Voir la primalité dans le triangle de Pascal (Denise Vella-Chemla, 14.5.2017)

A la recherche de formules de calcul en lien avec les nombres premiers, on a trouvé un fait surprenant, fourni par Benoit Cloitre au sujet de la séquence A032741, et qui permet de lire la primalité des nombres horizontalement, directement dans les coefficients binomiaux du triangle de Pascal.

Le nombre, noté $a(n+1)$, de diviseurs de n vérifie :

$$a(n+1) = \#\{k \text{ tels que } 0 \leqslant k \leqslant n-1 \text{ et } C_n^k \mid C_n^{k+1}\}$$

On écrit les coefficients binomiaux et on compte le nombre de relations de divisibilité entre nombres successifs d'une même ligne (relation notée par une flèche bleue). S'il n'y a qu'une telle relation de divisibilité sur la ligne de n alors $n+1$ est premier.

0	1															
1	1	→1														
2	1	→2	1													
3	1	→3	→3	1												
4	1	→4	6	4	1											
5	1	→5	→10	→10	5	1										
6	1	→6	15	20	15	6	1									
7	1	→7	→21	35	→35	21	7	1								
8	1	→8	28	→56	70	56	28	8	1							
9	1	→9	→36	84	126	→126	84	36	9	1						
10	1	→10	45	120	210	252	210	120	45	10	1					
11	1	→11	→55	→165	→330	462	→462	330	165	55	11	1				
12	1	→12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1			
13	1	→13	→78	286	715	1287	1716	→1716	1287	715	286	78	13	1		
14	1	→14	91	→364	1001	→2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1	
15	1	→15	105	455	→1365	3003	5005	6435	→6435	5005	3003	1365	455	105	15	1

Compter les relations de divisibilité de la ligne de $n-1$ du triangle de Pascal permet de dénombrer les diviseurs de n différents de n.

$a(2) = 1$
$a(3) = 2$
$a(4) = 1$
$a(5) = 3$
$a(6) = 1$
$a(7) = 3$
$a(8) = 2$
$a(9) = 3$
$a(10) = 1$
$a(11) = 5$
$a(12) = 1$
$a(13) = 3$
$a(14) = 3$
$a(15) = 4$