**C.R. Acad. Sc. Paris, t. 286 (19 juin 1978)** **Série A - 1175**

ALGÈBRE. - *Une caractérisation des mots périodiques.*

Note[1] de **Yves Césari** et **Max Vincent**, transmise par M. Marcel Paul Schützenberger.

En réponse à une question de M. P. Schützenberger[2], nous établissons la périodicité des mots du monoïde libre dont toute lettre accepte un double recouvrement.

*We establish the periodicity of words in which all letters admit a double covering.*

A* étant le monoïde libre de base A et $m$ une application du segment $(1, n)$ de N dans A, nous noterons $(1, n)m$ le mot non vide de A* de longueur $n$ dont la lettre de rang $i(1 \leq i \leq n)$ est l'image de $i$ par $m$ et pour $1 \leq i \leq j \leq n$ nous noterons $(i, j)m$ le facteur de $(1, n)m$ commençant au rang $i$ et finissant au rang $j$.

Nous dirons que $i$ est doublement recouvert s'il existe des entiers $p, q, r, s$ $(1 \leq p \leq r \leq i \leq q \leq s \leq n)$ tels que

$$(p, q)m = (r, s)m.$$

Ceci implique que $(i - k, i)m = (i, i + k)m$ où $k = r - p = s - q \geq 1$. Nous utiliserons la définition du double recouvrement sous cette forme réduite.

Soit $i$ un indice doublement recouvert, nous noterons $k_i$ le plus petit entier $(\geq 1)$ tel que

$$(i - k_i, i)m = (i, i + k_i)m.$$

Nous dirons qu'un facteur $(\alpha, \beta)m$ de $(1, n)m$ admet une translation de $p(\geq 1)$ si pour tout $i$ vérifiant $\alpha \leq i < i + p \leq \beta$ on ait

$$(i + p)m = (i)m.$$

Un facteur $(\alpha, \beta)m$ est périodique de pas $p$ si $p$ est la plus petite translation de $(\alpha, \beta)m$.

Enfin nous noterons $(u, v)$ un segment de $(1, n)$ tel que tout indice $i(u \leq i \leq v)$ est doublement recouvert et nous noterons $k = \sup_{u \leq i \leq v} k_i$.

LEMME 1. - $(u - 1, v + 1)$ admet une translation de $k$.

*Preuve.* - Si $k = 1$, les $k_i$ sont tous égaux à 1, donc $(i - 1)m = (i)m = (i + 1)m$ pour $i \in (u, v)$, c'est-à-dire $(i)m = (i + 1)m$ pour $u - 1 \leq i < i + 1 \leq v + 1$.

---

1. Séance du 3 avril 1978.
2. **M. P. Schützenberger**, A Property of Finitely Generated Submonoids of Free Monoïds [Colloque de Szeged, G. Pollak, North-Holland (à paraître)]

Supposons la propriété vraie pour tout $k_0$ tel que $k_0 < k$ et montrons qu'elle est vraie pour $k$.
Si elle est fausse il existe $j$ dans $(u-1, v+1-k)$ tel que $(j)m \neq (j+k)m$. Mais alors pour tout $i$ dans $(j, j+k) \cap (u,v)$ on a $k_i < k$. Or, il existe $l$ dans $(u,v)$ tel que $k_l = k$. Nous continuons la preuve pour le cas où $l < j$ (si $l > j+k$ une preuve analogue utilisant la symétrie des énoncés permet d'aboutir).
Plus précisément, on note $l$ le plus grand indice inférieur à $j$ tel que $k_l = k$. Pour tout $i$ dans $(l+1, l+k), k_i$ est défini puisque

$$l + k < j + k \leq v + 1$$

et de plus $k_i < k$.
Posons $k_0 = \sup_{l+1 \leq i \leq l+k} k_i$.
Par hypothèse de récurrence $(l, l+k+1)m$ admet une translation de $k$ et *a fortiori* il en est de même pour $(l, l+k)m$. Donc

$$(l, l+k-k_0)m = (l+k_0, l+k)m,$$

mais, puisque $k_l = k$, nous avons aussi

$$(l-k+k_0, l)m = (l+k_0, l+k)m,$$

par conséquent

$$(l-k+k_0, l)m = (l, l+k-k_0)m,$$

ce qui donne

$$k_l \leq k - k_0 < k,$$

ce qui contredit l'hypothèse et établit le lemme.
Lemme 2. - Si $u \leq j < i \leq v$, $k_j < k$ et $k_i < k$ alors il existe $l < i$ tel que $k_l = k$ et $l + k > i + k_i$.
*Preuve.* - Par récurrence sur $k$.
La propriété est vraie pour $k = 1$.

Supposons-la vraie pour $k_0 < k$ et montrons qu'elle est vraie pour $k$. Si elle est fausse, soit $l$ le plus grand indice inférieur à $i$ tel que $k_l = k$. Alors pour tout $j (l < j \leq i) k_j < k$. Posons $k_0 = \sup_{l<j\leq i} k_j$. Si $k_i = k_0$ nous posons $p = i$ ; dans le cas contraire, en appliquant l'hypothèse de récurrence au segment $(l+1, i)$ nous obtenons $p (l < p < i)$ tel que $k_p = k_0$

et $p + k_p > i + k_i$. Dans les deux cas, $l$ et $p$ sont tels que

$$k_l = k; \qquad k_p = k_0 = \sup_{l<j\leq p} k_j$$
$$l + k \leq p + k_p \qquad \text{et } k_0 < k.$$

Suivant le lemme 1, $(l, p+1)m$ admet une translation de $k_0$.
De plus, puisque $k_p = k_0, (p - k_0, p + k_0)m$ admet une translation de $k_0$ ; par conséquent $(l, p + k_0)m$ admet une translation de $k_0$, et il en est de même de son facteur $(l, l + k)m$. Par le même argument que dans la preuve du lemme 1, nous obtenons $k_p, \leq k - k_0$, ce qui contredit l'hypothèse $k_p = k$ et établit le lemme.
Proposition 1. - Si $u \leq j < i \leq v$ et $k_j > k_i$, alors il existe $l$ tel que

$$j \leq l < i, \qquad k_l \geq k_j, \qquad l + k_l > i + k_i.$$

*Preuve.* - Il suffit d'appliquer le lemme 2 au segment $(j, i)$.

Proposition 2. - $\sup_{u\leq i\leq v} (i + k_i) = \sup_{k_i=k} (i + k_i)$.
*Preuve.* - Posons u$_0 = \inf_{u\leq i\leq v} (i - k_i), v_0 = \sup_{u\leq i\leq v} (i + k_i)$.
Si la proposition est fausse, alors $k_i < k$ ; appelons $j$ le plus grand indice tel que $k_j = k$ ; en appliquant le lemme 2 au couple $j, i$ on obtient la contradiction

$$j + k_j > i + k_i.$$

Théorème - Le segment $(\inf_{u\leq i\leq v} (i - k_i), \sup_{u\leq i\leq v} (i + k_i))m$ est *périodique* de pas $k$.
*Preuve.* - Posons $u_0 = \inf_{u\leq i\leq v} (i - k_i), v_0 = \sup_{u\leq i\leq v} (i + ki)$.
Par le lemme 1, nous savons que $(u - 1, v + 1)$ admet une translation de $k$. La proposition 2 établit que $(v_0 - 2k, v_0)m$ admet la même translation puisque $(v_0 - 2k, v_0 - k)m = (v_0 - k, v_0)m$.
On montrerait de même que $(u_0, u_0 + 2k)m$ admet une translation de $k$. Puisque $u_0 \geq u - k$ et $v_0 \leq v + k$, le facteur $(u_0, v_0)_m$ admet une translation de $k$. Il est donc périodique de pas inférieur ou égal à $k$. Le pas est bien égal à $k$ puisque tous les $k_i$ sont inférieurs au pas.

*Département de Mathématiques, Université de Montpellier, 34000 Montpellier.*