Quand un polynôme s'annule-t-il ? (Denise Vella-Chemla, mai 2025)

On reprend des idées qu'on avait eues en 2011, pour étudier la conjecture de Goldbach en utilisant des équations algébriques [1].

Le nombre n pair étant fixé, le polynôme qui s'annule pour les nombres premiers impairs inférieurs à $n-2$ s'écrit :

$$P(x) = \prod_{\substack{p_k \text{ premier impair} \\ 3 \leq p_k \leq n-2}} (x - p_k).$$

Considérons le polynôme $Q(x)$, égal à $P(x)$, moyennant un changement de la variable x en son complémentaire à n qui est $n-x$.

$$Q(x) = \prod_{\substack{p_k \text{ premier impair} \\ 3 \leq p_k \leq n-2}} ((n-x) - p_k).$$

Prenons un exemple : pour $n = 16$, le polynôme $P(x)$ est égal à :

$$P(x) = x^5 - 39\ x^4 + 574\ x^3 - 3954\ x^2 + 12673\ x - 15015$$

et le polynôme $Q(x)$ est égal à :

$$Q(x) = -x^5 + 41\ x^4 - 638\ x^3 + 4654\ x^2 - 15681\ x + 19305$$

Le polynôme $R(x) = P(x) \wedge Q(x)$, pgcd de polynômes des polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ est égal à

$$R(x) = x^4 - 32\ x^3 + 350\ x^2 - 1504\ x + 2145.$$

$R(x)$ s'annule pour $x = 3, 5, 11, 13$, qui sont les décompositions de Goldbach de $n = 16$.

Les valeurs de $R(x)$ aux extrémités de l'intervalle $[4, n/2]$ sont

$$R(4) = -63\ ;$$
$$R(8) = 225.$$

Fournissons les graphiques des polynômes $P(x)$ en bleu, $Q(x)$ en rouge et $R(x)$ en vert pour les nombres n compris entre 6 et 24 [2]

(Remarque 1 : On a dessiné les graphiques avec une échelle dite "`symlog`" en python pour que les courbes ne soit pas trop écrasées sur l'axe des ordonnées, ce qui rendait leur lecture impossible).

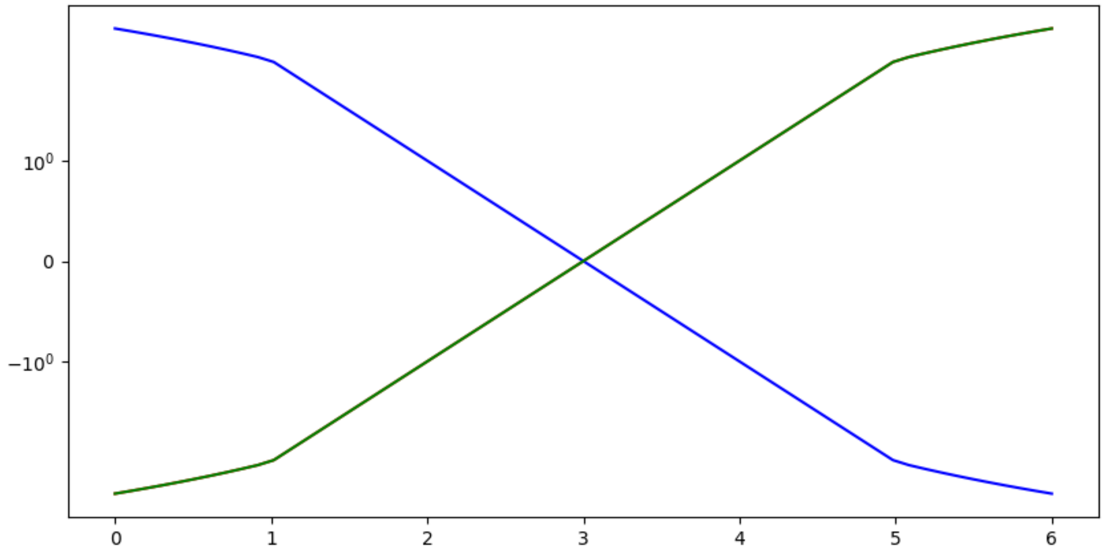
(Remarque 2 : Pour $n = 6$, $n = 8$, $n = 10$, le polynôme pgcd est confondu avec l'un des deux polynômes $P(x)$ ou $Q(x)$, la couleur verte passe exactement sur la couleur rouge ou bleue, la rendant invisible).

---

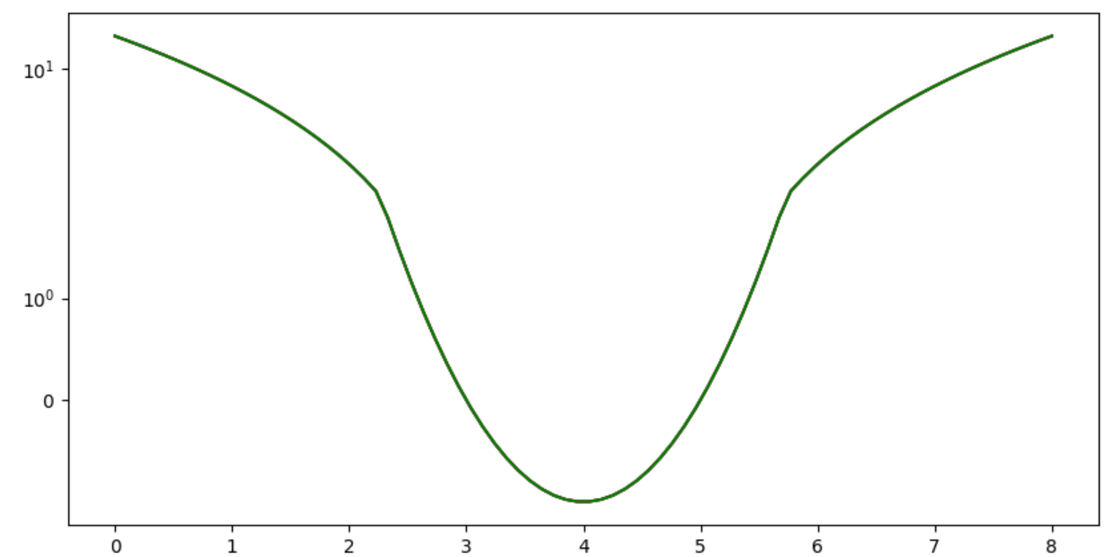
[1] Voir ces notes : http://denisevellachemla.eu/j31102011.pdf, http://denisevellachemla.eu/j111111.pdf, http://denisevellachemla.eu/j6112011.pdf et http://denisevellachemla.eu/j112012.pdf.

[2] Ces graphiques ont d'abord été réalisés en utilisant le programme de calcul du pgcd de polynômes de Denis Hulo, que je remercie, et qui est fourni à cette page pgcd de polynômes dans le blog Denis Hulo. Puis on a utilisé le module `sympy` du langage `python`.

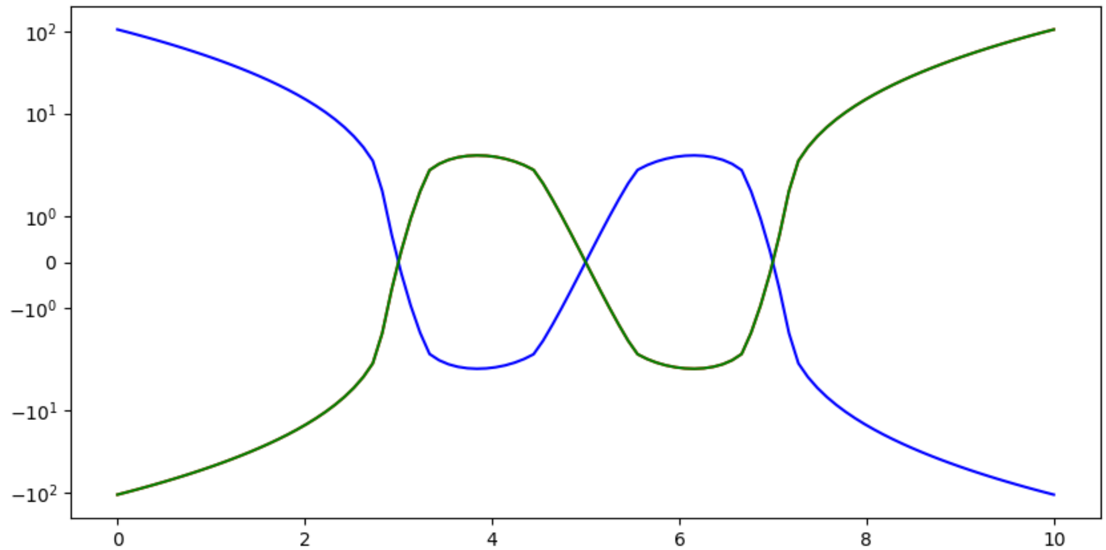
$n = 6 = 3 + 3$



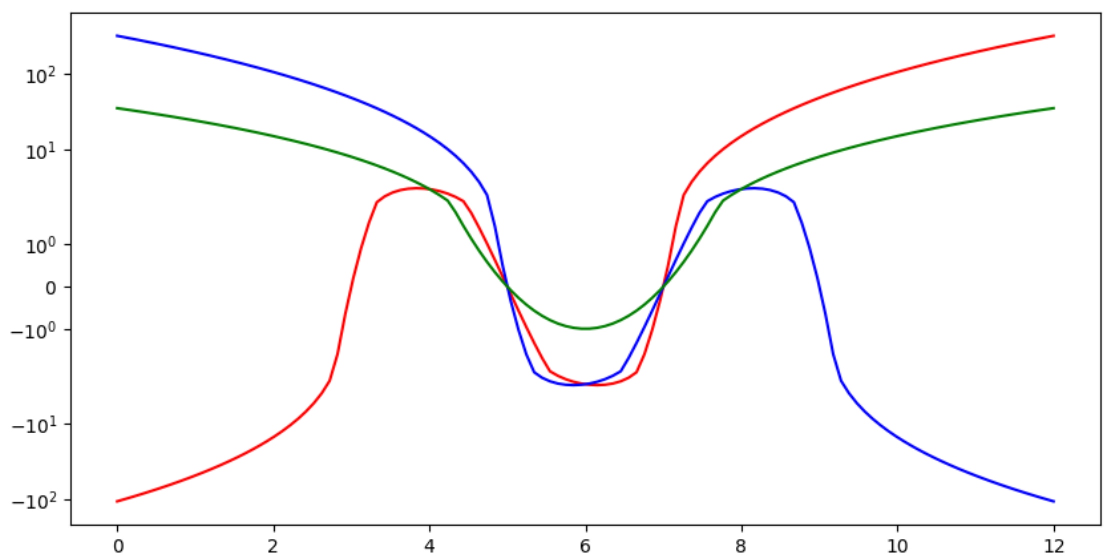
$n = 8 = 3 + 5$



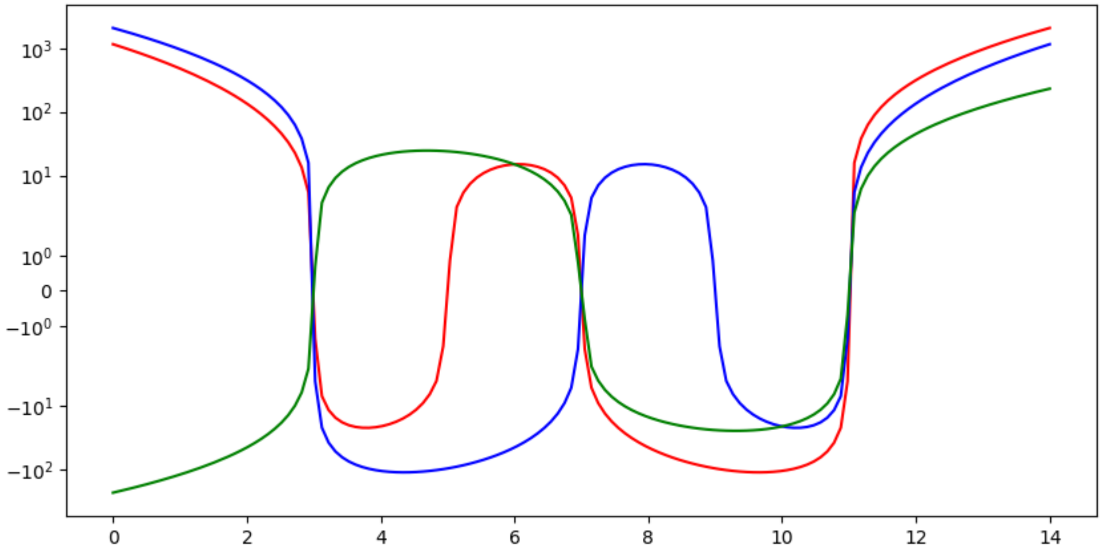
$n = 10 = 3 + 7 = 5 + 5$



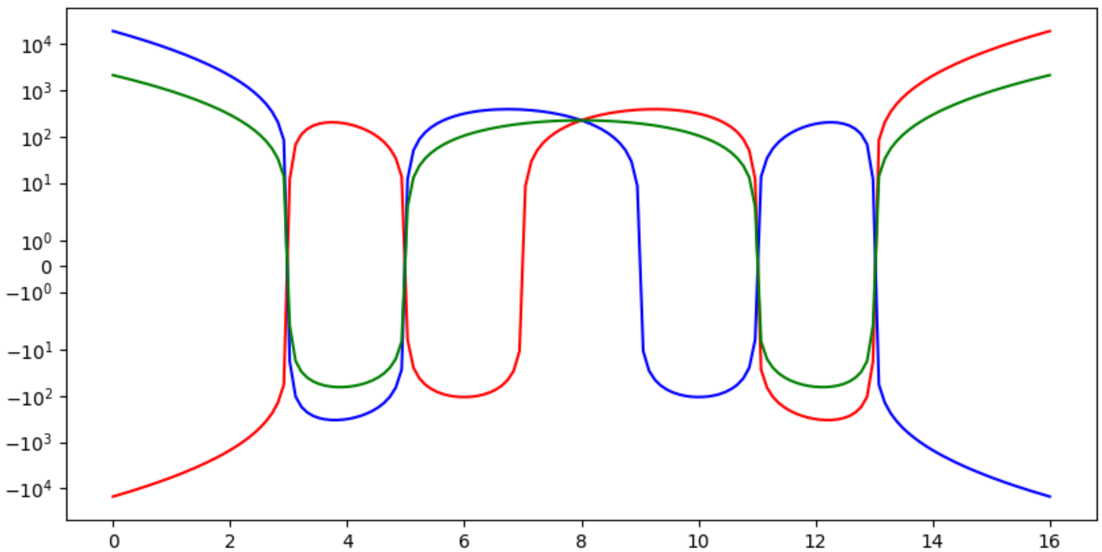
$n = 12 = 5 + 7$



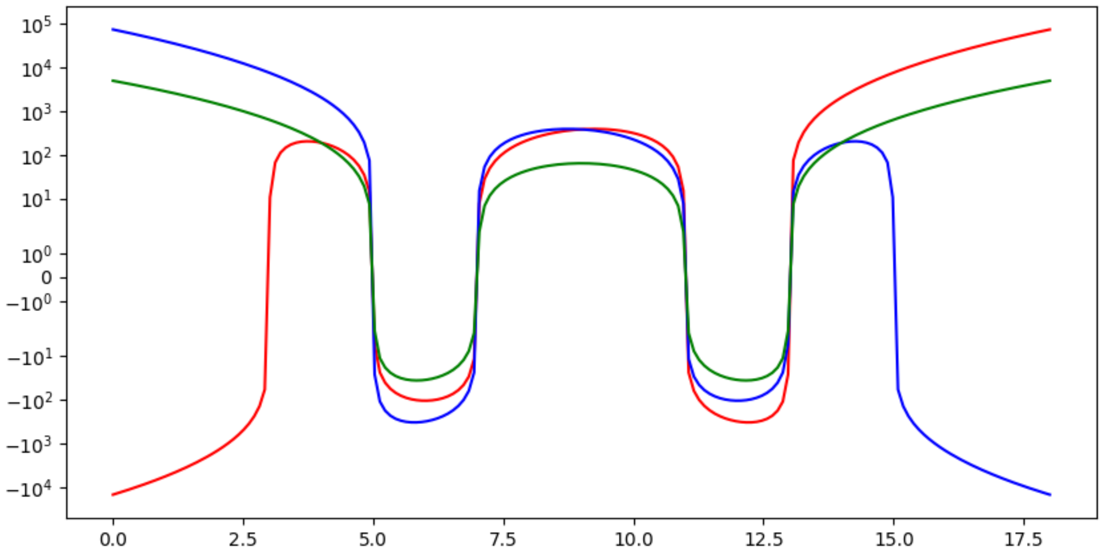
$n = 14 = 3 + 11 = 7 + 7$



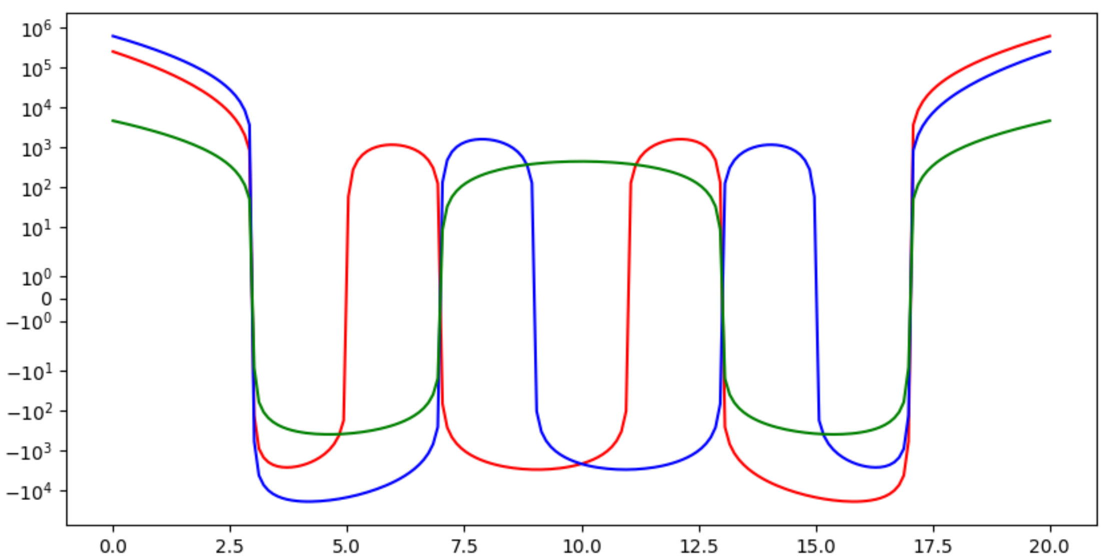
$n = 16 = 3 + 13 = 5 + 11$



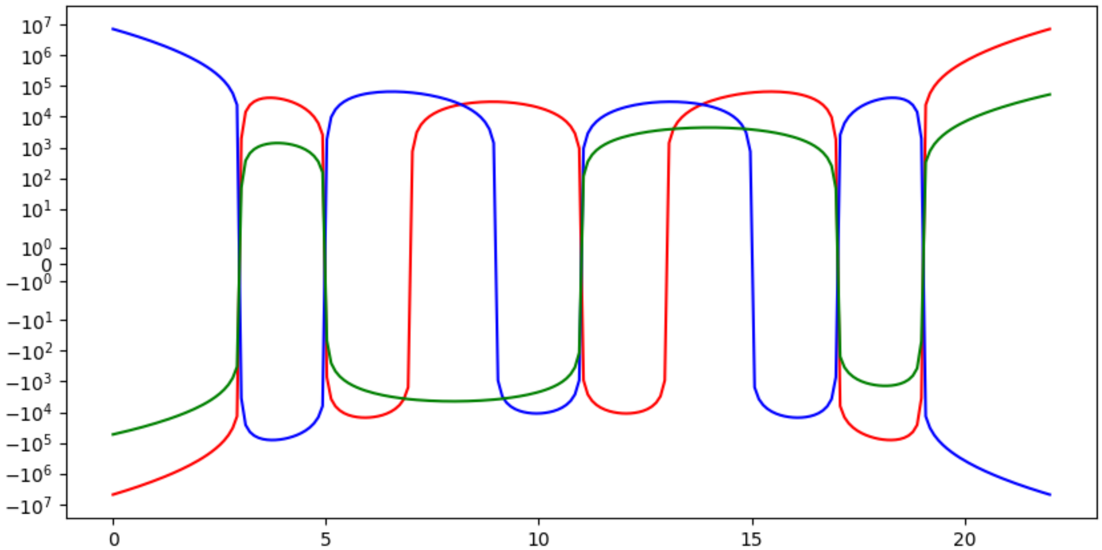
$n = 18 = 5 + 13 = 7 + 11$



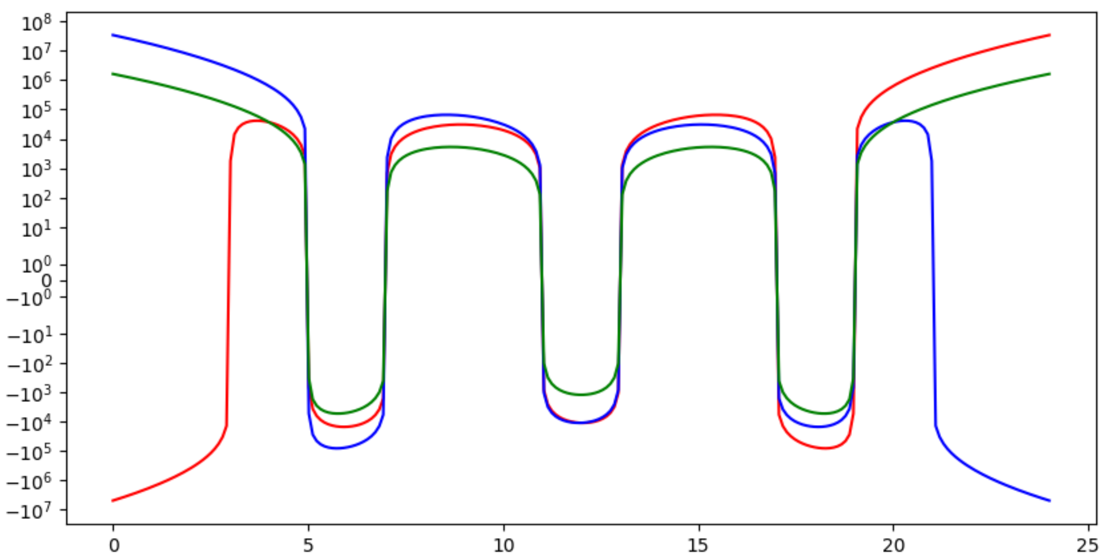
$n = 20 = 3 + 17 = 7 + 13$



$n = 22 = 3 + 19 = 5 + 17 = 11 + 11$



$n = 24 = 5 + 19 = 7 + 17 = 11 + 13$



Les graphiques pour les nombres de 26 à 104 ainsi que pour 98 sont fournis en fin de note.

Parité ?

L'analyse de ces graphiques montre que :

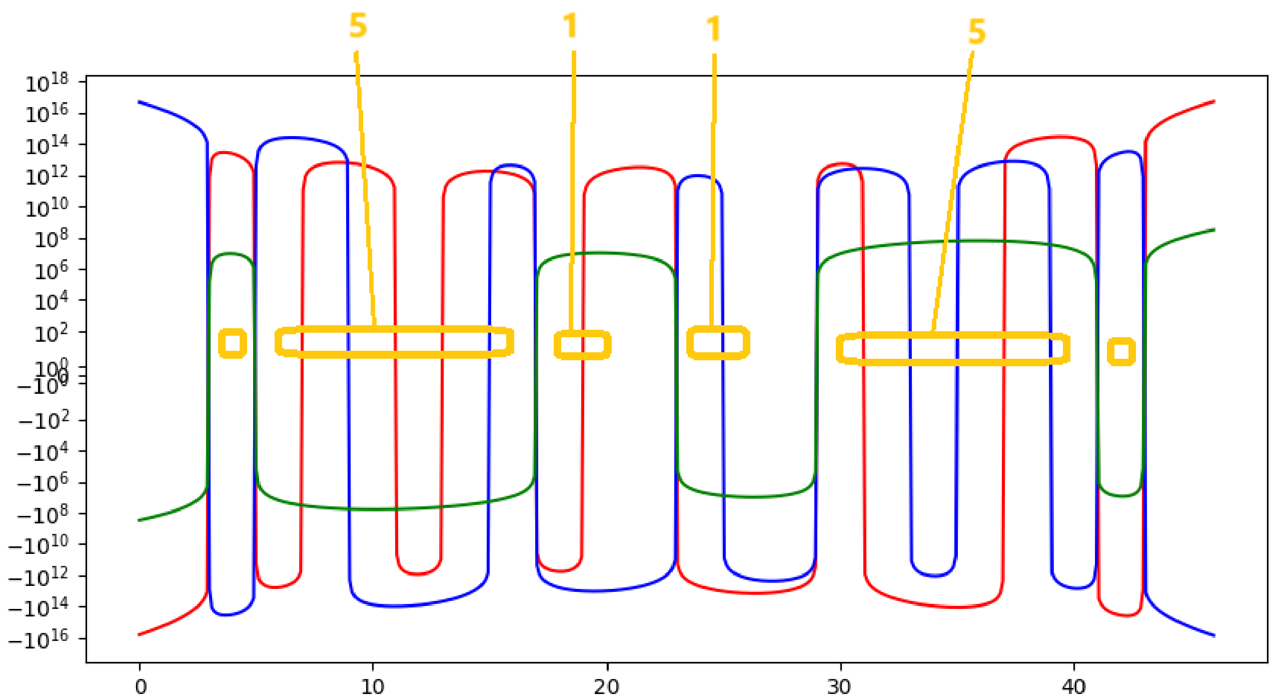
1) a) pour les nombres pairs doubles de nombres premiers, la courbe verte (le pgcd) est une courbe impaire ;

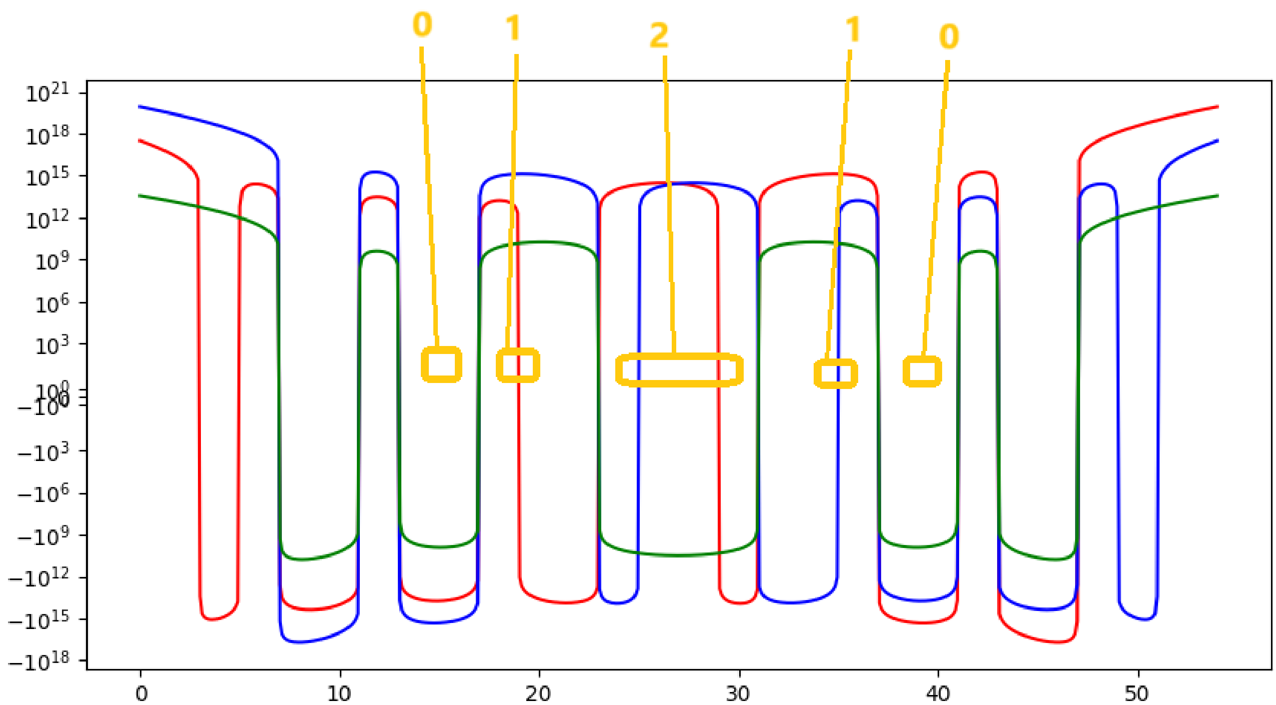
b) si l'on compte, entre deux annulations de la courbe verte, le nombre cumulé de branches (i.e. de portions de courbes) rouges et bleues, il semble ne jamais changer de parité (l'axe des ordonnées se voit par le passage des négatifs aux positifs à gauche de la figure, il se situe à peu près au milieu de la figure horizontalement)

2) a) pour les nombres pairs doubles de nombres composés, la courbe verte (le pgcd) est une courbe paire ;

b) si l'on compte, entre deux annulations de la courbe verte, le nombre cumulé de branches (i.e. de portions de courbes) rouges et bleues, sa parité alterne, du centre vers les bornes de l'intervalle, mais cette alternance ne va pas jusqu'aux bornes, malheureusement.

Illustrons cela sur deux graphiques $n = 46$ est le double du nombre premier 23, tandis que $n = 54$ est le double du nombre composé 27.





Essayons alors d'étudier le signe du polynôme $R(x)$ pgcd de polynômes des polynômes $P(x)$ et de $Q(x)$,

$$R(x) = P(x) \wedge Q(x).$$

Le polynôme $R(x)$ pgcd de polynômes s'annule lorsque les deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ s'annulent simultanément, et fournit donc les décomposants de Goldbach de n.

Étudions les degrés, coefficients et signes aux 2 bornes 4 et $n/2$ des différents polynômes, pour n variant de 6 à 24.

Dans le tableau ci-dessous, sont fournis les degrés des polynômes $P(x)$ et $R(x)$, la parité de $\pi(x-2)-1$ (on prend $x-2$ car on veut éviter la décomposition $1+(n-1)$ lorsque $n-1$ est premier ; on note que cette parité est celle du degré de $P(x)$), et enfin $s(4)$ et $s(n/2)$ sont les signes positif ou négatif en $x = 4$ et $x = n/2$ de l'image $R(x)$ [3].

x	degré de P	degré de R	parité de deg. de P	signe de R en 4	signe de R en $n/2$	x	degré de P	degré de R	parité de deg. de P	signe de R en 4	signe de R en $n/2$
16	5	4	−	−	+	62	16	5	+	+	0
18	5	4	−	+	+	64	17	10	−	−	−
20	6	4	+	−	+	66	17	12	−	+	+
22	7	5	−	+	0	68	17	4	−	+	+
24	7	6	−	+	−	70	18	10	+	−	−
26	8	5	+	+	0	72	18	12	+	+	+
28	8	4	+	+	+	74	19	9	−	+	0
30	8	6	+	+	−	76	20	10	+	−	−
32	9	4	−	−	+	78	20	14	+	+	−
34	10	7	+	+	0	80	20	8	+	+	+
36	10	8	+	+	+	82	21	9	−	+	0
38	10	3	+	−	0	84	21	16	−	+	+
40	11	6	−	−	−	86	22	9	+	+	0
42	11	8	−	+	+	88	22	8	+	+	+
44	12	6	+	−	−	90	22	18	+	+	−
46	13	7	−	+	0	92	23	8	−	−	+
48	13	10	−	+	−	94	23	9	−	−	0
50	14	8	+	+	−	96	23	14	−	+	−
52	14	6	+	+	−	98	23	6	−	+	−
54	14	10	+	+	−	100	24	12	+	−	+
56	15	6	−	−	−	102	24	16	+	+	+
58	15	7	−	−	0	104	25	10	−	−	−
60	15	12	−	+	+						

En analysant les éléments de ce tableau, on a éliminé des colonnes redondantes : le coefficient dominant de $Q(x)$ est la parité du degré de $P(x)$, le degré de $R(x)$ est un nombre pair pour les nombres pairs doubles de nombres premiers ; il vaut 5 pour 22 car 22 a en quelque sorte 2 décompositions et demi : une triviale 11+11, et 2 non triviales $3 + 19$, et $5 + 17$.

Si n est le double d'un nombre premier, le polynôme produit $R(x)$ s'annule "au centre" de l'intervalle $[0, n]$, sur ce qu'on appelle le décomposant trivial de n. En effet, dans un tel cas, $n = (n/2) + (n/2)$ est une décomposition de Goldbach de n, dans la mesure où $n/2$ est un nombre premier. Ceci se voit par les 0 en dernière colonne du tableau pour les nombres pairs doubles de nombres premiers.

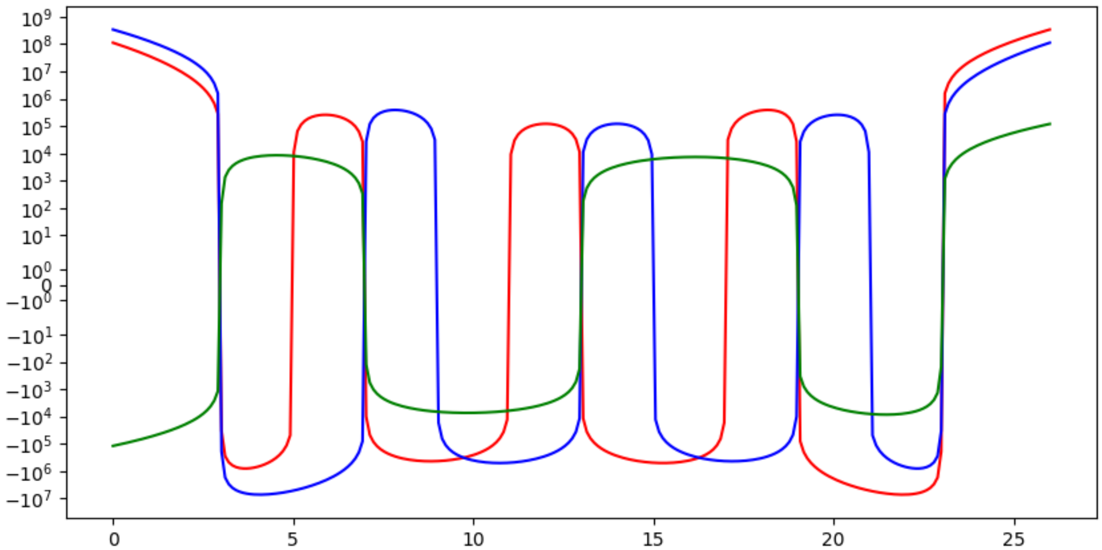
Le fait de trouver pour $R(x)$ des valeurs de signes opposés en 4 et $n/2$ assurerait qu'il y a une annulation au moins dans cet intervalle $[4, n/2]$, et une telle annulation ne peut avoir lieu que sur une décomposition de Goldbach, les polynômes ayant été fabriqués pour cela.

Pour certains nombres pairs étudiés ici, on a cette opposition de signe "aux bornes" de l'intervalle $[4, n/2]$ (pour les nombres 16,20,24,30,32, 48, 50, ou 98, par exemple), mais on ne sait pas à quoi l'imputer.

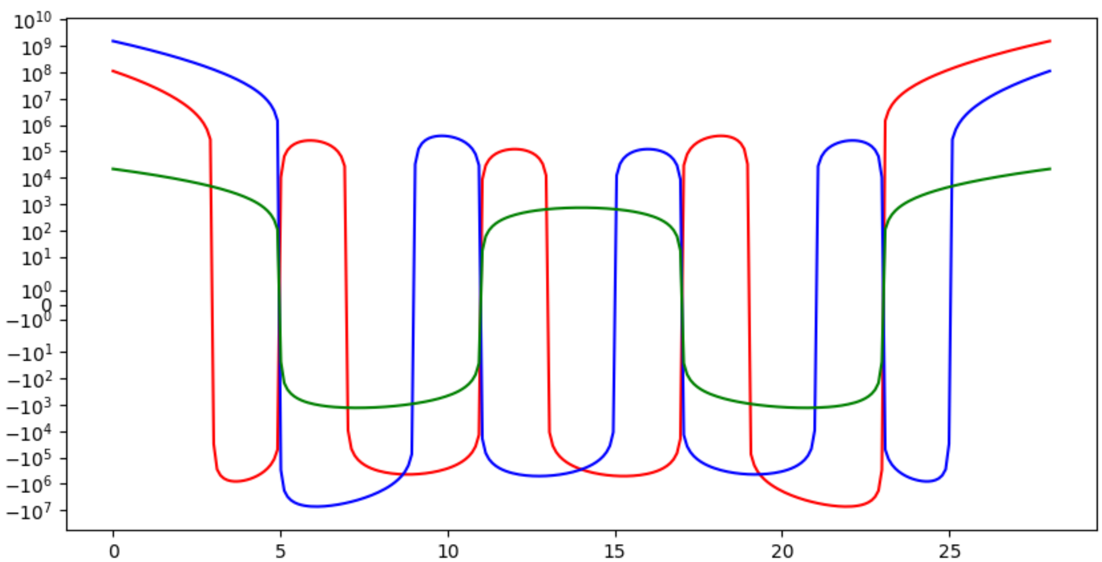
[3] *Remarque : pour 94, python écrit -4 au lieu de 0, le degré 10 du polynôme l'a déjà perdu !*

Annexe : des graphiques supplémentaires.

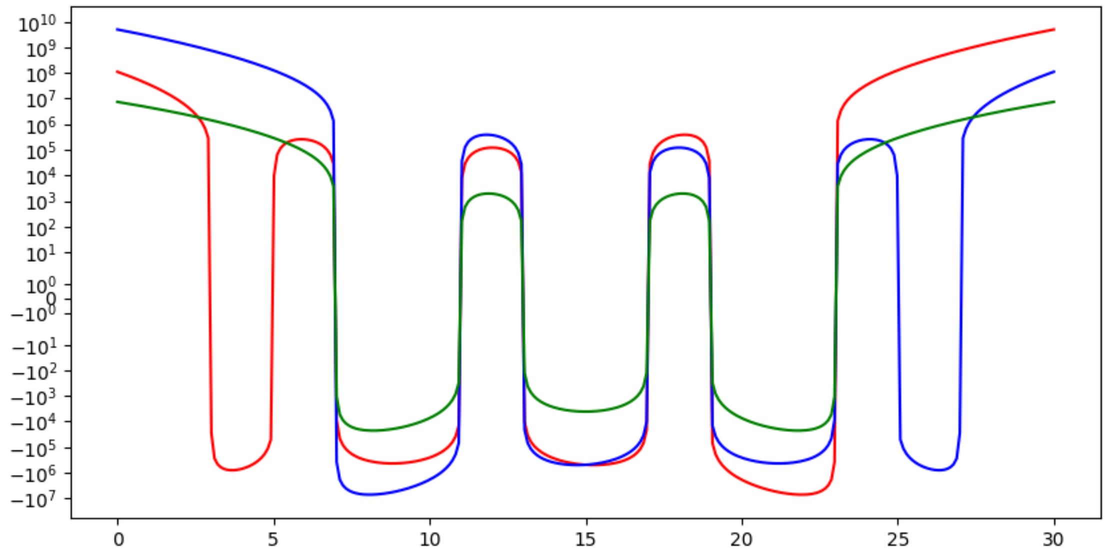
$n = 26 = 3 + 23 = 7 + 19 = 13 + 13$



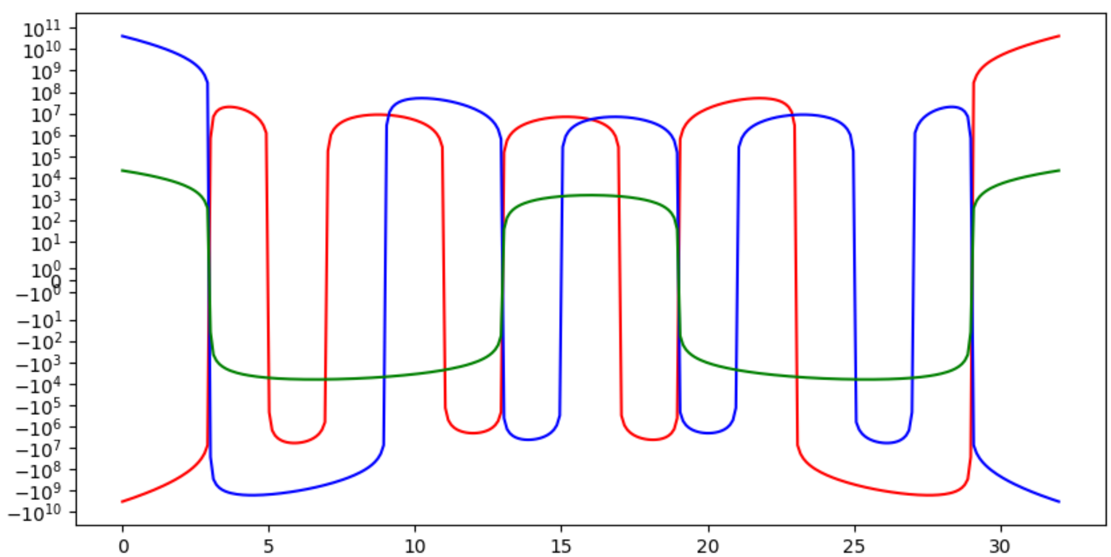
$n = 28 = 5 + 23 = 11 + 17$



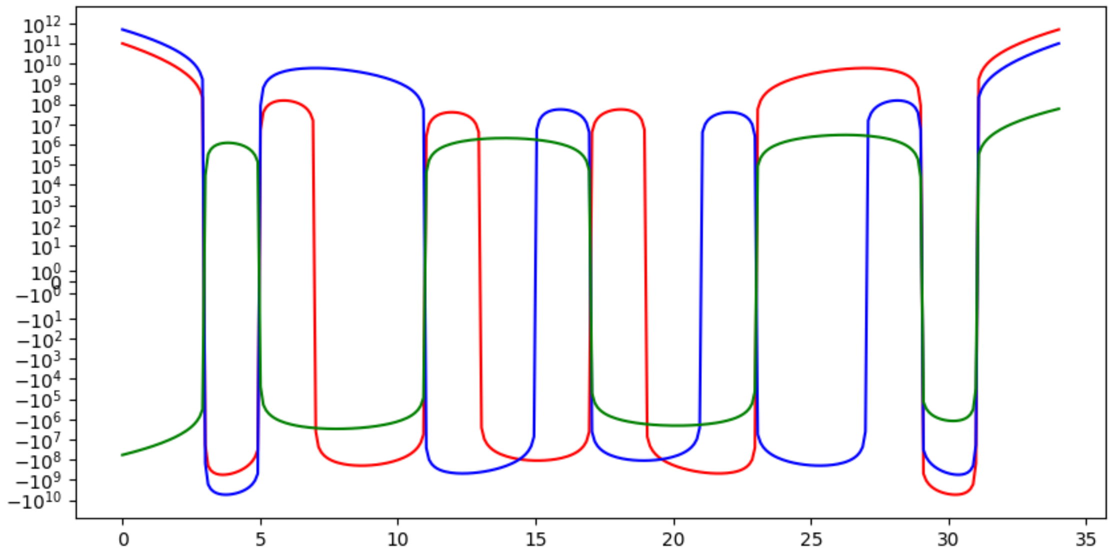
$n = 30 = 7 + 23 = 11 + 19 = 13 + 17$



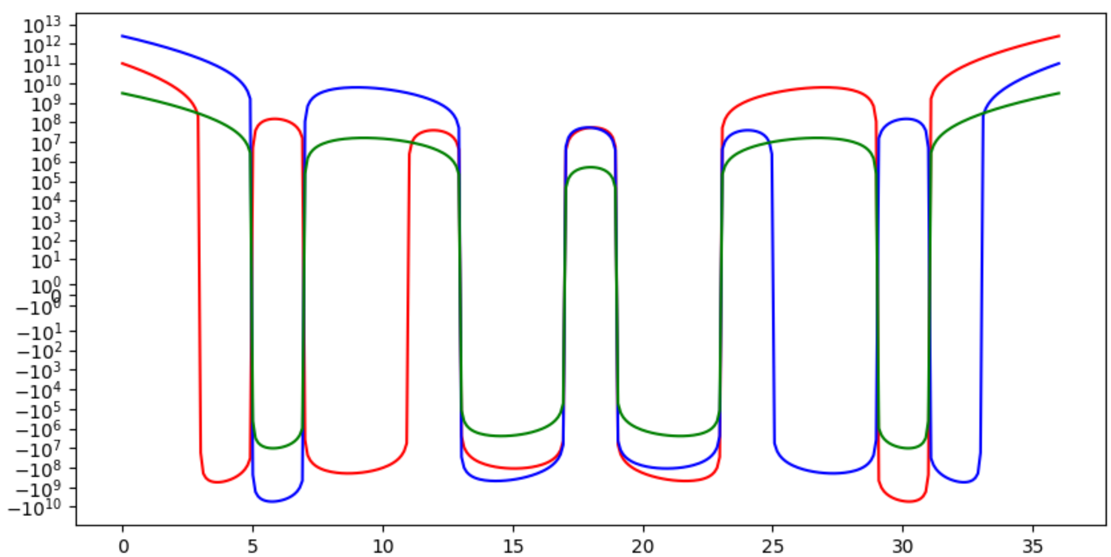
$n = 32 = 3 + 29 = 13 + 19$



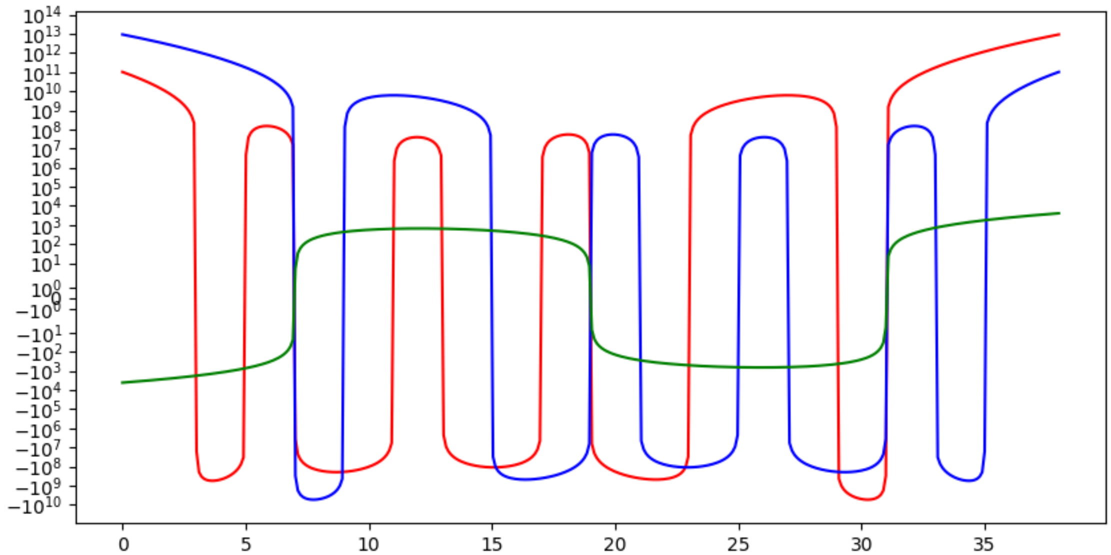
$n = 34 = 3 + 31 = 5 + 29 = 11 + 23 = 17 + 17$



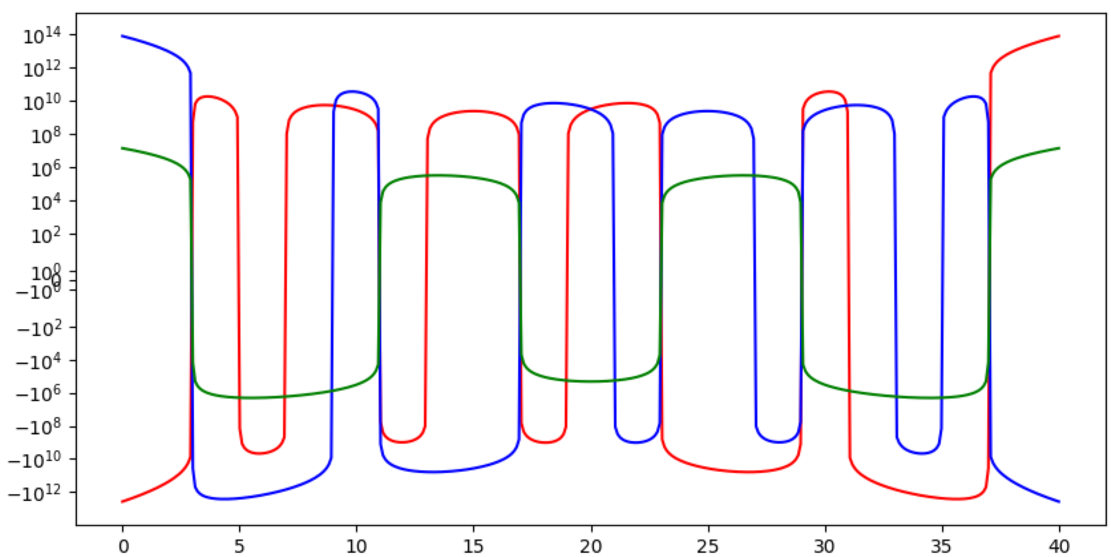
$n = 36 = 5 + 31 = 7 + 29 = 13 + 23 = 17 + 19$



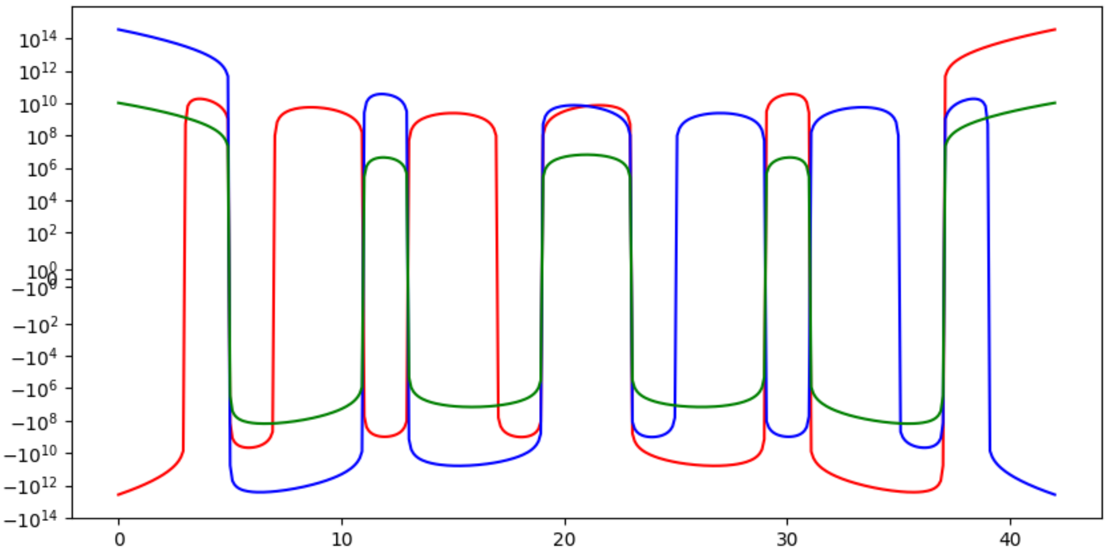
$n = 38 = 7 + 31 = 19 + 19$



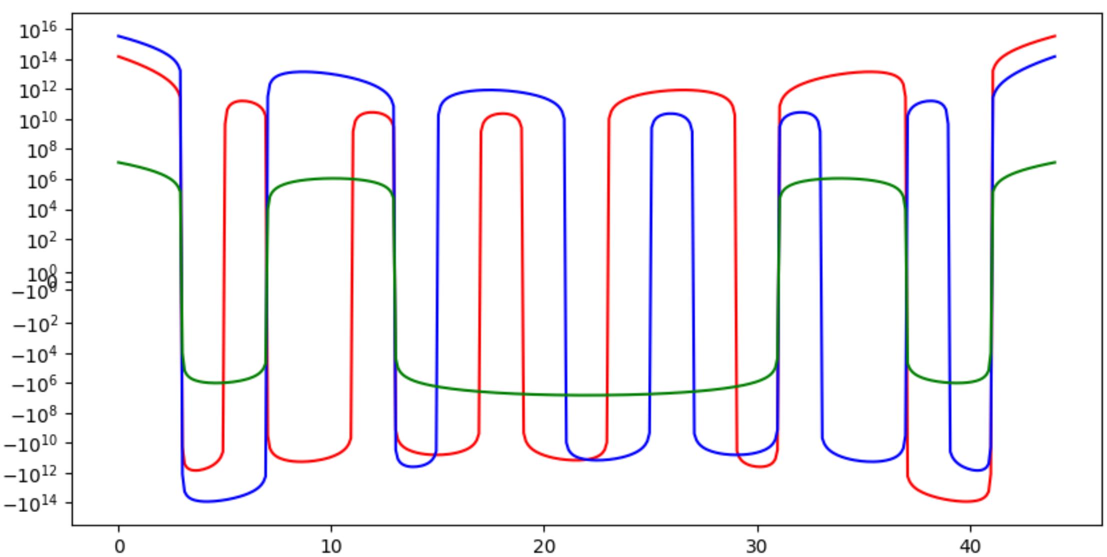
$n = 40 = 3 + 37 = 11 + 29 = 17 + 23$



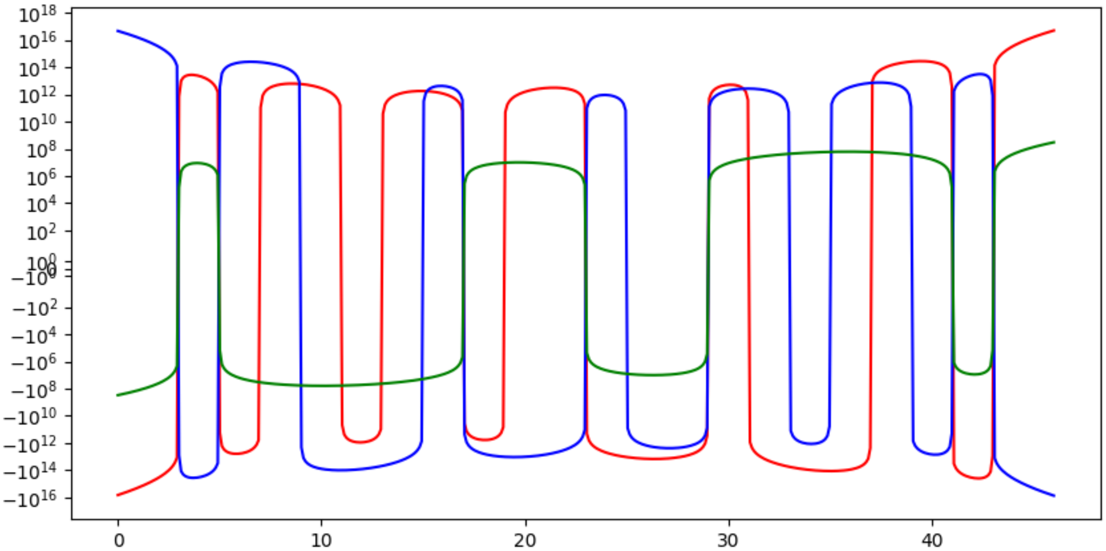
$n = 42 = 5 + 37 = 11 + 31 = 13 + 29 = 19 + 23$



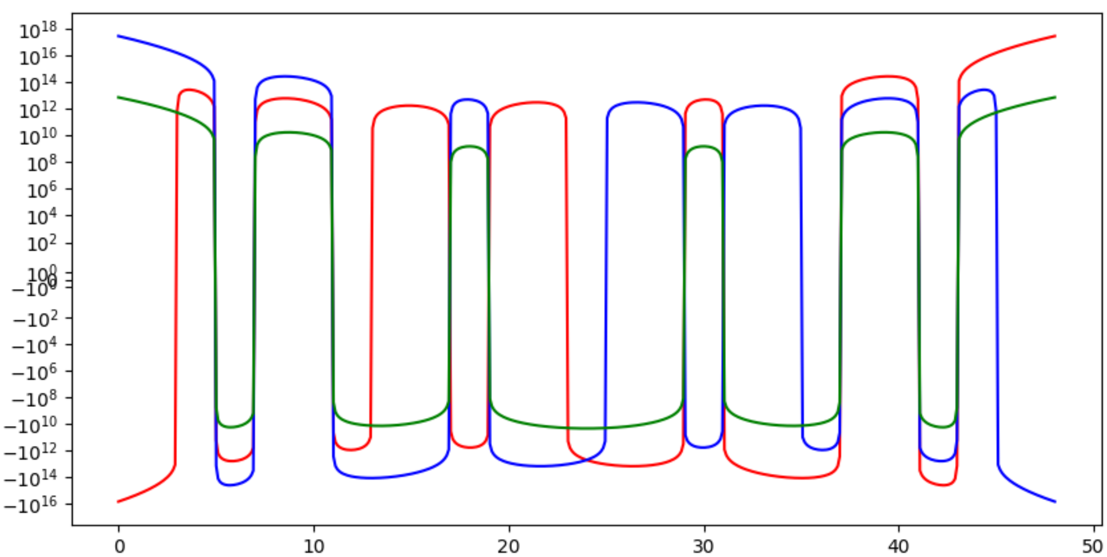
$n = 44 = 3 + 41 = 7 + 37 = 13 + 31$



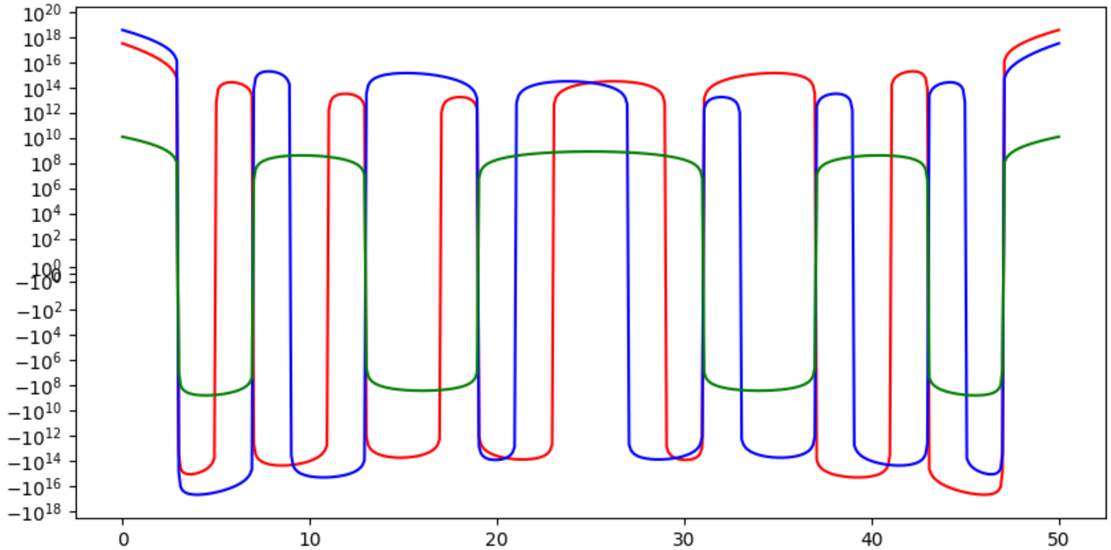
$n = 46 = 3 + 43 = 5 + 41 = 17 + 29 = 23 + 23$



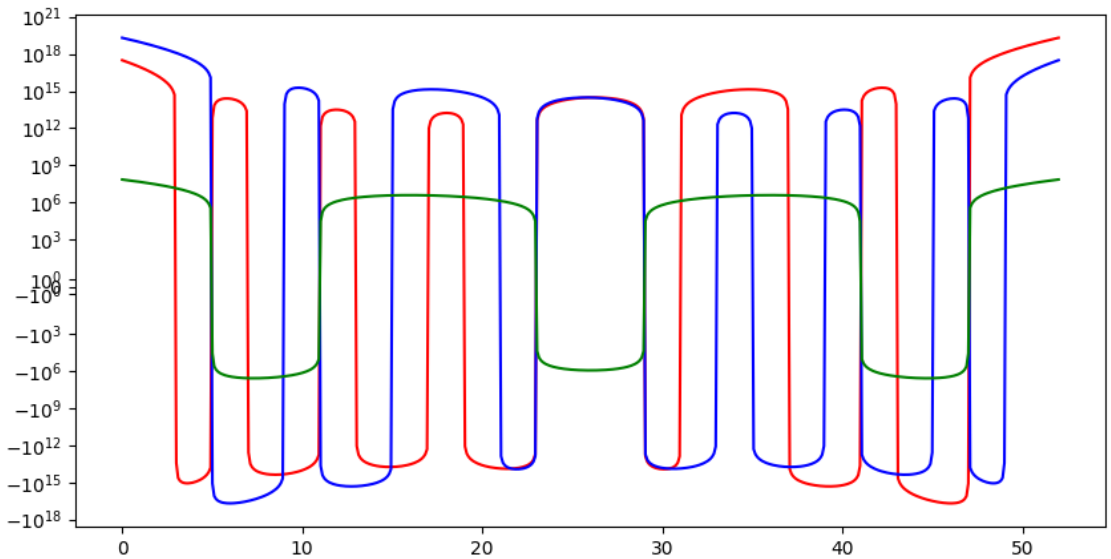
$n = 48 = 5 + 43 = 7 + 41 = 11 + 37 = 17 + 31 = 19 + 29$



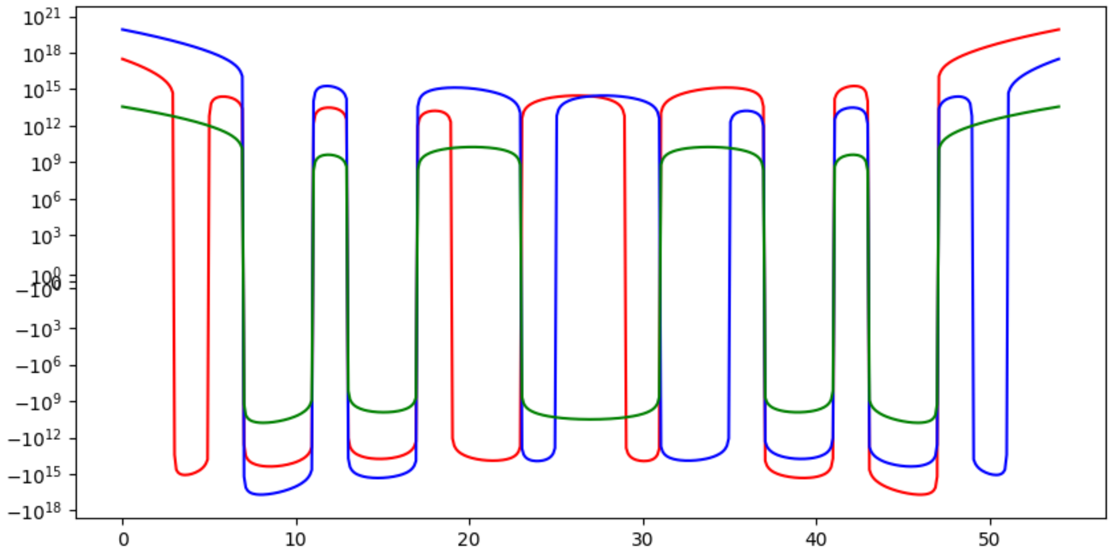
$n = 50 = 3 + 47 = 7 + 43 = 13 + 37 = 19 + 31$



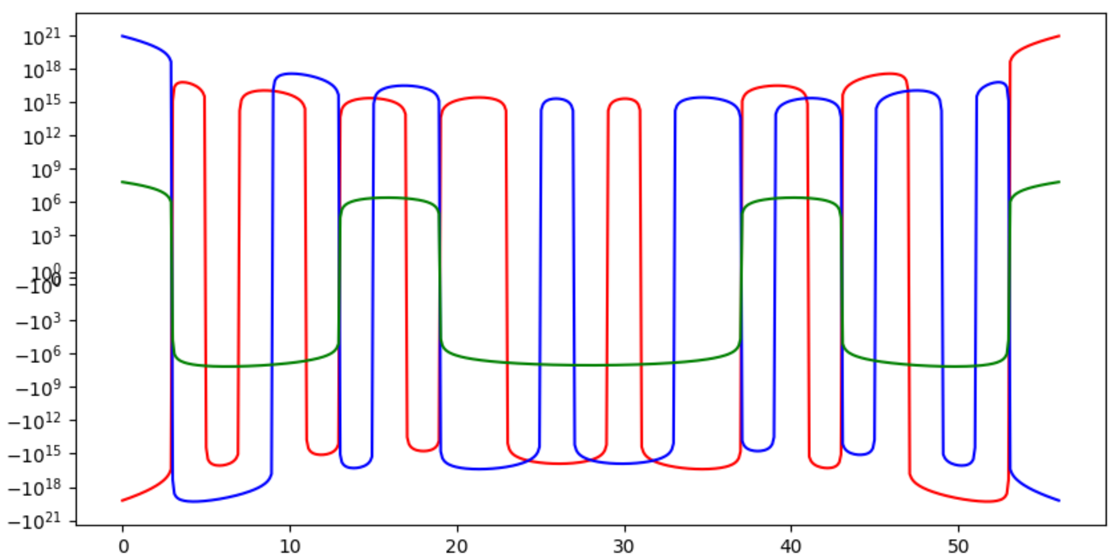
$n = 52 = 5 + 47 = 11 + 41 = 23 + 29$



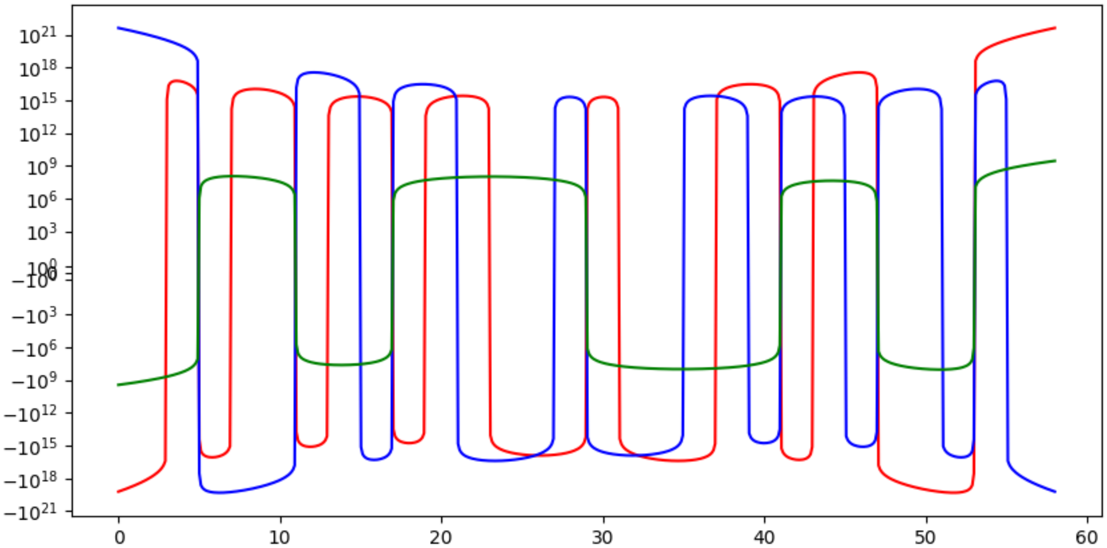
$n = 54 = 7 + 47 = 11 + 43 = 13 + 41 = 17 + 37 = 23 + 31$



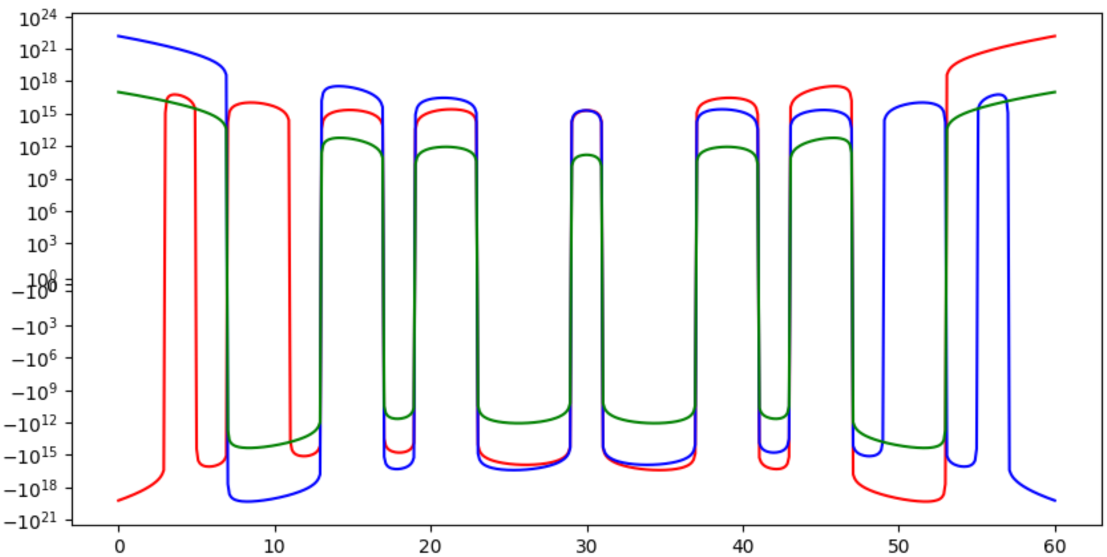
$n = 56 = 3 + 53 = 13 + 43 = 19 + 37$



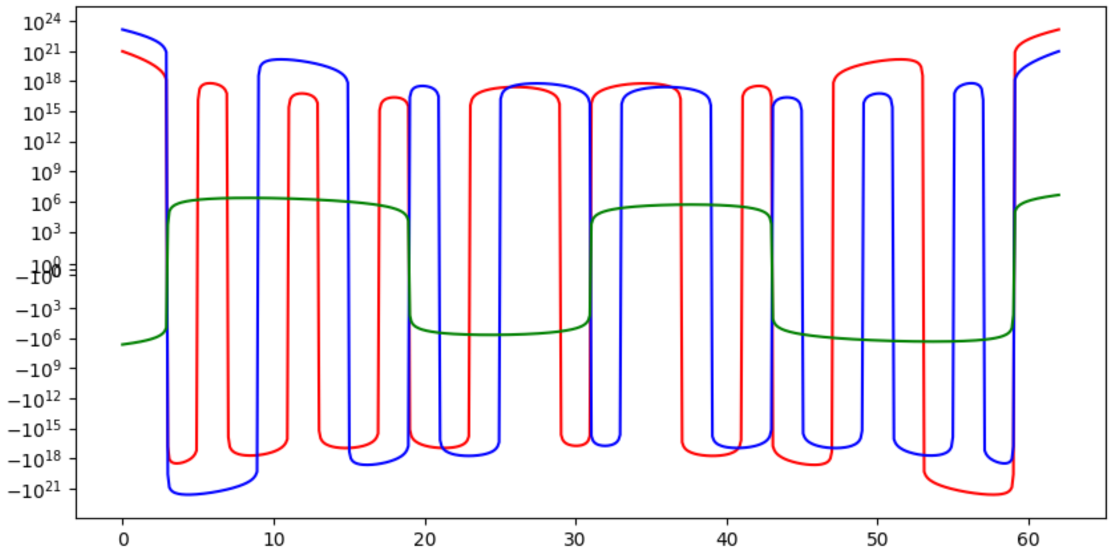
$n = 58 = 5 + 53 = 11 + 47 = 17 + 41 = 29 + 29$



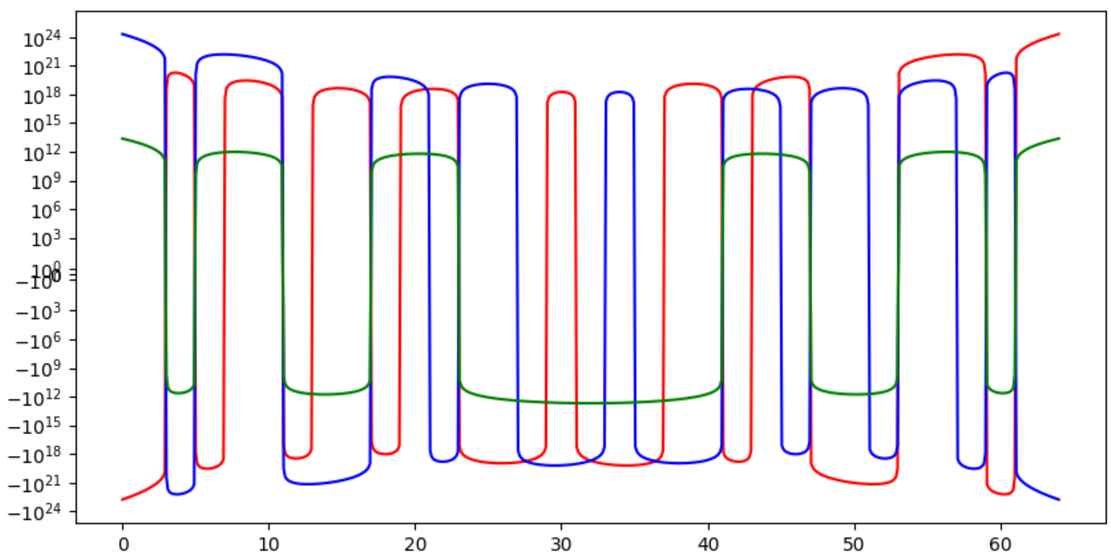
$n = 60 = 7 + 53 = 13 + 47 = 17 + 43 = 19 + 41 = 23 + 37 = 29 + 31$



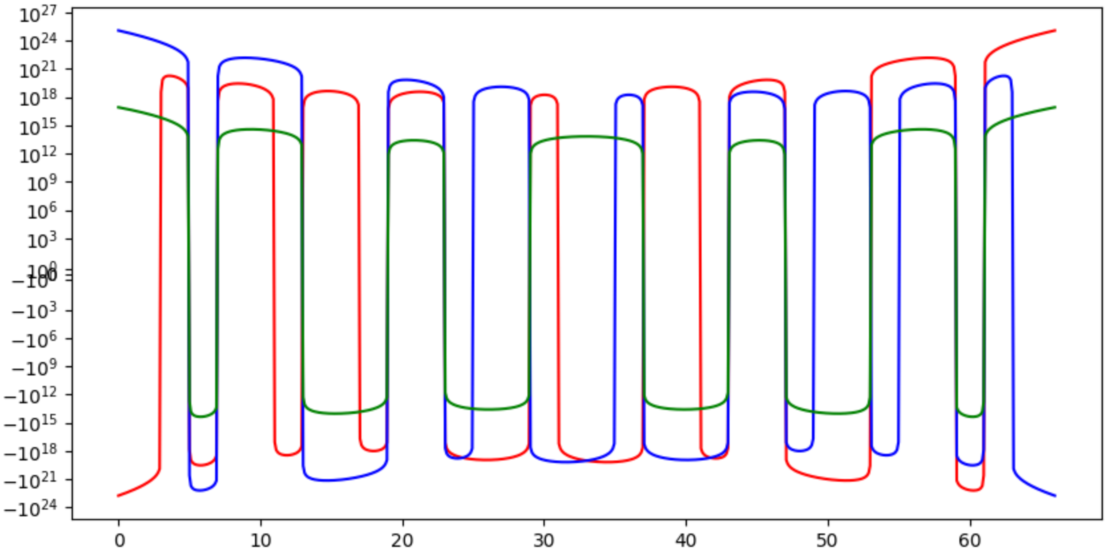
$n = 62 = 3 + 59 = 19 + 43 = 31 + 31$



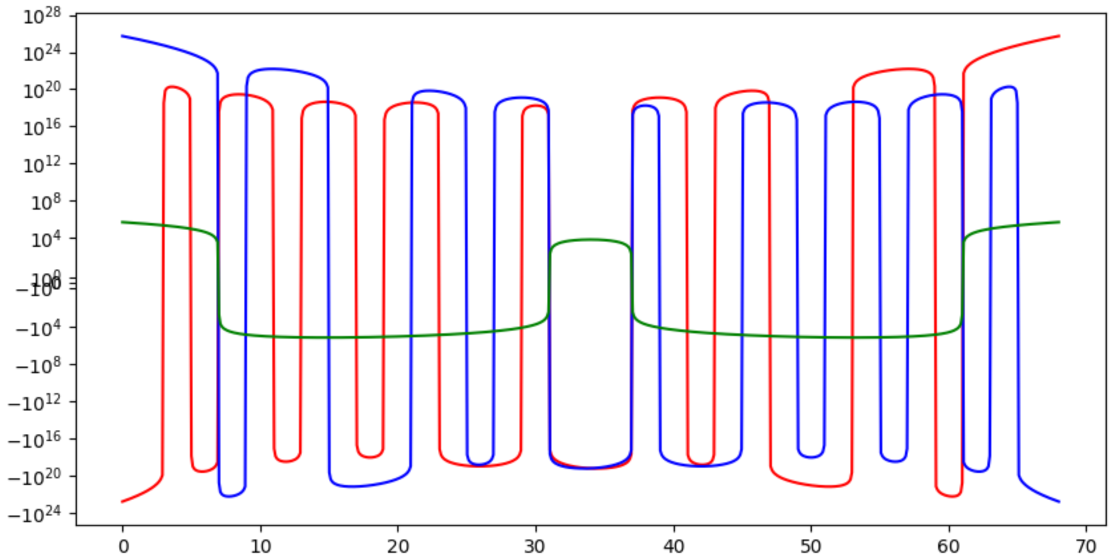
$n = 64 = 3 + 61 = 5 + 59 = 11 + 53 = 17 + 47 = 23 + 41$



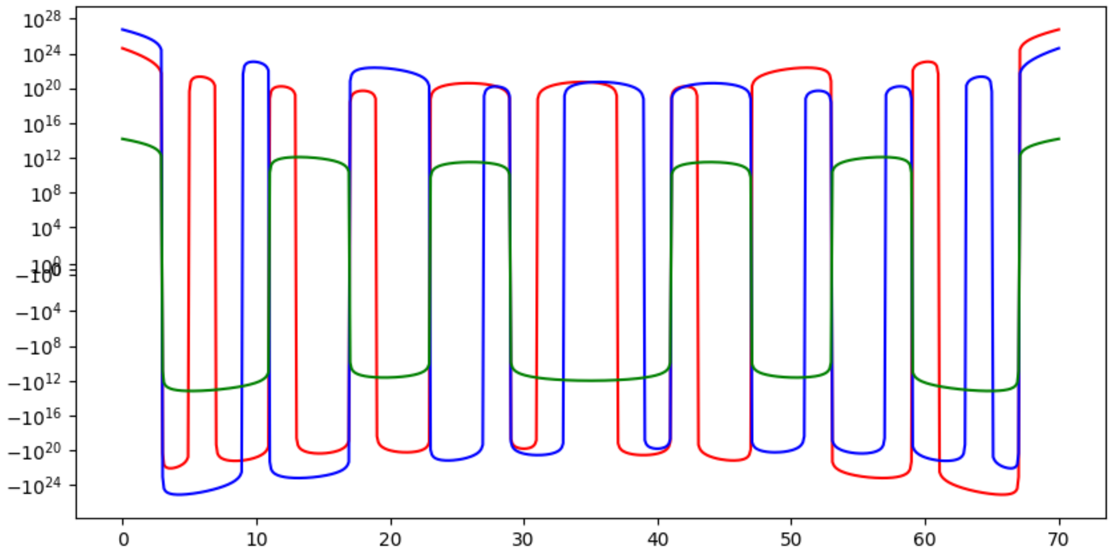
$n = 66 = 5 + 61 = 7 + 59 = 13 + 53 = 19 + 47 = 23 + 43 = 29 + 37$



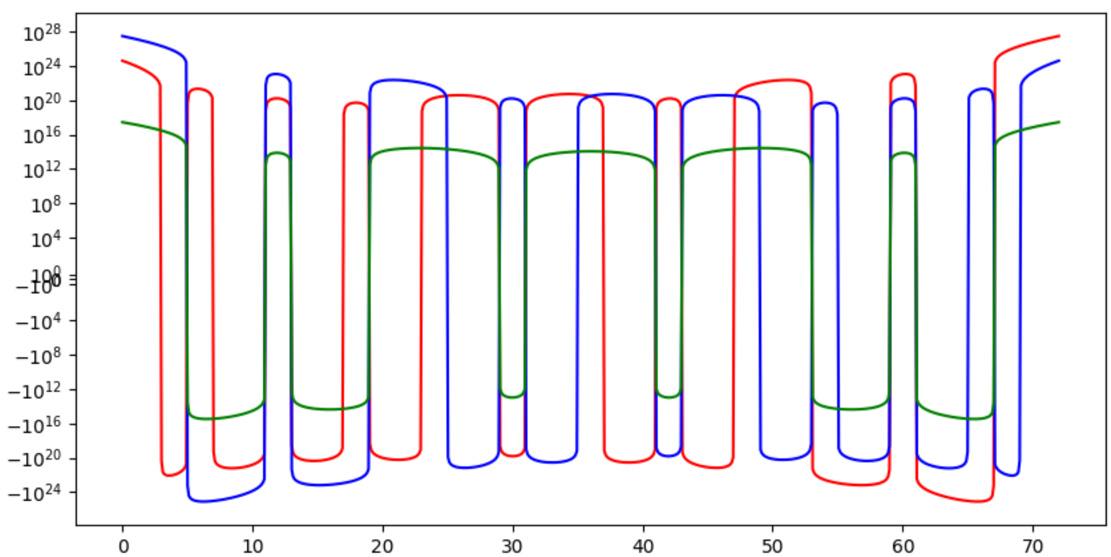
$n = 68 = 7 + 61 = 31 + 37$



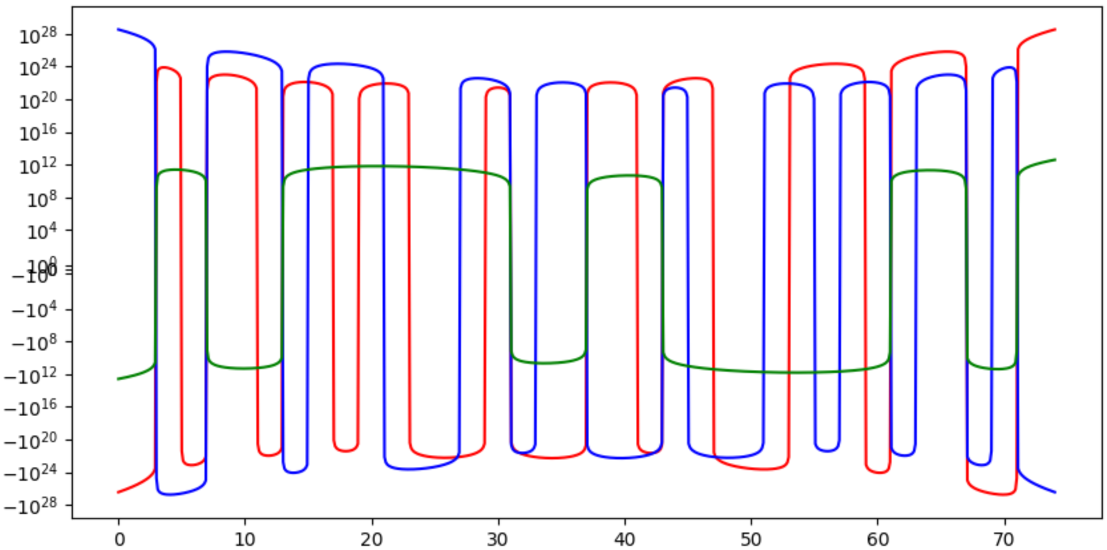
$n = 70 = 3 + 67 = 11 + 59 = 17 + 53 = 23 + 47 = 29 + 41$



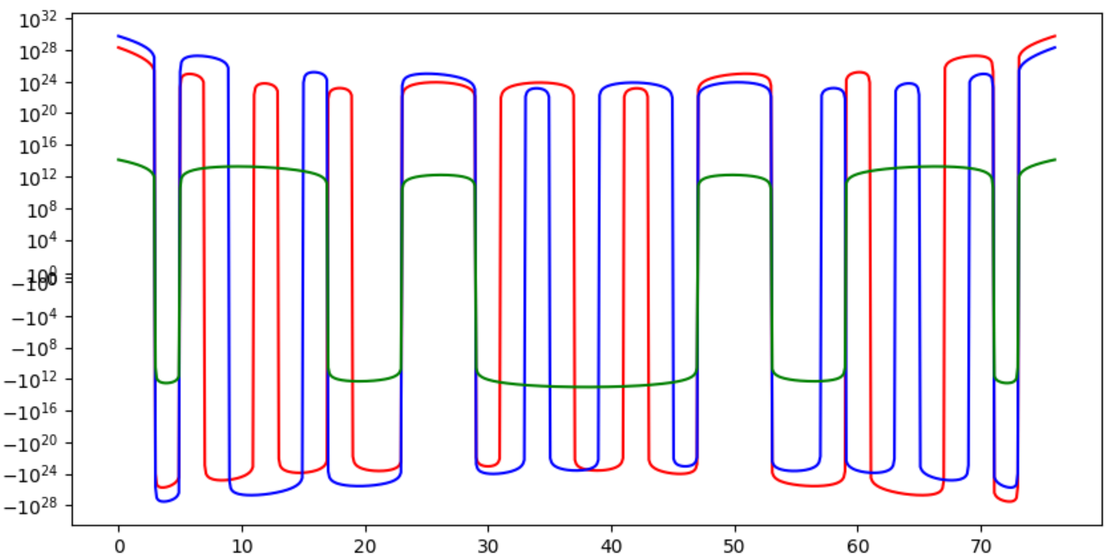
$n = 72 = 5 + 67 = 11 + 61 = 13 + 59 = 19 + 53 = 29 + 43 = 31 + 41$



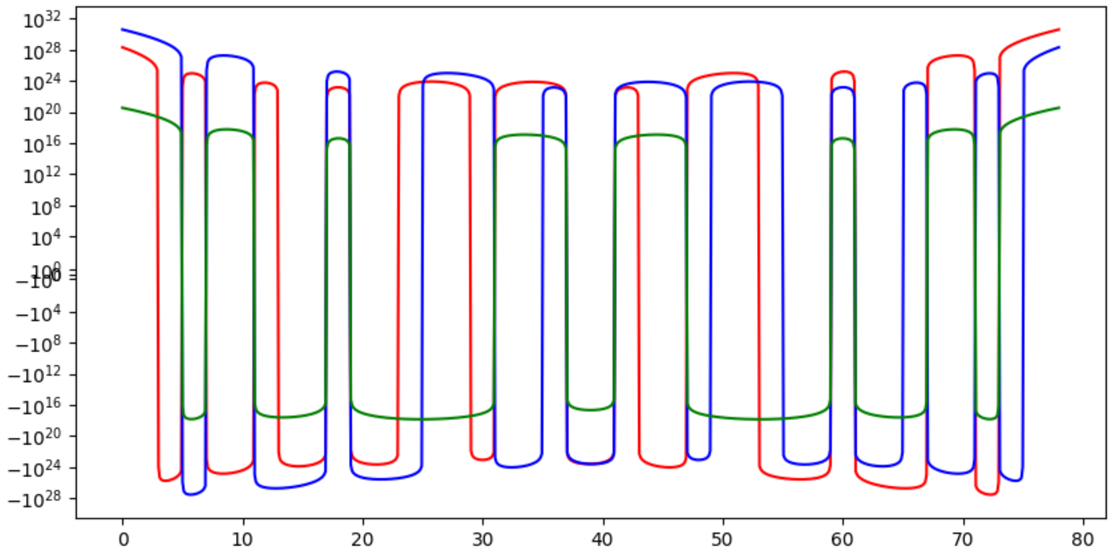
$n = 74 = 3 + 71 = 7 + 67 = 13 + 61 = 31 + 43 = 37 + 37$



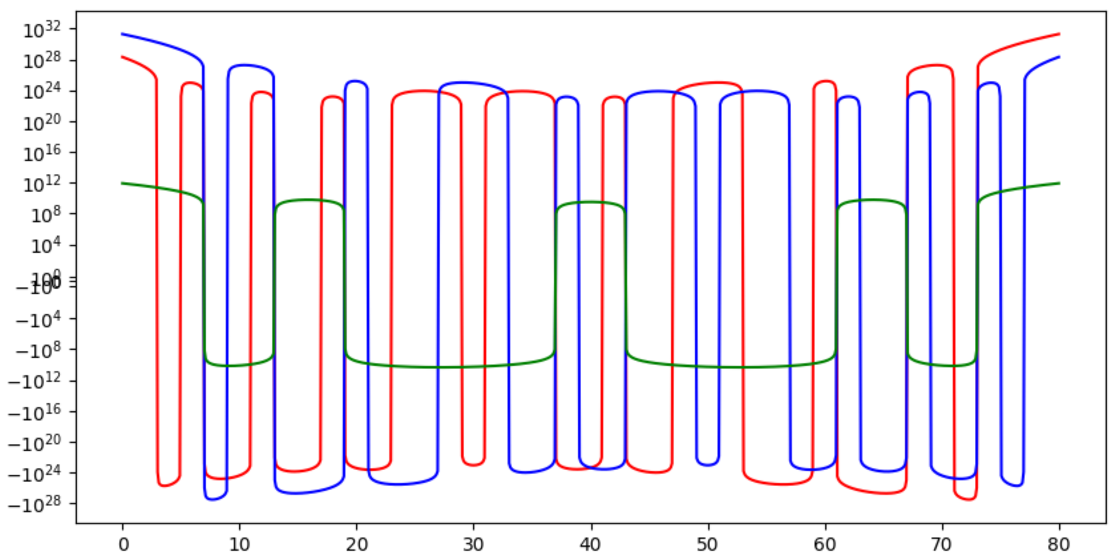
$n = 76 = 3 + 73 = 5 + 71 = 17 + 59 = 23 + 53 = 29 + 47$



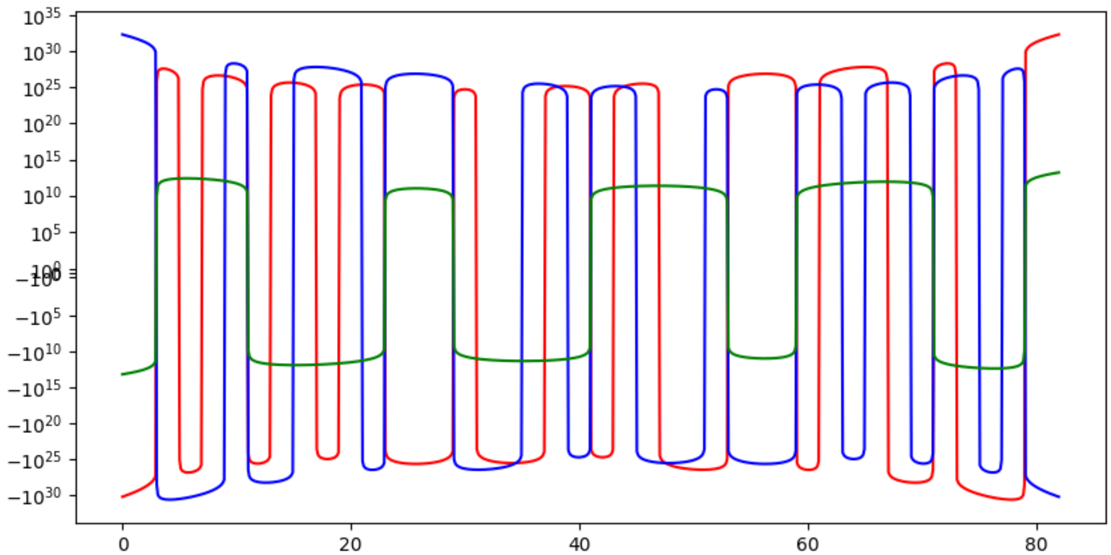
$n = 78 = 5 + 73 = 7 + 71 = 11 + 67 = 17 + 61 = 19 + 59 = 31 + 47 = 37 + 41$



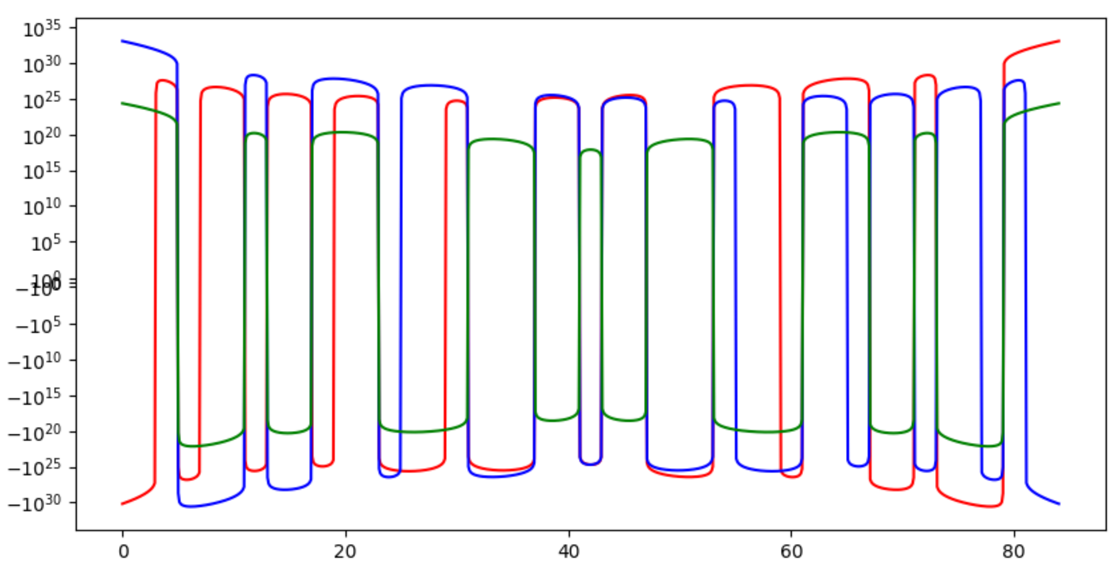
$n = 80 = 7 + 73 = 13 + 67 = 19 + 61 = 37 + 43$



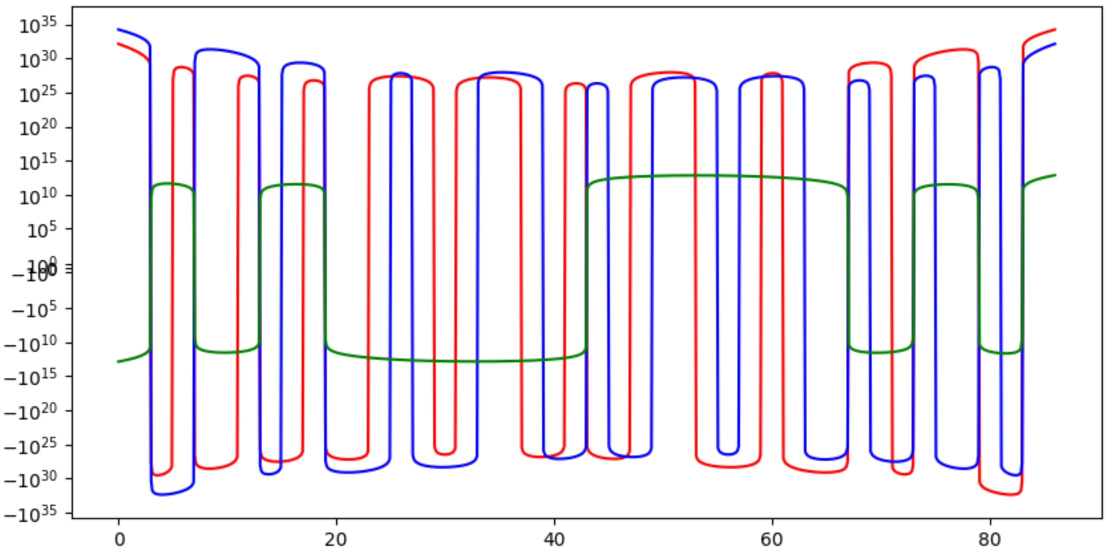
$n = 82 = 3 + 79 = 11 + 71 = 23 + 59 = 29 + 53 = 41 + 41$



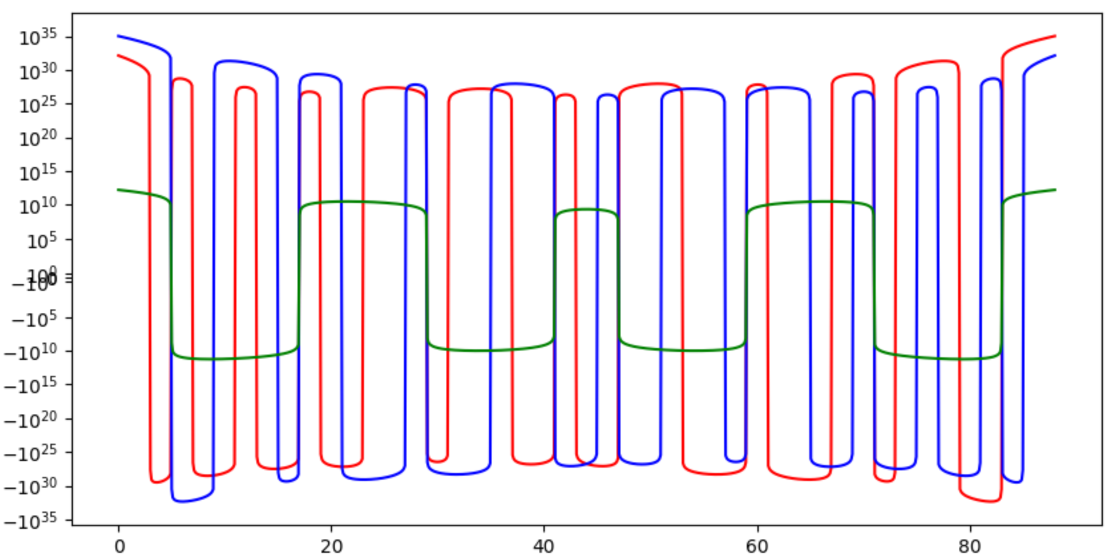
$n = 84 = 5 + 79 = 11 + 73 = 13 + 71 = 17 + 67 = 23 + 61 = 31 + 53 = 37 + 47 = 41 + 43$



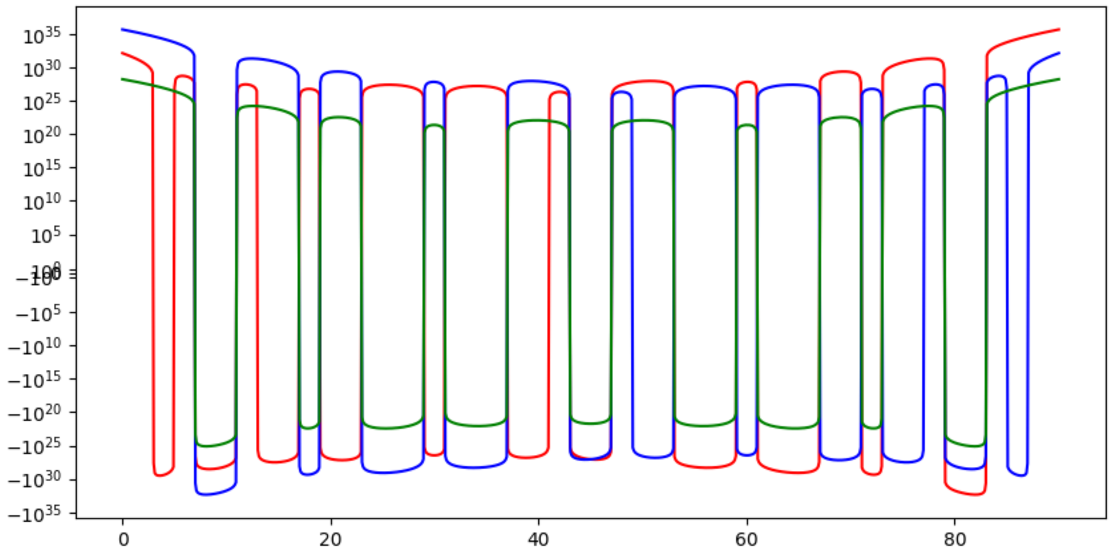
$n = 86 = 3 + 83 = 7 + 79 = 13 + 73 = 19 + 67 = 43 + 43$



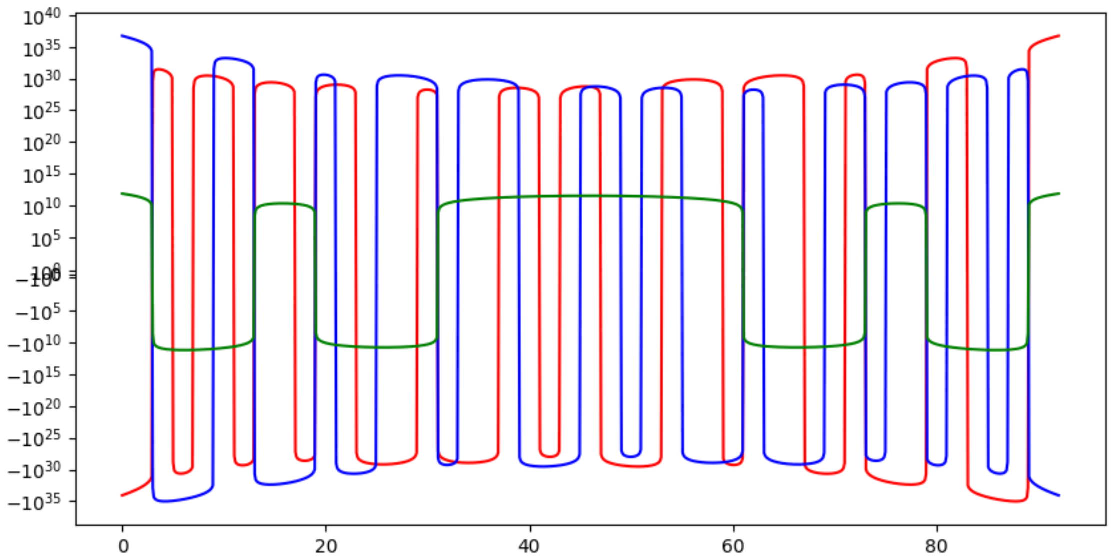
$n = 88 = 5 + 83 = 17 + 71 = 29 + 59 = 41 + 47$



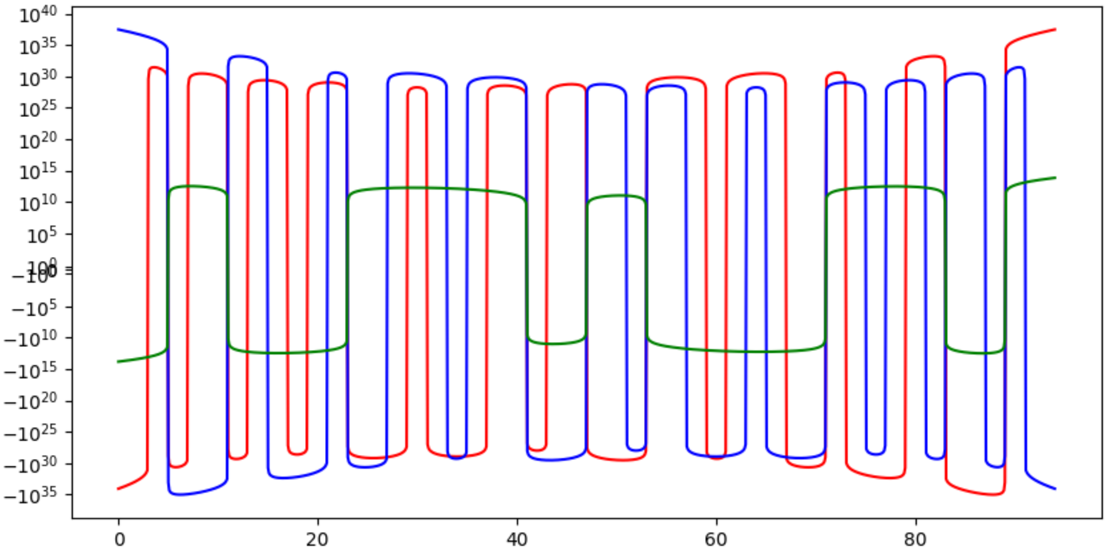
$n = 90 = 7 + 83 = 11 + 79 = 17 + 73 = 19 + 71 = 23 + 67 = 29 + 61 = 31 + 59 = 37 + 53 = 43 + 47$



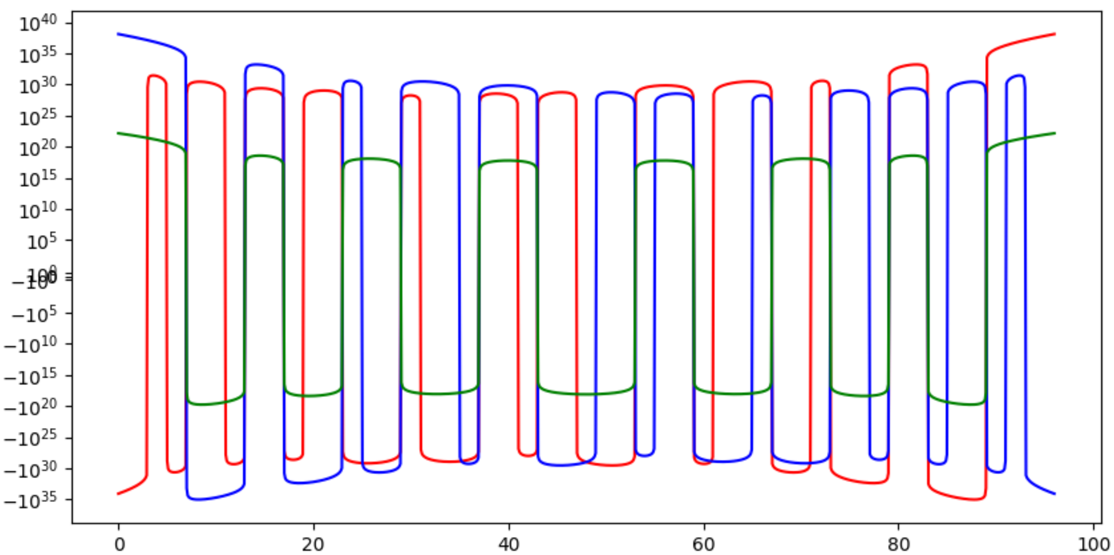
$n = 92 = 3 + 89 = 13 + 79 = 19 + 73 = 31 + 61$



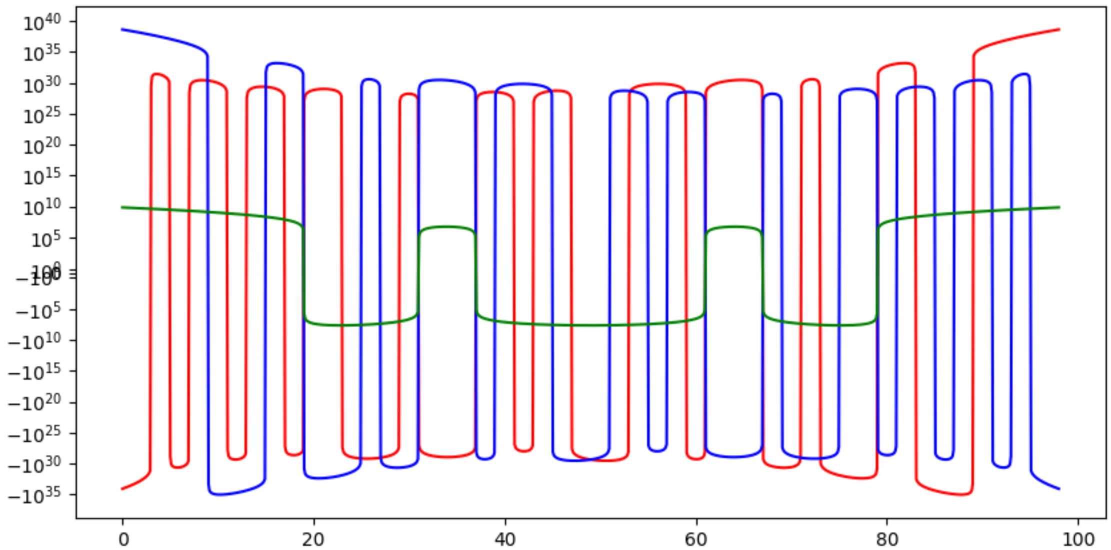
$n = 94 = 5 + 89 = 11 + 83 = 23 + 71 = 41 + 53 = 47 + 47$



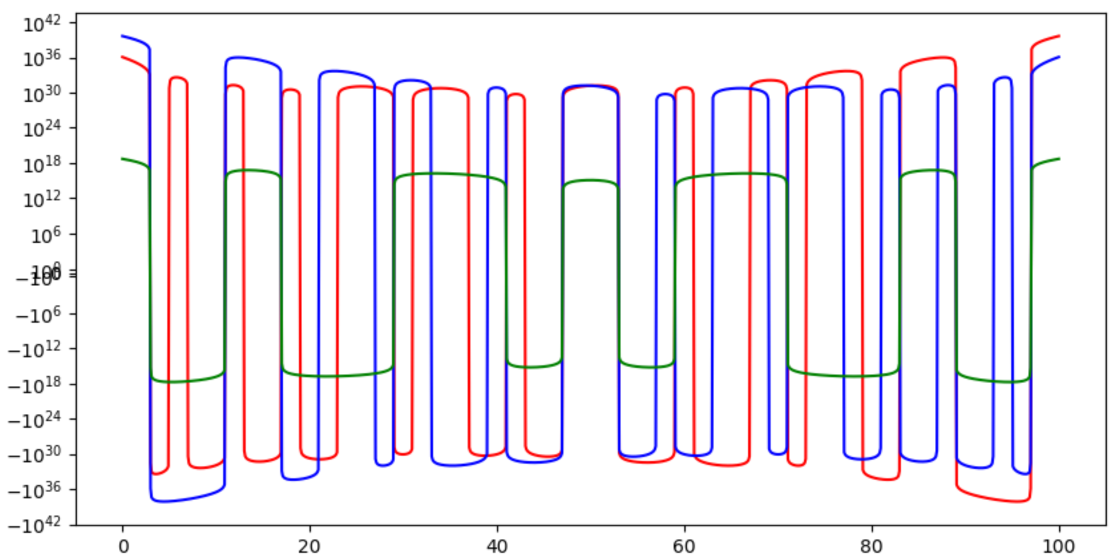
$n = 96 = 7 + 89 = 13 + 83 = 17 + 79 = 23 + 73 = 29 + 67 = 37 + 59 = 43 + 53$



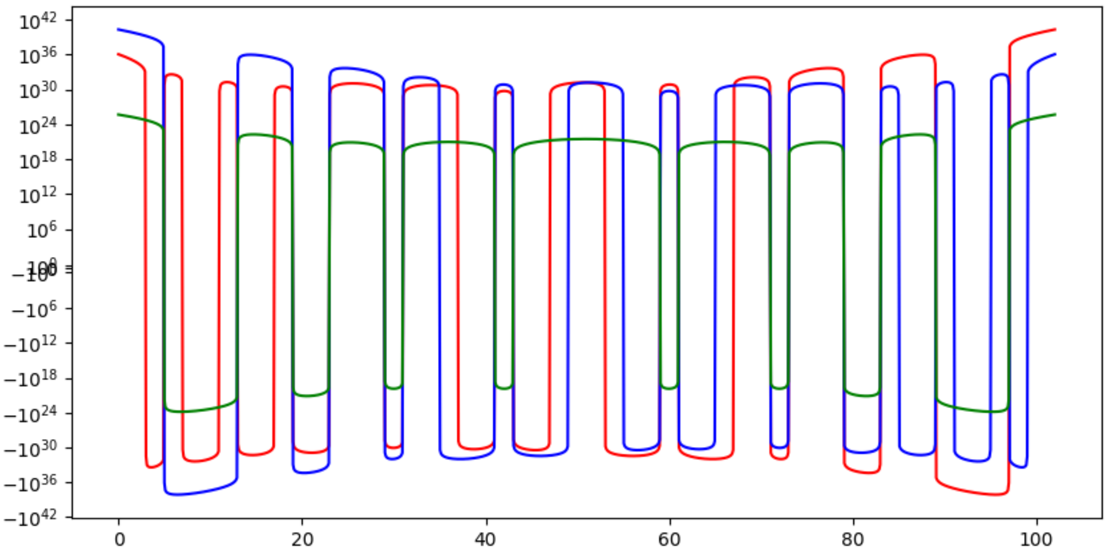
$n = 98 = 19 + 79 = 31 + 67 = 37 + 61$



$n = 100 = 3 + 97 = 11 + 89 = 17 + 83 = 29 + 71 = 41 + 59 = 47 + 53$



$n = 102 = 5 + 97 = 13 + 89 = 19 + 83 = 23 + 79 = 29 + 73 = 31 + 71 = 41 + 61 = 43 + 59$



$n = 104 = 3 + 101 = 7 + 97 = 31 + 73 = 37 + 67 = 43 + 61$