Transcription de vidéos pédagogiques au sujet du Théorème des nombres premiers (TNP) (Denise Vella-Chemla, mai 2023)

Référence : https://www.youtube-nocookie.com/embed/Ka2jPgxRpKs.

Épisode 1 : l'intégrale de Newman.

Salut à toutes et à tous. Aujourd'hui, enfin, on s'attaque au fameux théorème des nombres premiers. Alors j'ai décidé de faire une petite série à part, déconnectée de la série sur l'analyse complexe, un petit peu "hors-série", sur ce fameux théorème des nombres premiers. Si je suis le plan que je me suis fixé ça va durer 4 vidéos, a priori, donc 4 vidéos qui vont faire toutes entre, je dirais, 20 et 30 minutes si je ne fais pas trop n'importe quoi, donc au total, oui, à peu près deux heures pour démontrer le fameux théorème des nombres premiers. La présentation que je vais suivre, elle est due à Newman, donc ce n'est pas la preuve originale du théorème des nombres premiers, c'est une preuve qui est venue bien après et qui utilise quand même beaucoup d'analyse complexe et j'ai décidé de vous présenter celle-là essentiellement parce que c'est, à ma connaissance, la preuve la plus simple, connue, du théorème des nombres premiers. Donc c'est cette preuve-là que je vais vous présenter.
Alors, pour aller vers cette preuve-là, on a d'abord besoin de définir quand même rapidement les quelques quantités qui nous seront utiles : donc $\pi(x)$, c'est, comme d'habitude, la fonction de comptage des nombres premiers, donc le nombre de nombres premiers inférieurs à x, vous pouvez l'écrire comme ça tout simplement :

$$\pi(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} 1$$

et thêta de x, c'est la fonction de comptage des logarithmes des nombres premiers donc c'est cette chose-là :

$$\pi(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} \ln p$$

(je n'utilise pas le log en base 10 et quand je note un p, ça sous-entend toujours un nombre premier, ça désignera toujours un nombre premier, pareil pour les lettres q et r a priori). Donc le théorème des nombres premiers, qu'est-ce qu'il dit : c'est le théorème qui affirme que $\pi(x)$ est équivalent quand x tend vers plus l'infini à x sur logarithme de x (donc encore une fois, c'est le logarithme népérien, il y a pas de base 10 ici).

Théorème des nombres premiers :

$$\pi(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}. \qquad (TNP)$$

Donc c'est ça, le fameux théorème des nombres premiers, et c'est ça qu'on va démontrer.
Alors, la première chose qu'on peut remarquer, c'est que la fonction thêta, elle va être beaucoup plus facile à utiliser parce qu'elle va apparaître naturellement dans le développement de ζ, en particulier de la dérivée logarithmique de ζ. Donc on va plutôt se concentrer sur cette fonction θ que sur la fonction π et pour faire le lien entre les deux, on a le lemme suivant, je vais l'appeler Lemme 1, qui

dit que $\theta(x)$ est équivalent, quand x tend vers plus l'infini à $\pi(x)$ fois le logarithme népérien de x. Lemme 1 :

$$\theta(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \pi(x)\ln\, x$$

On a donc que

$$(TNP) \iff (\theta(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x).$$

Vous voyez que si j'arrive à montrer que $\theta(x)$ est équivalent x, j'aurais que ce truc-là (partie droite de l'approximation du lemme 1) est équivalent à x, donc en divisant par le $\pi(x)$, j'aurai exactement cette formule-là (la formule du TNP). Donc c'est plutôt cette formule-là en fait qu'on va démontrer essentiellement parce que θ apparaît naturellement dans la fonction ζ.

Alors ce lemme-là, la preuve de ce lemme, en fait je l'ai déjà faite dans une précédente vidéo donc je vous mettrai le lien de la vidéo en description, c'est une de mes toutes premières vidéos quand j'ai fait un petit peu de théorie sur les nombres premiers, il y a cet équivalent $\theta(x) \sim \pi(x)\ \ln x$ donc je mettrai un petit lien vers cette vidéo qui traîne depuis un petit bout de temps. C'est une de mes toutes premières vidéos, juste, rapidement, l'idée de la preuve, en quoi ça consiste, le principe c'est juste d'encadrer $\theta(x)$ entre (à droite) $\ln x\pi(x)$, ça c'est juste en majorant chacun des logs par $\ln x$ et d'encadrer ça par la somme pour p entre x et x puissance $1-\varepsilon$ pour ε bien choisi des logs de p. Et cette chose-là, vous pouvez la minorer par logarithm de x fois un moins epsilon, donc là c'était le $\ln x$ puissance epsilon que j'ai utilisé, j'ai minoré les logs par log de x puissance un moins epsilon fois du coup $\pi(x)$ moins pi de x puissance un moins epsilon et il s'agit de bien gérer les erreurs, et tous ces détails-là sont dans la vidéo dans la description. Donc je fais référence à cette vidéo-là et à une deuxième vidéo que j'ai faite il y a longtemps, ce sera les seules références que je ferai dans toute la série, donc les deux références c'est dans la première vidéo, et ce sera les seules références que je ferai. Pour ce petit lemme-là, montrer cet équivalent-là, je vous invite à essayer de le faire vous-même, en partant de ces égalités-là, c'est franchement accessible et c'est intéressant, c'est un bon moyen de s'impliquer un petit peu dans la preuve, donc pour le coup, ce lemme-là, je vous conseille d'essayer de le faire vous-même si vous n'y arrivez pas, allez voir dans la description, j'aurais mis un lien vers la vidéo qui le fait.

Donc voilà, ça c'est le premier lemme, et donc nous ce qu'on veut, c'est montrer l'assertion qui est équivalente au théorème des nombres premiers, c'est à dire qu'on veut montrer que

$$\theta(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$$

Alors il y a une première chose qu'on a déjà montré, encore une fois, dans une autre vidéo, c'est la deuxième référence que je ferai et la dernière.

C'est ce deuxième lemme :

Lemme 2 : on a déjà montré que thêta de x est un grand O de x quand x tend vers plus l'infini.

Lemme 2 :

$$\theta(x) \underset{x\to+\infty}{=} O(x)$$

Alors évidemment, c'est beaucoup plus faible que ça, tout ce que vous pouvez dire avec ça, c'est que $\theta(x)$ est majoré par une constante fois x, c'est évidemment beaucoup plus faible qu'un équivalent, c'est beaucoup plus faible que $\theta(x)$ sur x tend vers 1. Là, tout ce qu'on a, c'est que $\theta(x)$ sur x est borné, une suite bornée, donc évidemment, on est loin d'avoir montré qu'elles tend vers 1. Donc ce lemme-là, je vous donne rapidement l'idée de la preuve ; l'idée de la preuve et les détails sont évidemment fournis dans la deuxième vidéo qui sera dans la description. L'idée de la preuve, c'est essentiellement de dire que ce coefficient binomial-là $\binom{2n}{n}$, alors ça c'est un argument qui est dû à Tchebytchev et que je trouve très joli, vous pouvez l'écrire comme $\frac{(2n)!}{n!n!}$ et le truc, c'est que ce truc-là (cette dernière fraction), c'est divisible par tous les nombres premiers p tels que $n+1 \leq p \leq 2n$. Pourquoi ? Parce que ces nombres premiers, ils apparaissent au numérateur et pas au dénominateur donc au final, dans le nombre au total, dans tout le quotient, ils apparaîtront, à une puissance strictement positive. Donc ce truc-là est divisible par tous les nombres premiers qui sont strictement entre $n+1$ et largement en-dessous de $2n$, au sens large en-dessous de $2n$, et donc ce truc-là est divisible par le produit de tous ces nombres premiers.

Donc

$$\prod_{\substack{p \in [n+1, 2n] \\ p \text{ premier}}} p \,\Big|\, \binom{2n}{n}$$

Et en particulier vous avez que du coup, il y a il y a une inégalité :

$$\prod_{\substack{p \in [n+1, 2n] \\ p \text{ premier}}} p \leq \binom{2n}{n}$$

et ce truc-là, le binôme de Newton, par exemple vous pouvez le majorer par 4 puissance n :

$$\prod_{\substack{p \in [n+1, 2n] \\ p \text{ premier}}} p \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n.$$

Ok, bon, là, je fais une majoration large, les détails sont dans l'autre vidéo en description, et si vous passez au logarithme, vous obtenez que

$$\begin{gathered}\sum_{\substack{p \in]n+1, 2n] \\ p \text{ premier}}} \ln p \leq n \ln 4 \\ \theta(2n) - \theta(n) \leq n \ln 4 \\ \theta(2n) \leq \theta(n) + n \ln 4.\end{gathered}$$

Et cette majoration-là, ça vous permet de majorer $\theta(2n)$ en fonction de $\theta(n)$. Et donc en itérant cette idée-là, vous arrivez finalement à montrer que $\theta(n)$ est un grand $O(n)$ et ça, encore une fois les détails sont dans la vidéo donc dans la deuxième vidéo en description.

Voilà donc ces deux petits lemmes, ce sont des lemmes qui sont complètement élémentaires, qui n'utilisent pas d'analyse complexe et que j'ai déjà traité dans d'autres vidéos donc, que je vous invite à aller voir ce deuxième lemme-là, vous pouvez essayer de le mettre en place avec les idées que je vous ai montrées là, c'est faisable, c'est un peu plus technique que pour le premier, mais encore une fois voilà, si vous bloquez, n'hésitez pas à aller voir la vidéo en question. N'hésitez pas quand même aussi à essayer de le faire quand-même, parce que ça peut être intéressant.

Voilà donc c'est ça les deux petits lemmes qu'on va utiliser sur toute cette preuve du théorème des nombres premiers.

Maintenant je ne ferai plus référence à d'anciennes vidéos, et je vais passer tout de suite à l'idée de Newman pour cette preuve.

Alors l'idée de Newman, elle est très astucieuse : elle consiste à remarquer que si je regarde cette intégrale-là, l'intégrale de $\theta(x) - x$ sur x^2, bah, cette chose-là, bon, vous ne savez pas si elle est convergente ou divergente. Nous, on veut montrer que $\theta(x)$, c'est équivalent à x, ok ? Donc vous voyez que si $\theta(x)$ est équivalent à x, vous allez avoir que ce $\theta(x) - x$ (au numérateur) est petit. En fait, vous allez avoir que c'est un petit $o(x)$ et donc l'intégrale, ce sera un petit $o(\frac{1}{x})$. Donc ça, ça semble plutôt bon, pour aller dans le sens de dire que si cette intégrale converge, alors $\theta(x)$ a de bonnes chances d'être équivalent à x. Et en fait, c'est ce lemme-là qu'on va montrer. Donc ce lemme-là, je vais l'appeler lemme de Newman, parce que j'estime que c'est vraiment le coeur de la preuve, l'idée fondamentale de la preuve, bon, il y aura d'autres idées, notamment celle d'introduire la fonction ζ mais ça, ce sont des idées qui avaient déjà été trouvées avant la contribution de Newman, notamment par Hadamad et la Vallée-Poussin, qui ont fourni les premières preuves du théorème des nombres premiers. Donc le lemme de Newman, c'est de dire :

Lemme de Newman :

$$\text{Si } \int_1^{+\infty} \frac{\theta(x) - x}{x^2}\, dx \text{ converge, alors } \theta(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x \qquad \text{(et donc TNP est vrai).}$$

et donc en particulier on en déduit l'assertion TNP (TNP, c'est le théorème des nombres premiers, donc TNP est vrai, si vous voulez).

Donc, c'est ça, le lemme de Newman. Une fois qu'on l'aura prouvé, ça nous permettra de juste nous restreindre à montrer que cette intégrale-là converge, ok parce que le lemme de Newman nous dira que si cette intégrale converge, alors ce $\theta(x)$ est équivalent x, ce qui permet de conclure la preuve du théorème des nombres premiers.

Donc on va prouver ce petit lemme de Newman ; cette fois-ci, je vais vraiment le prouver, je ne vais pas faire de renvoi donc la preuve du lemme.

Donc supposons que l'intégrale converge. ça veut dire que la limite de l'intégrale de 1 à grand N de cette chose-là existe et est finie. Donc j'ai besoin que cette intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\theta(x) - x}{x^2}\, dx$$

converge et montrons que $\theta(x) \sim x$. c'est-à-dire que $\dfrac{\theta(x)}{x} \longrightarrow 1$.

Alors comment faire ça ? Eh bien, supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas.

Supposons par l'absurde que thêta de x sur x ne tend pas vers 1. Bon alors là, deux choses sont possibles :

- soit $\theta(x)$ sur x va être souvent plus petit que 1 ;
- soit $\theta(x)$ sur x va être souvent plus grand que 1.

Donc deux choses sont possibles : il existe ε positif tel que $\forall N \geq 0; \exists x \geq N$ tel que $\left|\dfrac{\theta(x)}{x} - 1\right| \geq \varepsilon$.

Là, je nie juste la définition de la limite. Le fait que ça ne tende pas vers 1, c'est la même chose que de dire qu'il existe un ε tel que il existe des x arbitrairement grands tels qu'on ait ça.

Donc il existe une suite x_n qui tend vers $+\infty$ telle que $\left|\dfrac{\theta(x_n)}{x_n} - 1\right| \geq 1$ pour tout n.

Le fait d'avoir des x arbitrairement grands qui vérifient ça, c'est la même chose qu'avoir une suite de x qui tend vers l'infini qui vérifie ça. Alors maintenant, quitte à extraire de x_n, eh bien je peux supposer soit que $\dfrac{\theta(x_n)}{x_n}$ est plus grand que $1+\varepsilon$, soit qu'il est plus petit que $1-\varepsilon$. De toute façon il y a une infinité de x_n tels que $\left|\dfrac{\theta(x_n)}{x_n} - 1\right| \geq 1$, donc soit il y a une infinité de x_n tels que cette différence est plus grande que ε, soit une infinité de x_n tels que cette différence est plus petite que moins ε. Donc quitte à extraire de x_n, on peut supposer que l'une de ces deux conditions est réalisée.

Pour l'instant, je n'ai rien fait de sorcier j'ai juste déballé la définition de la limite et préparer un raisonnement par l'absurde.

Donc,

- soit $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{\theta(x_n)}{x_n} - 1 \geq \varepsilon$ (i)
- soit $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{\theta(x_n)}{x_n} - 1 \leq -\varepsilon$ (ii)

Donc là, j'ai une infinité de termes tels que l'une des deux conditions est réalisée, donc je peux extraire une suite telle que sur tous les termes ça c'est réalisé (*montrant la première condition*) ou sur tous les termes, ça, c'est réalisé (*montrant la deuxième condition*) donc on a une de ces conditions-là qui est réalisée.

Donc maintenant, regardons ce que ce qu'implique ces conditions. Donc je vais le faire pour la première (i).

Donc supposons (i). Et là je vais obtenir une contradiction avec le fait que cette intégrale-là (montrant $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\theta(x)-x}{x^2}\,dx$) converge, évidemment.

puisqu'on a raisonné par l'absurde en supposant que $\dfrac{\theta(x)}{x}$ ne tendait pas vers 1.

Donc supposons (i).

Alors je vais regarder l'intégrale entre x_n et $(1+\varepsilon)x_n$, cette intégrale-là, donc, de $\theta(x)-x$ sur x^2 dx. Bon, eh bien cette intégrale-là, par hypothèse elle doit tendre vers 0 puisque

$$(i) \implies \int_{x_n}^{(1+\varepsilon)x_n} \frac{\theta(x)-x}{x^2}\,dx = \int_1^{(1+\varepsilon)x_n} \frac{\theta(x)-x}{x^2}\,dx - \int_1^{x_n} \frac{\theta(x)-x}{x^2}\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} = 0$$

parce que la suite x_n tend vers l'infini évidemment. Donc notre hypothèse de convergence de l'intégrale de 1 à $+\infty$ assure que cette suite-là (*soulignant la partie gauche de l'égalité*) doit tendre vers zéro.

Mais en utilisant cette chose-là (*montrant l'égalité (i)*), on va obtenir une contradiction avec le fait qu'elle tend vers 0 ; en fait, on va obtenir qu'elle est minorée par une constante strictement positive.

Mais donc je peux minorer cette chose-là :

$$\int_{x_n}^{(1+\varepsilon)x_n} \frac{\theta(x)-x}{x^2}\,dx.$$

Comment je minore ça ? J'utilise le fait que la fonction thêta est croissante, évidemment, donc on a

$$\int_{x_n}^{(1+\varepsilon)x_n} \frac{\theta(x)-x}{x^2}\,dx = \int_{x_n}^{(1+\varepsilon)x_n} \frac{\theta(x_n)-x}{x^2}$$

Cette intégrale de gauche est plus grande que l'intégrale de droite, vous revenez à la définition de thêta, c'est clair qu'elle est croissante, et maintenant j'utilise la minoration que j'ai de θ de x_n qui est cette minoration-là (*désignant (i)*) et j'obtiens que cette chose-là, c'est plus grand que l'intégrale suivante :

$$\int_{x_n}^{(1+\varepsilon)x_n} \frac{\theta(x)-x}{x^2}\,dx = \int_{x_n}^{(1+\varepsilon)x_n} \frac{\theta(x_n)-x}{x^2} \geq \int_{x_n}^{(1+\varepsilon)x_n} \frac{(1+\varepsilon)x_n - x}{x^2}\,dx$$

J'intègre cette chose-là maintenant, je calcule explicitement cette dernière expression. Donc je commence avec $(1+\varepsilon)x_n$ fois l'intégrale de 1 sur x carré. L'intégrale de 1 sur x carré est moins un sur x et j'évalue ça entre ça et ça. Et donc j'obtiens ??? (là je vous laisse vérifier les calculs, ils ne sont pas spécialement difficiles donc je les fais un petit peu vite)

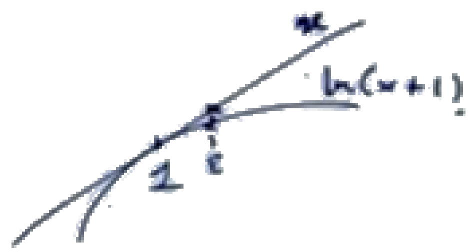
$$\geq (1+\varepsilon)x_n \left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{(1+\varepsilon)x_n}\right) \ldots$$

et ensuite moins l'intégrale de 1 sur x et l'intégrale de 1 sur x, c'est le logarithme, et donc on se retrouve avec moins le logarithme de ça (*désignant la borne supérieure de l'intégrale*) moins logarithme de ça (*désignant la borne inférieure de l'intégrale*), c'est à dire moins le logarithme de juste un plus epsilon, parce que log de $(1+\varepsilon)x_n$ moins log de x_n, ça fait log de $(1+\varepsilon)x_n$ sur x_n, c'est-à-dire log de 1 plus ε.

Encore une fois, je passe vite sur les calculs parce qu'ils ne sont pas difficiles et parce que je préfèrerais que vous les fassiez vous, très honnêtement, ok. Donc ici, il nous reste

$$\geq ((1+\varepsilon)-1) - \ln(1+\varepsilon = \varepsilon - \ln(1+\varepsilon).$$

Mais maintenant si vous regardez votre graphe du logarithme, vous avez le 1 ici et donc un plus ε, ça va être par là et donc vous voyez que ε c'est strictement plus grand que $\ln(1+\mathit{epsilon})$ (ici, la fonction x et là, la fonction log de $1+x$. ok donc et puis, là c'est strictement plus grand que logarithme de $1+\varepsilon$ et donc cette chose-là est strictement positive. Mais on a vu par ailleurs que quand n tend vers plus l'infini, cette chose-là (*désignant l'intégrale initiale*), tend vers 0, et donc ça, ça voudrait dire que cette chose-là (*désignant le* $\varepsilon - \ln(1+\varepsilon)$) doit être égale à zéro.



Mais on a vu que ce n'était pas possible (*entourant le* >0). Et donc, on obtient une contradiction ici. Donc le cas le cas (i) ne peut pas avoir lieu.

De la même façon, on peut montrer que le cas (ii) ne va pas avoir lieu. Je vais esquisser la preuve et je vais vous laisser la finir, puisque c'est exactement le même genre de calcul.

Supposons (ii). Donc cette fois-ci, on s'intéresse à l'intégrale

$$\int_{(1-\varepsilon)x_n}^{x_n} \frac{\theta(x)-x}{x^2}\,dx$$

Alors cette fois-ci, on dispose d'une majoration de $\theta(x)$.

Donc d'abord, j'utilise la croissance de thêta pour dire que cette chose-là, c'est plus petit que $\theta(x_n)$, puisqu'on est sur l'intervalle $[(1-\varepsilon)x_n, x_n]$.

$$\int_{(1-\varepsilon)x_n}^{n_n} \frac{\theta(x)-x}{x^2}dx \leq \int_{(1-\varepsilon)x_n}^{n_n} \frac{\theta(x_n)-x}{x^2}dx \int_{(1-\varepsilon)x_n}^{n_n} \frac{(1-\varepsilon)x_n - x}{x^2}dx \leq$$

Et ensuite, j'utilise exactement le même argument, je majore $\theta(x_n)$ par la majoration qu'on a, c'est-à-dire qu'on a grâce à l'hypothèse 2

À nouveau, je fais mes petits calculs donc ici on se retrouve

$$\leq (1-\varepsilon)x_n \left(\frac{1}{(1-\varepsilon)x_n} - \frac{1}{x_n} \right) - \ln \left(\frac{1}{1-\varepsilon} \right)$$

Cette chose est la même que la dernière fois, sauf que les bornes ont été "retournées" ($1-$ devient $1+\varepsilon$, etc). Et cette chose-là (*désignant la dernière intégrale à droite*), et cette chose-là, est égale à $\ln(1-\varepsilon)+\varepsilon$.

Cette dernière valeur (*en se rapportant au graphique, côté gauche du 1*) est égale à $-(-\varepsilon-\ln(1-\varepsilon))$, ceci est strictement négatif. Mais cette intégrale-là (la première) doit tendre vers 0, et donc vous avez que

$$0 \leq -(-\varepsilon - \ln(1-\varepsilon))$$

qui lui-même est strictement négatif. Et donc vous obtenez encore une fois une absurdité.

Donc voilà pour ce qui est du lemm de Newman, on a essentiellement prouvé le lemme donc. Les calculs, j'allais un petit peu vite dessus, n'hésitez pas à les vérifier, c'est pour éviter d'avoir des vidéos qui durent 3 heures. Parce que le théorème des nombres premiers, ça va être quand-même un truc assez long.

Donc finalement on a montré que dans les cas (i) et (ii), on obtient une contradiction, ce sont les deux cas possibles donc c'est l'hypothèse qu'on a faite qui était fausse. On a donc montré par l'absurde que $\theta(x)$ équivalent à x quand x tend vers plus l'infini :

$$\theta(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$$

Et donc finalement, on a prouvé le fameux lemme de Newman qui dit que si $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\theta(x)-x}{x^2}dx$ converge, ça implique $\theta(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ et ça on a vu avec le premier lemme qui était donc une des vidéos que je vous ai mises en description, que cette chose-là, ça implique le théorème des nombres premiers.

$$\left(\int_1^{+\infty} \frac{\theta(x)-x}{x^2} dx \text{converge} \right) \implies \left(\theta(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x \right) \implies (TNP)$$

Voilà. Et donc maintenant les trois prochaines vidéos vont avoir pour objet de montrer que cette chose-là est vraie, que cette intégrale donc épisodes 2, 3, 4, sur cette intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\theta(x)-x}{x^2}dx$ converge, donc là pour l'instant on n'a pas du tout fait d'analyse complexe encore et ça, ça commencera à intervenir dans la deuxième vidéo, où on fera le lien entre cette intégrale-là et la fonction ζ de Riemann.

Voilà, donc, c'est tout pour aujourd'hui, j'espère que ça vous a plu et à bientôt.