en revient l'initiative.

À la mort de l'impératrice Anne, en 1740, le Gouvernement russe devint plus libéral, mais Euler en avait assez et il fut heureux d'accepter l'invitation de Frédéric le Grand à venir à l'Académie de Berlin. La reine douairière se prit d'une grande amitié pour Euler et essaya de le faire parler ; mais elle n'obtint que des monosyllabes : Pourquoi ne voulez-vous pas me parler ? Madame, j'arrive d'un pays où, si vous parlez, on vous pend.

Les vingt années suivantes de sa vie se passèrent à Berlin, où il ne fut pas très heureux, car Frédéric aurait préféré les manières policées d'un courtisan à l'attitude assez fruste d'Euler. Bien que le roi de Prusse jugeât de son devoir d'encourager les mathématiques, il méprisait cette science, n'y connaissant rien ; mais il appréciait suffisamment les talents d'Euler pour les utiliser à la solution de problèmes pratiques, tels que la frappe des monnaies, les conduites d'eau, les canaux de navigation, les systèmes de pensions, parmi bien d'autres.

La Russie n'oublia jamais complètement Euler et lui versa une partie de ses appointements, même pendant son séjour à Berlin. En dépit de sa nombreuse maisonnée, la situation d'Euler était prospère ; en outre de sa maison de Berlin, il possédait une ferme près de Charlottenburg. Lors de l'invasion de la Marche de Brandebourg en 1760 par les Russes, la ferme d'Euler fut pillée ; le général russe, déclarant qu'il ne faisait pas la guerre aux sciences, fit verser à Euler une indemnité dépassant de beaucoup le dommage subi ; l'Impératrice Elisabeth, de son côté, quand elle apprit

la perte d'Euler, lui envoya une belle somme en plus de cette indemnité largement suffisante.

Une des causes de l'impopularité d'Euler à la cour de Frédéric était son incapacité à prendre part aux discussions de philosophie, dont il ignorait le premier mot. Voltaire, qui passait beaucoup de temps à faire sa cour au Roi, se plaisait, avec les brillants causeurs qui entouraient Frédéric, à embarrasser l'infortuné Euler par des problèmes compliqués de métaphysique. Euler prenait fort bien la plaisanterie et se joignait aux autres pour rire de ses propres bévues ; mais cela irrita peu à peu Frédéric qui chercha un philosophe plus spécieux pour diriger son Académie et divertir sa Cour. D'Alembert (dont nous parlerons plus loin) fut invité à Berlin pour examiner la situation. Euler et lui avaient été en léger froid à propos des mathématiques ; d'Alembert n'était pas homme à laisser un différend personnel obscurcir son jugement, et il dit franchement à Frédéric que ce serait un outrage que de remplacer Euler par un autre. Mais ceci n'eut d'autre effet que de rendre Frédéric plus obstiné et plus aigri que jamais, et la situation devint intolérable pour Euler : ses fils, il le sentait, n'avaient aucune chance d'avenir en Prusse. À l'âge de cinquante-neuf ans, en 1766, il fit ses malles une fois de plus et retourna à Saint-Pétersbourg en acceptant la cordiale invitation de la grande Catherine. L'Impératrice reçut le mathématicien comme un prince du sang ; elle lui réserva une maison entière pour lui et les dix-huit personnes qu'il hébergeait et lui donna même un de ses cuisiniers.

C'est à cette époque que la cataracte commença à s'attaquer à l'œil gauche d'Euler, et en peu de temps il fut complètement aveugle. On trouve dans la correspondance de Lagrange, de d'Alembert, et d'autres mathématiciens de l'époque, les traces de la sympathie inquiète avec laquelle ils suivaient les progrès de la maladie ; Euler, lui, les subissait avec une sereine égalité d'âme ; sans aucun doute, sa foi profonde l'aida à faire face à son malheur. Mais il ne se résigna pas au silence et à l'obscurité, il prit tout de suite les mesures nécessaires pour réparer dans une certaine mesure l'irréparable ; avant que la lumière se fut tout à fait éteinte pour lui, il s'habitua à écrire ses formules avec de la craie sur une grande ardoise ; ensuite prenant ses fils, en particulier Albert, comme secrétaires, il leur dictait les explications de ses formules. Au lieu de réduire son activité, la cécité ne fit qu'accroître sa fécondité en mathématiques.

Durant toute sa vie, Euler a été doué d'une mémoire phénoménale ; il savait par cœur l'Eneide de Virgile et, bien que n'ayant que rarement jeté un coup d'œil sur ce livre depuis sa jeunesse, il pouvait à n'importe quel moment citer la première et la dernière ligne de chaque page de son édition. Sa mémoire était aussi bien visuelle qu'auditive. Il avait aussi une faculté prodigieuse de calcul mental, non seulement en arithmétique, mais aussi en algèbre supérieure et en calcul différentiel et intégral. Toutes les principales formules du domaine entier des mathématiques de son temps étaient exactement fixées dans sa mémoire.

Comme exemple des prouesses de ce genre, Condorcet nous raconte le fait suivant : deux étudiants avaient fait la somme des termes d'une série convergente compliquée (pour une valeur particulière de la variable) jusqu'au 17^{ème} terme, et avaient une différence de 1 unité à la 15^{ème} décimale du résultat ; Euler, pour décider qui avait raison, exécuta tout le calcul de tête, et sa réponse fut la bonne. Maintenant qu'il était aveugle, cette facilité lui était d'un grand secours. Mais, même dans ces conditions, voici un fait datant de sa période de cécité, qui dépasse l'imagination. La théorie de la lune, c'est-à-dire l'étude des mouvements lunaires, le seul problème qui donnait mal à la tête

à Newton, reçut d'Euler sa première explication complète ; il avait fait tous ces calculs compliqués de tête.

Cinq ans après le retour d'Euler à Saint-Pétersbourg, un autre malheur vint le frapper. Pendant le grand incendie de 1771, sa maison et tous ses meubles furent brûlés, et c'est seulement le courage héroïque de son domestique suisse, Peter Grimm ou Grimmon, qui lui sauva la vie ; au risque de sa propre existence Grimm emporta son maître, aveugle et malade, à travers les flammes ; sa bibliothèque fut également brûlée, mais grâce à l'énergie du comte Orloff, tous ses manuscrits furent sauvés. L'impératrice Catherine répara toutes ses pertes et bientôt Euler reprit ses travaux.

En 1776, à soixante-neuf ans, le décès de sa femme lui causa une grande douleur. Cependant, il se maria dès l'année suivante avec Salomé Abigail Gsell, la demi-sœur de sa première femme. Un autre grand malheur fut l'échec d'une opération chirurgicale tentée pour lui redonner la vue de l'œil gauche, le seul pour lequel on pouvait conserver encore quelque espoir. L'opération réussit, et la joie d'Euler passa toutes les bornes ; mais l'infection gagna la plaie et, après des tortures qu'il a qualifiées de hideuses, il retomba dans l'obscurité.

En considérant l'énorme labeur d'Euler, nous pouvons, au premier abord, être tentés de penser que tout homme doué aurait pu, en s'y appliquant, faire une bonne partie de ce que faisait Euler en se jouant. Mais l'examen des mathématiques d'aujourd'hui nous fait vite écarter cette idée ; les mathématiques actuelles ne sont pas plus compliquées, grâce à la puissance des méthodes dont nous disposons et en dépit de la masse des théories diverses, que celles auxquelles Euler avait affaire ; elles sont mûres aujourd'hui pour un second Euler. À son époque, il a systématisé et unifié de vastes espaces bourrés de résultats partiels et de théorèmes isolés, dégageant les fondations et reliant entre eux les points essentiels grâce à la puissance de son machinisme analytique. Même encore aujourd'hui, une grande part de ce qu'on enseigne dans les cours de mathématiques au collège est pratiquement telle qu'Euler l'a laissée, par exemple la discussion des sections coniques et des quadriques dans l'espace à trois dimensions en partant du point de vue unifié fourni par l'équation du second degré ou encore, la question des annuités et tout ce qui en dérive (assurances, pensions de vieillesse, etc.), qui ont été mis par Euler sous la forme aujourd'hui familière à ceux qui étudient la "théorie mathématique du placement des capitaux".

Comme le fait observer Arago, une des causes des grands succès immédiats d'Euler comme professeur, était son manque total d'orgueil mal placé. Si certains travaux d'un intérêt relativement médiocre lui étaient demandés pour élucider des travaux antérieurs et plus intéressants, Euler n'hésitait pas à s'en occuper. Ses grands traités de 1748, 1755, 1768-70 sur le calcul différentiel et intégral (*Introductio in analysis infinitorum ; Institutiones calculi differentialis ; Institutiones calculi integralis*) devinrent aussitôt classiques et continuèrent pendant trois quarts de siècle à inspirer des jeunes gens qui devaient devenir de grands mathématiciens. Mais c'est dans son grand ouvrage sur le calcul des variations (*Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, 1744) qu'Euler se révéla comme un mathématicien de premier ordre. L'importance de ce sujet a été notée dans les chapitres précédents.

Nous avons déjà fait remarquer le grand progrès réalisé par Euler quand il fit sa mécanique analytique ; tout étudiant qui fait de la dynamique des solides connaît l'analyse des rotations

d'Euler, pour ne citer qu'un détail de cette avance. La mécanique analytique est une branche des mathématiques pures, en sorte qu'Euler, ici, n'a pas été tenté de prendre la tangente pour s'évader dans le bleu sans fin du calcul pur. La critique la plus sévère qu'ont portée sur lui ses contemporains visait son penchant effréné à calculer, uniquement pour la beauté de l'analyse en elle-même ; il peut lui être arrivé, dans certains cas, de ne pas avoir compris suffisamment le problème de physique qu'il essayait de réduire au calcul sans savoir de quoi il s'agissait. Néanmoins, les équations fondamentales du mouvement des fluides, dont on use aujourd'hui en hydrodynamique, sont d'Euler ; lorsque cela en valait la peine, il savait être assez pratique.

Mentionnons en passant une particularité de l'analyse d'Euler, car elle a largement contribué à créer l'une des tendances principales des mathématiques au dix-neuvième siècle. Il a reconnu qu'à moins qu'une série soit convergente, il est dangereux de s'en servir. Par exemple, par une division prolongée, on trouve

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \dots,$$

et ainsi de suite indéfiniment. Posons $x = 1/2$ vient alors :

$$\begin{aligned} -2 &= 2 + 2^2 + 2^3 + \dots, \\ &= 2 + 4 + 8 + 16 + \dots \end{aligned}$$

L'étude de la convergence (qui sera discutée à propos de Gauss) nous indique comment on évite des absurdités de ce genre. (Voir aussi le chapitre sur Cauchy). Chose curieuse, alors qu'Euler reconnaissait la nécessité d'être prudent en usant de l'infini, il n'observa pas cette précaution dans bien de ses travaux. Sa foi dans l'analyse était si grande qu'il cherchait quelquefois une explication manifestement absurde pour rendre respectable une absurdité patente.

Mais, ceci dit, il faut ajouter qu'Euler a été rarement égalé ou approché dans la grande quantité des travaux rigoureusement exacts et nouveaux qu'il a produits. Ceux qui aiment l'arithmétique (qui n'est peut-être pas une branche très importante) décerneront à Euler, pour l'analyse diophantienne, une palme aussi grande et aussi fraîche que celle gagnée par Fermat et Diophante lui-même. Euler a été le premier et peut-être le plus grand des universalistes mathématiciens.

Pourtant ce n'était pas un mathématicien à l'esprit étroit : en littérature et dans toutes les sciences y compris la biologie, il a beaucoup lu. Mais même quand il lisait l'Enéide, il ne pouvait s'empêcher d'y trouver quelque problème de mathématiques à chercher.

Le vers "L'ancre tombe, aussitôt la quille qui fend l'onde s'arrête" l'engagea à étudier le mouvement des navires en pareilles circonstances. Sa curiosité insatiable l'entraîna pendant quelque temps vers l'astrologie ; mais il montra qu'il ne l'avait pas assimilée en déclinant poliment de tirer l'horoscope du prince Ivan quand on le pria de le faire en 1740 : il répondit que les horoscopes étaient du domaine de l'astronome de la cour ; et c'est le pauvre astronome qui dut se livrer à cette opération.

Une œuvre écrite à Berlin nous révèle en Euler un écrivain gracieux (peut-être un peu trop piétiste) ; il est l'auteur des fameuses *Lettres à une princesse allemande*, dans lesquelles il donne des leçons de mécanique, d'optique physique, d'astronomie, d'acoustique, etc., à la nièce de Frédéric, la princesse de Anhalt-Dessau. Ces lettres devinrent très populaires et furent publiées en sept langues. On

voit que l'intérêt du public pour la science n'est pas spécial à notre temps, comme on a tendance quelquefois à le croire.

L'esprit d'Euler resta viril et puissant jusqu'à quelques instants avant sa mort, qui survint le 18 septembre 1783 alors qu'il atteignait soixante-dix-sept ans. Après s'être amusé un après-midi à calculer les lois de l'ascension des ballons, sur son ardoise, comme de coutume, il prit son repas avec Lexell et sa famille, la planète de Herschel (Uranus) était une découverte récente ; Euler esquissa le calcul de son orbite. Un peu plus tard, il demanda qu'on lui amenât son petit-fils ; pendant qu'il jouait avec l'enfant en buvant du thé, il eut une syncope. Sa pipe lui échappa des doigts, et, en disant "Je meurs", "Euler cessa de vivre et de calculer"¹.

¹CONDORCET : L'Éloge.